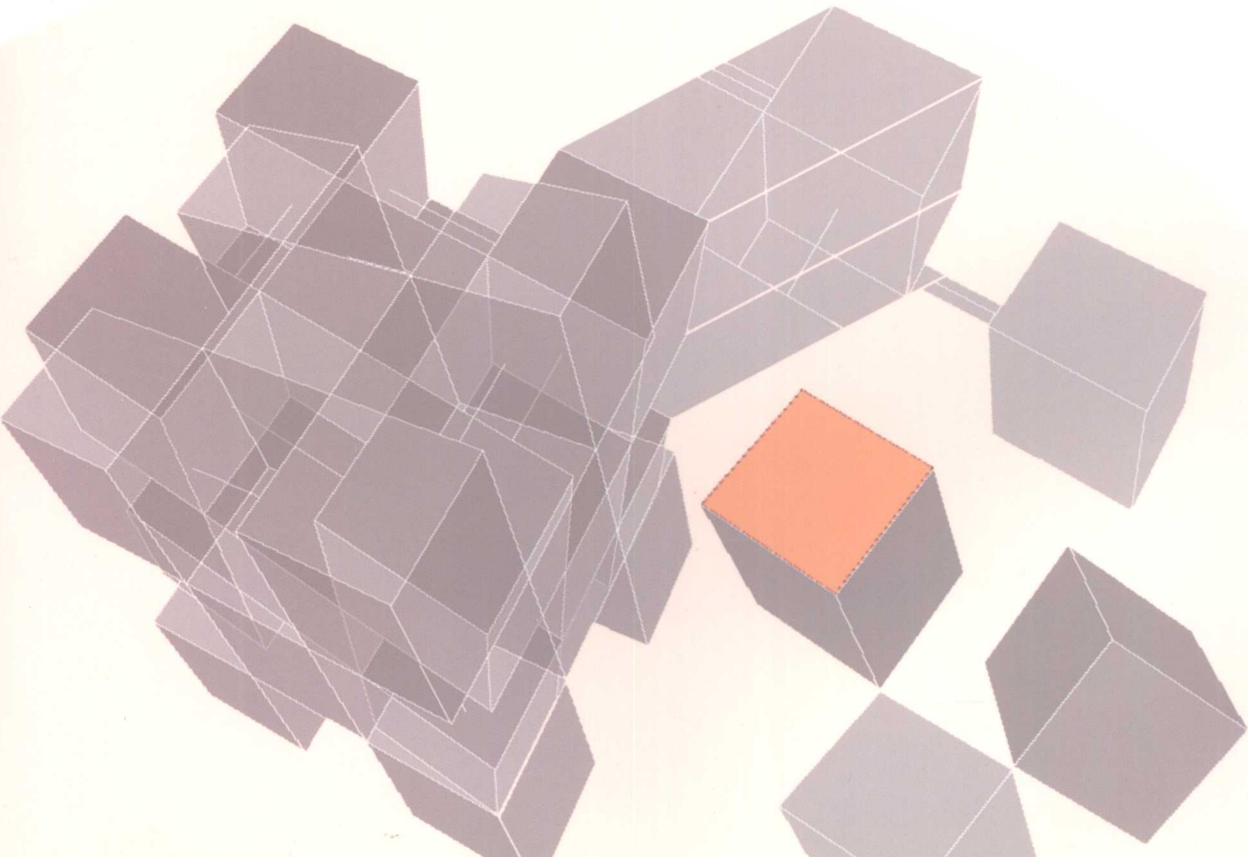
XIANXING DAISHU JIAOCHENG

线性代数教程

主编 周学松 王海敏



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

线性代数教程

主编　周学松　王海敏

浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数教程／周学松，王海敏主编．—杭州：浙江大学出版社，2008.8

ISBN 978-7-308-06151-3

Ⅰ.线…　Ⅱ.①周…②王…　Ⅲ.线性代数－高等学校－教材　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 125995 号

线性代数教程

周学松　王海敏　主编

责任编辑　徐素君

封面设计　刘依群

出版发行　浙江大学出版社

（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）

（E-mail：jsjsyb@zju.edu.cn）

（网址：http://www.zjupress.com

http://www.press.zju.edu.cn）

电话：0571-88925592，88273066（传真）

排　　版　杭州中大图文设计有限公司

印　　刷　富阳市育才印刷有限公司

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　10.25

字　　数　220 千

版 印 次　2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-06151-3

定　　价　16.00 元

版权所有　翻印必究　　印装差错　负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

前　　言

线性代数是理工科各专业的一门重要基础课程，它的许多知识渗透在多门后继课程中．通过线性代数课程的学习，不仅为后继专业课的学习打下必要的数学基础，而且还能促进学生的抽象思维和严密的推理能力的发展．

全书共分5章，第一章介绍了行列式的概念、性质、特殊的解法和简单的应用；第二章介绍了矩阵的概念、特殊矩阵、逆阵、矩阵的秩和分块矩阵；第三章介绍了向量、相关性和线性方程组解的结构；第四章介绍了特征值和特征向量、矩阵的对角化；第五章介绍了二次型、标准化、正定型．本书以矩阵为工具，彻底地解决了线性方程组解的问题，再利用行列式和解方程组的知识解决了矩阵对角化和二次型标准化的问题．

本书结构严谨，内容联系密切，逻辑清晰，叙述简洁明了，注重应用，习题量较大，可作为高等学校理、工科专业学生的教材．

根据我们的教学经验，讲完本教材所需课时大约在50左右，如果课时少，可由实际情况和要求取舍内容．

本书由浙江工商大学统计与数学学院组织编写，大纲和体系由集体讨论而定．第一章由周学松执笔，第二章由王海敏执笔，第三章由裘渔洋执笔，第四、五章由袁中扬执笔，全书最后由周学松、王海敏统稿定稿．

本书编写过程中参考了大量的国内外教材；浙江大学出版社对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是徐素君老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血；浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持，在此一并致谢！

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，教材中一定存在不妥之处，恳请专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善．

编　者

2008年5月于浙江工商大学

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　行列式

行列式是线性代数中一个十分有用的工具．由于它是从高斯消元法中经过仔细探索其运算规律后高度抽象得到的，因此，理解好行列式的概念也是有一定难度的．本章通过二、三阶行列式及排列的逆序数等概念，介绍了 n 阶行列式及性质，并给出了它的简单应用．

§1.1　排列的逆序数

1.1.1　二、三阶行列式

本节主要介绍二、三阶行列式和排列的逆序数及性质，理解好排列的逆序数对掌握好下一节的内容起着至关重要的作用．

对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，由高斯消元法得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-1}$$

令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

则(1-1) 可更方便的记为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1-2}$$

显然，从记忆方面而言，(1-2) 比(1-1) 要容易．我们称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为一个二阶行列式，它具有以下特点：① 恰有 2!项，每一项恰好是不同行不同列的数的乘积；② 每一项前

的符号有正负之分.

同样,对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

用消元法求解时,其求解过程中会遇到式子

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

为了便于记忆,令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

并称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为一个三阶行列式,其特点是:(1) 恰有 3!项,每一项恰好是不同行不同列的数的乘积;(2) 每一项前的符号也有正负之分.

1.1.2 排列的逆序数

为了揭示二、三阶行列式中每项前符号隐藏着的共性,有必要引入排列逆序数的概念.

定义 1.1 设 i,j 是两个正整数,当 $i<j$ 时,称 $j\,i$ 是一个逆序.

定义 1.2 设 $\pi = i_1 i_2 \cdots i_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,$\forall j \in \{2,\cdots,n\}$,$i_1 i_j$,$i_2 i_j,\cdots,i_{j-1} i_j$ 中逆序的个数称为数 i_j 在排列 π 中的逆序数,记为 $N(i_j)$.

例 1.1 已知七个数 $1,2,\cdots,7$ 的一个排列 $\pi = 3265714$,求:$N(4)$,$N(5)$.

解 因为 34,24,64,54,74,14 中有 3 个逆序:64,54,74,所以 $N(4) = 3$. 同理得 $N(5) = 1$.

定义 1.3 设 $\pi = i_1 i_2 \cdots i_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,称数 $i_1, i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数之和为排列 π 的逆序数. 记为 $N(\pi)$. 即 $N(i_1 i_2 \cdots i_n) = \sum_{j=1}^{n} N(i_j)$.

例 1.2 已知七个数 $1,2,\cdots,7$ 的一个排列 $\pi = 3415762$,求:$N(\pi)$.

解
$$\begin{aligned} N(\pi) &= N(3) + N(4) + N(1) + N(5) + N(7) + N(6) + N(2) \\ &= 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 1 + 5 = 8. \end{aligned}$$

定理 1.1 给定 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列:

$$\pi = i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_j i_{j+1} \cdots i_n \text{ 和 } \pi' = i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_{j+1} i_j \cdots i_n,$$

则
$$N(\pi) = N(\pi') \pm 1.$$

证明 π' 是 π 经过交换 i_j 与 i_{j+1} 得到的(其他的数保持原来的位置).

(1) 当 $i_j < i_{j+1}$ 时,$N(\pi) = N(\pi') - 1$;

(2) 当 $i_{j+1} < i_j$ 时,$N(\pi) = N(\pi') + 1$;

由(1)(2)得证.

有了逆序数的概念,下面可以方便的讨论二、三阶行列式中每项前的符号. 为此,先给出下列几个定义.

定义 1.4 称元素 a_{ij} 中的下标 i 为元素 a_{ij} 的**行标**,下标 j 为元素 a_{ij} 的**列标**. 称项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中下标的排列 $i_1i_2\cdots i_n$,$j_1j_2\cdots j_n$ 分别为该项的**行标排列**和**列标排列**.

于是有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{N(12)+N(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{N(12)+N(21)}a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (-1)^{N(123)+N(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{N(123)+N(231)}a_{12}a_{23}a_{31} \\ + (-1)^{N(123)+N(312)}a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{N(123)+N(321)}a_{13}a_{22}a_{31} \\ + (-1)^{N(123)+N(213)}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{N(123)+N(132)}a_{11}a_{23}a_{32}. \end{array}$$

这表明:二、三阶行列式中每项前的符号取决于该项行标排列与列标排列的逆序数之和的奇偶性.

§ 1.2 n 阶行列式

2.1.1 n 阶行列式的定义

由二、三阶行列式所展示的规律性,我们可以给出 n 阶行列式的概念. 由于式子中的符号较复杂,理解起来会十分困难. 因此,将式子中每一部分符号隐含的意义理解清楚是十分必要的.

定义 1.5 给定 n^2 个数:

$$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}; \cdots; a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn},$$

则称式

$$\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

为一个 **n 阶行列式**(其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和;$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 表示不同行、不同列的 n 个数:$\boldsymbol{a_{i_1j_1}}, \boldsymbol{a_{i_2j_2}}, \cdots, \boldsymbol{a_{i_nj_n}}$ 的乘积). 记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1-3}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-4}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1i_2\cdots i_n)} (-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1-5}$$

其中 a_{ij} 为行列式中第 i 行第 j 列处的元素($i,j = 1,2,\cdots,n$).

例 1.3 计算 $D_3 = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix}$.

解 利用(1-4)式,因为

$$a_{11} = x, a_{12} = 1, a_{13} = 2, a_{21} = 0, a_{22} = 1-x,$$
$$a_{23} = 3, a_{31} = a_{32} = 0, a_{33} = 1+x$$

$$\begin{aligned} D_3 &= (-1)^{N(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{N(132)}a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{N(213)}a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + (-1)^{N(231)}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{N(321)}a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{N(312)}a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}, \end{aligned}$$

所以 $D_3 = x(1-x^2)$.

由行列式定义,容易得

定理 1.2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明留作练习.

定理 1.3 行列式中某行(或列)全为0,则该行列式为零.

证明 设第 i 全为 0,则(1-3)式中每一项有一零因子.于是,每项为 0,得证.同理可证列对应的情形.

2.1.2 几个重要概念

为了今后的应用方便和需要,下面介绍几个重要概念和结论.

定义 1.6 给定 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 D_n 中元素 a_{ij} 的**余子式**;称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

为 a_{ij} 的**代数余子式**.

于是有

定理 1.4 给定 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D_n = a_{11} M_{11}.$$

证明
$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (j_1 \neq 1, a_{1j_1} = 0) \\ &= \sum_{(1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(1 j_2 \cdots j_n)} a_{11} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11} \sum_{(j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_2 \cdots j_n)} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11}.$$

定义 1.7 给定 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

令

$$D_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称 D_n^{T} 为 D_n 的**转置**.

于是有

定理 1.5 若 D_n 是 n 阶行列式,则 $D_n^{\mathrm{T}} = D_n$.

证明 将 D_n^{T} 中元素用新符号 $b_{ij}(b_{ij} = a_{ji}, i, j = 1,2,\cdots,n)$ 重新写出,并由(1-4)知

$$D_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

由(1-3)式得 $D_n^{\mathrm{T}} = D_n$.

§ 1.3 行列式的性质

利用定义(1.3)计算 n 阶行列式,我们需要处理 $n!$ 个乘积项并确定对应的逆序数,这显然是困难的.因此研究行列式潜在的性质并寻求较简单的计算方法是必需的.由定理 1.5 可知,行列式行具有的性质,对列也同样成立,因此只考虑行的情形,我们有下面的几个性质.

性质 1 行列式的任一行是两个代数式的和,则该行列式可以写为两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2　行列式中任一行的公因子 k 可提出来,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由 n 阶行列式的定义很容易得证上面两个性质,其证明留作练习.

性质 3　设 D_n 是 n 阶行列式,T_n 是由 D_n 交换任意两行所得的 n 阶行列式,则

$$T_n = -D_n.$$

证明　因为 $D_n = \sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n}$,设 T_n 是由 D_n 交换第 s 行与第 t 行得到的行列式,所以

$$T_n = \sum_{(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}.$$

显然,a_{tj_t} 向右经过 $t-s+1$ 次与相邻元素交换,a_{sj_s} 向左经过 $t-s$ 次与相邻元素交换,有

$$a_{1j_1}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n} = a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n}.$$

另外由定理 1.1 得(因为相邻元素共交换了 $2(t-s)+1$ 次)

$$N(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n) = N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n) \pm 1.$$

于是有

$$T_n = \sum_{(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)\pm 1} a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n}$$

$$= -\sum_{(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n}$$
$$= -D_n.$$

例 1.4 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 第 n 行经过 $n-1$ 次行交换得

$$D_n = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

再将新的第 n 行经过 $n-2$ 次行交换,得

$$D_n = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

如此进行下去,可得

$$D_n = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{定理 1.2}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

由性质 3 立即可得

性质 4 如果行列式有两行相等,则该行列式为零.

由性质 1、性质 2、性质 4 立即可得

性质 5　行列式的任一行的 k 倍加到另一行上去，其结果不变.

性质 5 及定理 1.3 可简化行列式的计算.

例 1.5　计算 $D_3=\begin{vmatrix}2&-3&5\\1&4&7\\3&2&-5\end{vmatrix}$.

解　由性质 5 和定理 1.4

$$D_3 \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix}1&4&7\\2&-3&5\\3&2&-5\end{vmatrix} \xlongequal[c_3+(-7)c_1]{c_2+(-4)c_1} -\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-11&-9\\3&-10&-26\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-11&-9\\-10&-26\end{vmatrix}=-196.$$

（r 表示行，c 表示列；$r_1\leftrightarrow r_2$ 表示第 1 与第 2 行交换，$c_2+(-4)c_1$ 表示将第 1 列的（-4）倍加到第 2 列）.

下面的性质实际上给出了行列式的一种基本计算方法，十分重要.

性质 6　（行列式的展开）给定 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

则
$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad i=1,2,\cdots,n.$$

证明　先讨论 $i=1$ 的情况.

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}+0+\cdots 0&0+a_{12}+\cdots+0&\cdots&0+\cdots+0+a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a_{12}&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{定理 1.4}} a_{11}M_{11}+(-1)\begin{vmatrix}a_{12}&0&\cdots&0\\a_{22}&a_{21}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}a_{1n}&0&\cdots&0\\a_{2n}&a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{nn}&a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12}+\cdots+a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

仿此可证 $i \geqslant 2$ 的情况,留作练习.

注 性质6实质上是行列式按某行(列)展开,即将 n 阶行列式降阶为 n 个低阶($n-1$ 阶)行列式. 因此,有时也可将它作为行列式的定义.

例 1.6 给定4阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & -5 \\ 11 & 32 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix},$$

计算:$21A_{22}+7A_{24}$.

解 除了分别计算 A_{22}, A_{24} 外,也可利用性质6作如下计算:

$$21A_{22}+7A_{24}=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & -5 \\ 0 & 21 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-3c_4} \begin{vmatrix} 3 & 20 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 4 & 18 & 9 & -5 \\ 2 & -18 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=7\cdot\begin{vmatrix} 3 & 20 & 7 \\ 4 & 18 & 9 \\ 2 & -18 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} 7\cdot\begin{vmatrix} 3 & 20 & 7 \\ 4 & 18 & 9 \\ 6 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-2r_1} 7\cdot\begin{vmatrix} 3 & 20 & 7 \\ 4 & 18 & 9 \\ 0 & -40 & 0 \end{vmatrix}=-280.$$

性质 7 行列式某一行的元素乘另一行对应元素的代数余子式之和等于零. 即第 i 行元素乘第 j 行元素对应的代数余子式之和为零.

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i \neq j).$$

证明 考虑行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

一方面,第 i 行与第 j 行相等,由性质4知其结果为零;

另一方面,将其按第 j 行展开,得 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$.

由此两方面知结论成立.

§1.4 行列式的计算

行列式的计算是比较复杂的事情，虽然性质 5 和性质 6 可以简化行列式，但是，许多计算仍需要一定的技巧. 在本节中，我们试图从行列式本身的结构出发，对它进行归类，并提供一些特定的解法.

例 1.7 计算 $D_4=\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\-1&7&-3&4\\2&-9&5&7\\1&-6&4&2\end{vmatrix}$.

解 $$D_4\xlongequal[r_4+(-1)r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3+(-2)r_1}}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&2&-1&6\\0&1&1&3\\0&-1&2&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&2&-1&6\\0&-1&2&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+r_2]{r_3+(-2)r_2}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=9.$$

例 1.8 计算 $D_4=\begin{vmatrix}2&4&5&3\\3&0&4&2\\5&7&2&9\\7&3&3&5\end{vmatrix}$.

解 为了避免出现分数运算，可将(-1)倍的第 1 列加到第 4 列上去(可产生 1 或 -1)，得

$$D_4\xlongequal{c_4+(-1)c_1}\begin{vmatrix}2&4&5&1\\3&0&4&-1\\5&7&2&4\\7&3&3&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+(-2)r_2]{\substack{r_1+r_2\\r_3+4r_2}}\begin{vmatrix}5&4&9&0\\3&0&4&-1\\17&7&18&0\\1&3&-5&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&4&9\\17&7&18\\1&3&-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+5c_1]{c_2+(-3)c_1}-\begin{vmatrix}5&-11&34\\17&-44&103\\1&0&0\end{vmatrix}=11\cdot\begin{vmatrix}1&34\\4&103\end{vmatrix}=-363.$$

例 1.7 中由于行列式的(1,1)位置是 1，可以直接进行消元化为上三角，而例 1.8 中没有 1，需要利用行列式的性质构造出 1，再进行计算.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com