高等医药学院校教材

数理统计方法

主　编：张春华　周永治

副主编：阎雪隐　刘延福　李国桢

周金汤　刘明芝

山东大学出版社

高等医药院校教材

数 理 统 计 方 法

主　编　张春华　周永治
副主编　阎雪隐　刘延福　李国桢
　　　　周金汤　刘明芝
编　委　林　莉　董　平　周　喆　李大庆
　　　　严云良　陈志军　周仁郁　于鹤丹
　　　　范薪生　丁　勇

山东大学出版社

鲁新登字 09 号

高等医药院校教材

数理统计方法

主编　张春华　周永治

山东大学出版社出版发行

山东大学印刷厂印刷

787×1092 毫米　16 开本　16.5 印张　407 千字

1992 年 8 月第 1 版　1992 年 8 月第 1 次印刷

印数　1—5100

ISBN　7—5607—0763—7/O.42

定价：7.30 元

编写说明

数理统计方法是研究随机现象统计规律的一门学科，它所建立的方法广泛应用于自然科学，社会科学和工农业生产，特别在医药学中它已成为一种不可缺少的工具，也是中医药专业的一门重要基础课。

本书是根据卫生部1982年颁布的有关教学计划的要求，由全国15所中医院校中具有多年教学和科研经验的教师联合编写，作为高等医药院校的"数理统计方法"教材，也可作为医药人员自学统计方法的用书。

全书共分十章，内容主要包括数理统计所需的概率论基本知识、数理统计的几个重要概念及分布、医药学中常用的统计方法及药物质量管理. 而重点放在介绍数理统计方法和在医药学中的应用，而不是数学的推导证明。

教材可以适合多方面不同层次的读者，对缺乏微积分知识的读者，可略去有关数学证明而直接使用结论，并可通过示范性的例子掌握方法的应用。

本书约需60学时，如删去打"*"号的内容及概率论知识，40～50学时也能讲授。书后配有习题答案，供教师和读者参考选用。

参加本教材编写的有：阎雪隐、董平（辽宁中医学院）、林莉（天津中医学院）、李国桢（江西中医学院）、周金汤（福建中医学院）、周喆（长春中医学院）、张春华、丁美华（山东中医学院）、李大庆、严云良（浙江中医学院）、陈志军（北京中医学院）、周仁郁（成都中医学院）、于鹤丹（黑龙江中医学院）、刘明芝（湖南中医学院）、范薪生（贵阳中医学院）、刘延福（河南中医学院）、丁勇（南京医学院）、周永治（南京中医学院）。

由于我们编写水平有限，书中不当之处，请在使用过程中提出宝贵意见，以便修正。

编者

1992. 5.

目　录

第一章　事件与概率

数理统计是以概率论为理论基础，通过一定的设计来收集数据和进行整理分析，以部分资料推断总体的一种方法论。用它去研究大量随机现象的规律性，由于概率和随机事件是联系在一起的，因此事件和概率都是数理统计中最基本的概念。

本章将介绍随机事件，事件的概率及其运算。

§1　随机事件及其运算

1.1　随机事件

当我们多次观察自然现象和社会现象后，会发现许多事情在一定条件下必然会发生，这种在一定条件下必然会发生的事件称为必然事件，记作 Ω。例如，{标准大气压下，水加热到100℃沸腾} $= \Omega$；{黄连内含有小藻碱} $= \Omega$。反之，那种在一定条件下必然不会发生的事情，称为不可能事件，记作 Φ。如{$x^2+1=0$有实数解} $= \Phi$；{黄连内提出青霉素} $= \Phi$。这类现象我们统称它为**确定性现象**。

另有一类现象，在一定条件下具有多种可能发生的结果，而事先不能肯定究竟发生那一种结果，这类现象称为**随机现象**。例如，从一批针剂中抽取一支来检验，其结果可能是正品，也可能是次品，在抽取之前是无法肯定的。

对随机现象的研究必然要联系到对客观事物进行观察，观察一定条件下发生的现象叫做**试验**，一个试验如果可以在相同条件下重复进行，每次试验可以出现不同的结果，而究竟出现哪一个结果，试验前不能预先肯定；并且在每一次试验中必有其中一个结果出现，我们称这个试验为**随机试验**。随机试验观察的对象就是随机现象，随机试验中每一个可能的结果称为**基本事件**，由若干基本事件组合而成的事件称为**复杂事件**，无论是基本事件还是复杂事件都叫做**随机事件**，简称事件，一般用字母 A、B 等表示。例如 $A=$ {虚证患者中气虚者}；$B=$ {虚证患者中的气血双虚者} 都是随机事件。必然事件与不可能事件可以说不是随机事件，但为了研究方便起见，把必然事件与不可能事件作为随机事件的两个极端来统一处理。

1.2　事件之间的关系及运算

在自然现象中，往往要求我们同时考察几个在同样条件下的事件及它们之间的联系，下面我们就来讨论事件的关系及运算：

（一）　包含　设有事件 A 及 B，如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B 或事件 B 包含事件 A。并记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。

（二）　等价　若事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，即 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，就称事件 A 与 B 等价（或称相等）。记为 $A = B$。

（三）　并事件　若事件 $c=$ {A 或 B 中至少有一个发生}，则称 c 为 A、B 两事件的并事件，

记为 $c = A + B$。n 个事件的并事件记为 $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$。

如把两个开关 K_1 和 K_2 并联后接入电路（图 1－1），设 $A = \{$电路接通$\}$，$A_1 = \{K_1$ 闭合$\}$，$A_2 = \{K_2$ 闭合$\}$，那么 $A = A_1 + A_2$。

（四）　**交事件**　若事件 $c = \{A$ 与 B 同时发生$\}$，则称 c 为 A、B 两事件的交事件，记为 $c = AB$。n 个事件的交事件记为 $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$。

如把两个开关 K_1 和 K_2 串联后接入电路（图 1－2），那么，$A = A_1A_2$。

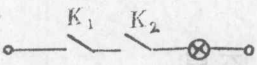

图　1－1

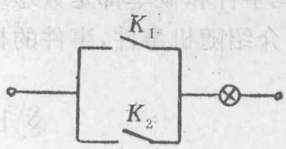

图　1－2

（五）　**互不相容事件**　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称 A 与 B 为**互不相容事件**，记为 $AB = \Phi$。**互不相容事件也称为互斥事件**。

若 n 个互斥事件的并事件是必然事件，即 $A_iA_j = \Phi (1 \leqslant i < j \leqslant n)$，且 $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称这 n 个事件构成**互斥完备群**。

例如，治疗某种疾病，其疗效标准分为三个等级：显效、微效和无效。那么，就一次试验（治疗一个患者的结果）而言，事件｛显效｝、｛微效｝、｛无效｝是互斥事件，而且这三个事件构成互斥完备群。

表　1－1

符 号	集合论	概率论
Ω	全集	必然事件
Φ	空集	不可能事件
$A \subset B$	A 是 B 的子集	事件 A 包含于事件 B
$A = B$	A 与 B 相等	事件 A 与事件 B 相等
$A + B$	并集	事件 A 与 B 之并事件
AB	交集	事件 A 与 B 之交事件
$\overline{A}$	集合 A 之补集	事件 A 之对立事件
$AB = \Phi$	集合 A 与 B 无公共元素	事件 A 与 B 互不相容

（六） **对立事件** 若在任一次试验中，事件 A 与事件 B 二者必有一个发生，且仅有一个发生，亦即 A、B 同时满足 $A+B=\Omega$ 及 $AB=\Phi$ 两个条件，则称**事件 A 与事件 B 对立，或事件 B 是事件 A 的对立事件**。A 的对立事件记作 $\overline{A}$。如果治疗某种疾病，只考虑有效和无效两个等级，那么事件{有效}与{无效}就是对立事件。

不难理解，对立事件必为互斥事件，而互斥事件不一定对立。

事件之间的关系，类似于集合之间的关系，如表 1—1 所示。

事件之间的关系还可用图 1—3 来直观地表示。

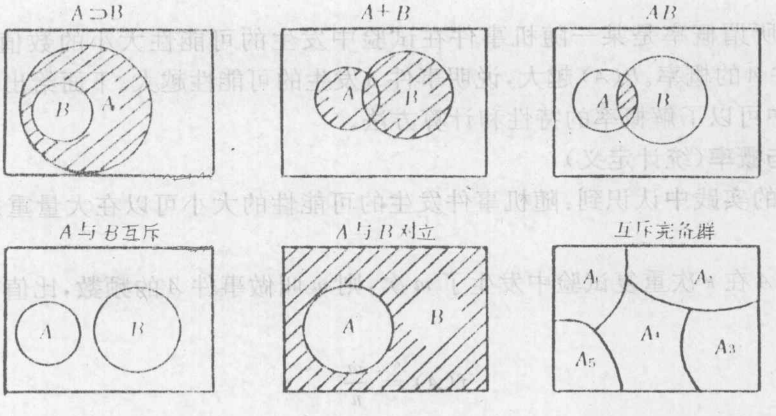

图 1—3 韦恩图

我们不但要学会用概率论的语言来解释这些关系及运算，并且应在不甚复杂的情况下，会用这些运算关系来表示一些事件。

例如 大黄、黄连、黄芩是组成泻心汤的主要成份，依次检查它们的质量算一次试验，令 A ＝{大黄质量合格}，B＝{黄连质量合格}，C＝{黄芩质量合格}。试用三个事件表示下列在一次试验中出现的事件：

(1) 只有大黄质量合格；

(2) 只有一种成份质量合格；

(3) 每一种成份质量都不合格；

(4) 至少有一种成份质量合格；

(5) 构成互斥完备群的全部事件。

解 设 $\overline{A}$＝{大黄质量不合格}，$\overline{B}$＝{黄连质量不合格}，$\overline{C}$＝{黄芩质量不合格}

(1) {只有大黄质量合格}＝{大黄质量合格且黄连、黄芩质量不合格} $= A\overline{B}\,\overline{C}$。

(2) 因为{只有大黄质量合格} $= A\overline{B}\,\overline{C}$，

{只有黄连质量合格} $= \overline{A}B\overline{C}$，

{只有黄芩质量合格} $= \overline{A}\,\overline{B}C$，

所以，{只有一种成份质量合格} $= A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$。

(3) {每种成份质量都不合格} $= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$。

(4) {至少有一种成份质量合格} $= A + B + C$,或者{至少有一种成份质量合格} $= A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$。

(5) 构成互斥完备群的全部事件有八个,即

$\Omega = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$。

§2 事件的概率

通俗的说,所谓概率是某一随机事件在试验中发生的可能性大小的数值表示,通常用 $P(A)$ 来表示事件 A 的概率。$P(A)$ 越大,说明事件 A 发生的可能性越大。下面给出概率论中概率的两个定义,从中可以了解概率的特性和计算方法。

2.1 **频率与概率**(统计定义)

人们在长期的实践中认识到:随机事件发生的可能性的大小可以在大量重复试验中显示出来。

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次,则 m 叫做事件 A 的**频数**,比值 m/n 叫做事件 A 的**频率**,记为

$$f(A) = \frac{m}{n} \tag{1-1}$$

对于一个随机事件,尽管每作 n 次试验,所得到的频率可以各不相同。但经验证明,在同一条件下进行多次重复试验时,这事件出现的频率会在某一常数左右摆动,这种性质,叫做频率的稳定性。

在历史上,这种频率的稳定性是在人口统计方面最先注意到的。如,世界上一些国家通过多年观察,发现男婴的出生频率稳定在 22/43 附近,而女婴出生频率稳定在 21/43 附近。

再如著名的投掷硬币的试验,表 1—2 列出试验记录,容易看出,投掷次数逐渐增多时,{出现正面}这个事件的频率 $\frac{m}{n}$ 总是在 0.5 这个数附近摆动而逐渐稳定于 0.5。所以,0.5 这个数能反映事件{出现正面}发生的可能性的大小。

表 1—2

试验者	投掷次数 n	得正面次数 m	频率 m/n
德莫根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

由此可见,频率的稳定性充分说明随机事件发生的可能性大小是事件本身固有的一种客观属性,并为我们衡量一个随机试验中随机事件发生的可能性提供了客观基础。

概率的统计定义 在条件相同的n次试验中事件A发生m次，如果加大n时，A的频率m/n逐渐稳定在一个常数附近，就把这个常数称为事件A的概率。

在此定义下有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,\ P(\Omega) = 1,\ P(\Phi) = 0 \tag{1-2}$$

概率的统计定义实际上给出了一个近似计算随机事件的概率的方法，即当试验次数n足够大时，一个事件的频率与概率应充分接近，所以用事件的频率作为概率的近似值。在医药学中，这种估计是经常用到的。需要注意的是不要把频率和概率相混淆。频率是我们已经进行的试验的结果，其数值随着试验次数的变化而变化，具有偶然性，而概率是一种客观存在，是个确定的数值，具有必然性。

例 1 在某地区 40 岁以上的男子中进行心血管疾病调查，结果在 4000 名男子中发现冠心病的有 132 人，求该地 40 岁以上男子患高血压病的概率。

解 由于$n = 4000$，这个数字比较大，故可以用频率作为患病（记为A）概率，于是得：

$$P(A) \approx \frac{132}{4000} = 3.30\%。$$

2.2 古典概率

按照概率的统计定义去研究一个随机事件的概率，需要进行大量的重复试验得到其近似值，但是有一类特殊的随机现象：每次试验，基本事件只有有限个，而且各基本事件出现的可能性相等，我们称它为等可能概型。对这类随机事件的概率，只要对“等可能性”这一特性进行分析，便可求得。

概率的古典定义 如果互斥完备群由有限的n个基本事件构成，而事件A包含m个基本事件，那么事件A的概率

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1-3}$$

在此定义下仍然有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1,\ P(\Omega) = 1,\ P(\varphi) = 0$

注意： 定义中构成互斥完备群的n个基本事件是等可能的。

一般把古典定义下关于事件概率的数学模型称为古典概型。古典概型的大部分问题都能形象化地归结为抽球问题。

例 2 瓶中装有 50 片药，其中有 3 片次品，求

(1) 一次取一片，取得次品的概率；

(2) 一次取 5 片，5 片中有 2 片是次品的概率。

解 (1) 50 片药中取一片，其可能结果有 50 个基本事件（每片药被取到的可能性相等）。即$n = 50$。

设$A = \{$取到次品$\}$，则A包含 3 个基本事件，即$m = 3$，由古典定义得

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{50} = 0.06$$

(2) 50 片药中任取 5 片，其可能结果有C_{50}^5个基本事件（C_{50}^5种机会均等的取法），即$n = C_{50}^5$。

设$B = \{5$片中有 2 片次品$\}$，则事件B包含的基本事件数 $m = C_3^2 C_{47}^3$ 故所求概率

$$P(B)=\frac{C_3^2C_{47}^3}{C_{50}^5}=\frac{9}{392}=0.023\,。$$

例 3　袋中有 2 个白球和 8 个黑球，现在无放回地一个个抽出来，求第 k 次抽到的是白球的概率($1\leqslant k\leqslant 10$)。

解法一　把 10 个球看作有区别的，即设想把它们按 1,2,...,10 进行编号，若将抽出的球依次排成一排，则全部可能的结果相当于把 10 个元素进行全排列，即全部基本事件数为 10!。

第 k 次抽到的白球，即排在第 k 号位置上的那一个白球，只能在 2 个白球中取得，故有 2 种抽法。而另外 9 次抽的球，可在余下的 9 个中任取，故有 9! 种抽法。所以事件{第 k 次抽到白球}包含的基本事件数为 $2\times 9!$，故第 k 次抽到白球的概率

$$p=\frac{2\times 9!}{10!}=\frac{2}{10}。$$

解法二　把 2 个白球看成一样，8 个黑球看成一样，把抽出的球仍依次放在 10 个位置上，则把 2 个白球放在 10 个位置中的任意 2 个位置上的总排法即总的基本事件数为 C_{10}^2，而事件{第 k 次抽到白球}所包含的基本事件数为 $C_{10-1}^{2-1}=C_9^1$，所以

$$p=\frac{C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{10}$$

两种解法结果一样，抽到白球的概率 $p=\dfrac{2}{10}$ 与次数 k 无关，这正好说明广泛用于生产和生活中的抽签方法是公平合理：先抽后抽都一样，机会均等。

需要说明的是，无论是概率的统计定义，还是古典定义，都在概率计算中起一定的作用，但又有着各自的局限性。古典概率是以试验的所有可能结果只有有限个且具有等可能性为基础，实际上这种条件很难满足。至于统计概率则要求试验次数 n 充分大，并以事件频率的稳定值近似地作为该事件的概率，这里的 n 大到什么程度，稳定值是什么都是不确切的，因此，人们需要对概率有个更为严密的定义，使之能适用于一般的随机试验。经过人们不断的探索的总结，终于在 1933 年，由苏联数学家柯尔莫戈洛夫提出了概率论公理化结构，明确定义了基本概念，使概率论成为严谨的数学分支。关于公理化体系的内容，有兴趣的读者可参阅概率论专著，此处不再赘述。

§3　概率的运算

把复杂事件的概率分解成简单事件的概率来计算另外一些事件的概率，可以借助于概率的运算法则。

3.1　加法定理

(一)　互斥事件加法定理 若事件 A 与 B 互斥，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-4}$$

证　设试验的全部结果包含 n 个基本事件，而事件 A 包含其中 m_1 个基本事件，事件 B 包含其中的 m_2 个基本事件。由于 A 与 B 互斥，因而它们各包含的基本事件应该完全不同。所以事件 $A+B$ 所包含的基本事件数为 m_1+m_2，按古典定义有

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)\,。$$

这个定理给出了计算两个互斥事件的并事件的概率的方法。它不难推广到 n 个互斥事件的情形

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1-5}$$

简记为 $P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$，

如果 n 个事件构成互斥完备群，就有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=P(\Omega)=1\ 。$$

特别地，若 A 与 B 对立，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=1$$

从而 $\quad P(A)=1-P(B)$，

即 $\quad P(A)=1-P(\bar{A}) \qquad (1-6)$

例 1 在 20 片外观一样的药片中，有黄连素 15 片，穿心莲 5 片。今随机抽取 3 片，求其中至少有 1 片穿心莲的概率。

解法一 设 $A=\{3$ 片中有 1 片穿心莲$\}$，$B=\{3$ 片中有 2 片穿心莲$\}$，$C=\{3$ 片全为穿心莲$\}$，那么

$$P(A)=P(2\text{黄}1\text{穿})=\frac{C_{15}^2C_5^1}{C_{20}^3}=\frac{105}{228}$$

$$P(B)=P(1\text{黄}2\text{穿})=\frac{C_{15}^1C_5^2}{C_{20}^3}=\frac{30}{228}$$

$$P(C)=P(0\text{黄}3\text{穿})=\frac{C_{15}^0C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{2}{228}$$

因为 A、B、C 互斥，所以

$$P(3\text{片中至少有一片穿心莲})=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{137}{228}$$

解法二 $\{3$ 片中至少有 1 片是穿心莲$\}$与$\{3$ 片全为黄连素$\}$是对立事件，所以，

$$P(3\text{片中至少有1片穿心莲})=1-P(3\text{片全为黄连素})=1-\frac{C_{15}^3}{C_{20}^3}=\frac{137}{228}$$

如果不是互斥两事件而是任意两事件，那么它们的并事件的概率则应由下面的定理计算。

（二）般加法定理 对于任意两事件 A 与 B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-7}$$

证 事件 $A+B$ 可以表示成三个互斥事件 $A\bar{B}$，$\bar{A}B$，AB 的并事件，即

$$A+B=A\bar{B}+\bar{A}B+AB\ ,$$

按互斥加法定理得

$$P(A+B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB) \tag{1-8}$$

因为 $A=AB+A\bar{B}$，而 AB 与 $A\bar{B}$ 互斥，所以

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$$

由此得 $\quad P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

同理可得 $\quad P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$

把最后二式代入(1—8)式，得

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

不难把这一定理推广到有限个事件的情形。下面给出三个事件的加法公式：$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$　　(1—9)

例 2　某药厂自动生产线上有两个料仓，在一天内甲料仓装满需要清理的概率为 0.15，乙料仓装满需要清理的概率为 0.25，两料仓同时装满的概率为 0.08，问一天至少有一料仓需要清理的概率是多少？

解　设 $A=\{$甲料仓装满$\}$，$B=\{$乙料仓装满$\}$，由于事件 A 与 B 不互斥，由一般加法定理有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.15+0.25-0.08=0.32.$$

3.2　条件概率、概率的乘法定理

(一)　条件概率

定义　在事件 B 已发生的条件下，事件 A 发生的概率称为 A 的条件概率，记为 $P(A/B)$，读作在条件 B 下事件 A 的概率。

条件概率当然具有普通概率的性质，即

$$0\leqslant P(A/B)\leqslant 1,\quad P(\Omega)/B)=1\quad P(\varphi/B)=0$$

相对地，$P(A)$ 可以称为无条件概率。在一般情况下，无条件概率 $P(A)$ 与条件概率 $P(A/B)$ 是不相等的。

如在 2.2 例 3 中，我们算得第 k 次抽到白球的概率是 2/10，与先后次序无关。现在我们考虑一下，如果已知第一个人抽得了白球，那么第二个人抽得白球的概率是多大呢？

设 $A=\{$第一个人抽到白球$\}$，$B=\{$第二个人抽到白球$\}$，于是上面的问题就可写成 $P(B/A)$，由于 A 已发生，且 $P(A)=2/10$，故剩下的 9 个球中只有一个白球，所以 $P(B/A)=1/9$。

显然，就事件$\{$抽到白球$\}$来说，无条件概率和条件概率不相等，亦即 $P(A)\neq P(A/B)$。

(二)　独立事件

在某些情况下，无条件概率和条件概率相等，即 $P(A)=P(A/B)$。这说明事件 A 的概率与事件 B 的出现与否无关，也就是说，事件 A 与 B 是相互独立的。

定义　若 $P(A)=P(A/B)$，就称事件 A 与 B 相互独立。由对称性，此时必有 $P(B)=P(B/A)$。

例 3　为研究某种方剂对风热外感证的疗效，随机选取 400 名患者，有的服药，有的不服药，经过一定时间后，有的有效，有的无效。结果见表 1—3。试判断用此方剂治疗风热外感证是否有效。

表　1—3

	B(服药)	$\overline{B}$(未服药)	合计
A(有效)	127	190	317
$\overline{A}$(无效)	33	50	83
合计	160	240	400

解　如果事件 A(有效) 与事件 B(服药) 独立，就说明有效与服药无关，方剂未起作用。

无条件概率 $P(A)=317/400=0.793$，

条件概率 $P(A/B) = 127/160 = 0.794$

可见 $P(A) \approx P(A/B)$

两者几乎相等。定义，认为事件 A 与 B 相互独立，即该方剂对风热外感证没有确实疗效。

（三） 乘法定理

一般乘法定理 对任意两事件 A 与 B，有

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) \tag{1-10}$$

证 设试验的全部结果包含 n 个基本事件，而事件 A,B,AB 分别包含其中的 m_1 个，m_2 个，m 个基本事件，显然这 m 个基本事件就是 A 所包含的 m_1 个和 B 所包含的 m_2 个基本事件中共有的基本事件。按古典定义有

$$P(A) = m_1/n\ ,\ P(B) = m_2/n\ ,\ P(AB) = m/n\ 。$$

在事件 A 已经发生的前提下，事件 B 所包含的基本事件就是事件 AB 所包含的那些基本事件，有且仅有 m 个，所以

$$P(B/A) = \frac{m}{m_1} = \frac{m/n}{m_1 n} = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

由此得 $\qquad P(AB) = P(A)P(B/A)$，

同理可得 $\qquad P(AB) = P(B)P(A/B)$ 。

独立事件乘法定理 若事件 A 与 B 独立，则

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{1-11}$$

因为此时 $\qquad P(B/A) = P(B), P(A/B) = P(A)$，将其代入(1－10)式即得

$$P(AB) = P(A)P(B) = P(B)P(A)\ 。$$

这个定理，其逆亦真。

对于 n 个独立事件，容易推出

$$P(A_1A_2\cdots\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots\cdots P(A_n) \tag{1-12}$$

应该指出，实际应用中，事件的独立性常常不是根据定义而是根据实际意义来做出判断的。

例 4 若每人血清中有肝炎病毒的概率为 0.4%，今混合 100 人的血清，求混合血清无肝炎病毒的概率。

解 设 $A_i = \{$第 i 人血清中有病毒$\}$，则

$$\overline{A}_i = \{\text{第 } i \text{ 人血清中无病毒}\}。$$

$$P(Ai) = 0.004\ ,\ P(\overline{A}_i) = 1 - P(A_i) = 0.996\ 。$$

因为 100 个事件 $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_{100}$ 独立，所以混合血清无病毒的概率为

$$P(\text{混合血清无病毒}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_{100})$$

$$= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{100}) = 0.996^{100} = 0.67。$$

应用概率的加法和乘法定理时，必须注意到事件的互斥性和独立性。

§4 全概率与逆概率公式

4.1 全概率公式