三角函數

中國數学会上海分会
中学數学研究委員会編

新知識出版社

三　角　函　數

中國數學會上海分會
中學數學研究委員會編

新知識出版社

一九五六年·上海

三　角　函　數

中國數学会上海分会
中学數学研究委員会編

*

新知識出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版業營業許可証出015号

上海國光印刷厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

開本：787×1092　1/32　印張：2 5/8　字數：50,000
1955年11月第1版　1956年8月第5次印刷
印數：24,001—64,000本

統一書号：13076·34
定　　价：（7）0.24元

序　　言

本會爲了學習蘇聯先進經驗，幫助教師積極提高教學質量，並根據當前中學教學實際需要，決定着手編寫有關高中數學各科包括三角、代數、幾何教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中學數學教師作爲進一步研究和了解教材的參考，從而更好地掌握教材的教學目的。同時，也可供高中學生作爲課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材內容。我們希望通過這一套小册子的出版，能使數學界同志對中學數學教材的研究得到廣泛的交流。

這本"三角函數"的小册子，是根據一九五四年中央人民政府教育部中學數學教學大綱修訂草案高一平面幾何中的銳角三角函數與高二上三角的教材內容編寫的。不過在若干地方略有引伸，所以這樣，或者由於考慮到教學方法，或者由於需要說明教材的科學性和系統性。教師在課堂教學時，應當根據雷布金原著高級中學課本平面三角進行講解，避免較複雜的論證。

本册對於三角函數定義、變化與圖象作了比較系統的說明，對於同角三角函數之間的相互關係，則注意恆等變換的目的。

本會在編寫本册前，曾擬就編寫計劃，邀請上海市十餘個

學校的高中三角教師參加意見，又經編輯組兩次討論，然後確定初步提綱，分別由趙型、秦子超、施毓湘諸同志提供材料，而由楊榮祥同志執筆寫成，再經程其襄、朱鳳豪、范際平、姚晶諸同志校訂，最後由楊榮祥同志作了修正。雖然這樣，但由於我們水平有限，時間忽促，缺點是難免的，希望數學界同志予以批評和指正。

中國數學會上海分會中學數學研究委員會

一九五五年八月

目　　錄

一、學習三角函數的基本知識

三角學的教學要求

三角學的內容可分爲兩部分：第一部分是關於三角函數性質的研究，第二部分是三角形解法的研究。

三角學這一名詞是從希臘文翻譯過來的，它的原意是"三角形測量"或如一般的說法"解三角形"，根據三角形的已知元素(一邊及兩角，兩邊及一角或三邊)求這三角形的未知元素(邊與角)。

三角學發展的最初幾個階段與最古的一門學科卽天文學的發展有密切的關係。天文學的產生首先是由於古代農業生產的需要，編著正確的曆書。又由於航海需要，根據天體的位置正確地確定船在大海中的航程，這些都需要天文學，而天文學的發展又需要三角形的測量，因此三角學科的最初知識就隨着天文學而發展起來。

在現代建設事業中，基本建設的正確設計，就要依靠地形的測量和計算。無論在哪一個建設的工地上，如礦山、農場、工廠、鐵路、公路和水利工程等，測量隊往往是一切建設隊伍的先鋒，測量工作歸根結底是解三角形。

這裏可以說明，從三角學最早適應古代生產實踐上的需

要而產生起，一直到適應現代建設工作的需要，三角學的測量，卽解三角形，始終是三角學科的一個重要內容。

三角，是數學學科中的一門。它的基礎是建築在幾何學相似三角形性質上的，而它的表達、處理和研究方式則主要是代數的。可以說，三角學是初步地把代數和幾何兩科聯系了起來。由於三角採用了代數的方法，不僅它對三角形邊角關係等性質的研究，比純粹幾何的研究更加深入和具體，而且三角和代數一樣，是學習高等數學的基礎，如解析幾何、微積分等都需要三角函數的知識。物理學也廣泛地應用到三角函數，如力的分解和合成、彈道曲線、光的反射和折射，波、磁電學的研究，都需要三角函數作爲工具。因此三角函數性質的研究，就構成三角學科的另一重要內容。

在中學數學教學大綱修訂草案中，指出了"三角教學的目的，在於研究三角函數和它的性質，解直角三角形和斜三角形以及講授三角在幾何、物理、技術等問題上的實際應用"。這裏已說得很淸楚，中學學習三角的目的，完全確定爲：第一、使學生熟悉三角函數的基本概念，以便他們在中學以及高等學校的分析數學、物理、測量等學科中遇見它們時能毫無困難地應用；第二、熟悉這些函數在幾何應用的理論方面和實際應用方面，首先是解三角形。關於其他中學數學科目的應用：如複數的三角形式，應用三角解幾何習題，尤其關於旋轉體，體的結合、體的截面的習題。

三角學發展簡史

三角學創始於古希臘時代，生於公元前二世紀中葉的希巴諸斯是古希臘的天文學家，做出了第一個弦表，即表示定半徑圓內不同的圓心角所對弦長的表。它實際是半圓心角的雙正弦表，不過希巴諸斯的原表沒有流傳到現在，我們根據生於二世紀中葉的亞力山大城天文學家克拉基·布特勞密所著"算學總覽"一書中載有半徑為 60 單位的圓的弦長的表。他曾將半徑分為 60 等份，再將每一份又分為 60 等份，同樣地再將其中每一小份分為 60 等份，由此得到我們量角所用的度、分、秒等名稱。在布特勞密的表中包含從 0° 到 180° 每隔半度的弦表，以我們現代的眼光來看，這是一個從 0° 到 90° 每隔四分之一度的正弦表。

從五世紀到十二世紀的時期，三角學在印度有重要發展。印度人與希臘人不同，他們在計算中開始研究和應用的已不是對應中心角的整弦 MM'（圖 1），而是它的一半 PM，就是現在所稱為 α 的正弦線（α 是中心角 MOM' 的一半）。

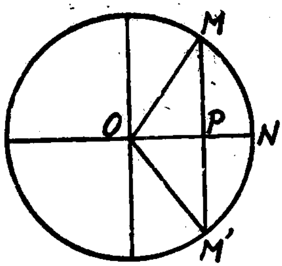

圖 1

除正弦以外，印度人在三角學中引入了餘弦，他們已知道關係式 $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ 以及 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，也知道兩角和與差的正弦公式。

在九世紀到十五世紀的五百年間，在阿剌伯帝國政權統治各國的數學，向着解決幾何與三角測量的應用問題發展，把三角學發展成為一個獨立的數學科目。他們的最重要的成就，

是所有六條三角線的引入：正弦、餘弦、正切、餘切、正割和餘割。

亞述的天文學家厄耳—巴湯尼（十世紀），根據直立竿 a（圖 2）的陰影 b 解决關於測定太陽 s 的高度 ϕ 的問題時，曾得出結論：直角三角形內的銳角 ϕ 决定於一直角邊對另一直角邊的比並算出了 $\phi=1°, 2°, 3°, \cdots\cdots$ 等計算長($a=12$)爲一定的竿的陰影的長的餘切表。

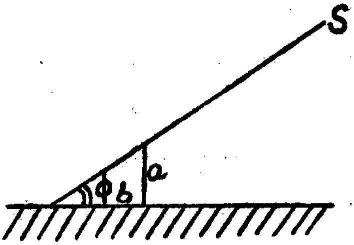

圖 2

$$b=a\frac{\cos\phi}{\sin\phi}=a\,\mathrm{ctg}\phi。$$

火魯筀（現在伊朗的一個行省）的阿布-里-瓦凡（940—998），他曾編著類似的"正切表"，卽計算在豎牆上（圖 3）長爲一定($a=60$)的水平竿的投影的長。

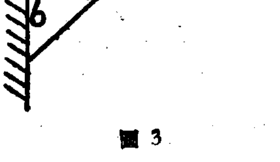

圖 3

$$b=a\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=a\cdot\mathrm{tg}\phi。$$

阿布-里-瓦凡給出了三角學中正切線的正確幾何定義，他在正切線和餘切線之外，還發現了正割和餘割。他曾在口頭上提出了所有三角函數之間的代數關係式，特別是，當圓半徑等於 1 的情形。

十五世紀著名的烏茲別克天文學家烏魯別克（1394—

1449)給出了一種精確的求 sin 1° 的方法。他曾編著一種從0°到45°每相隔1°和45°到90°每相隔5°的正弦和正切表，以及每相隔1°的餘切表，其中正弦的數值表準確到小數第九位。

在歐洲把餘切和正切引入三角學計算中的第一個人是十四世紀的英國學者布拉德衛丁(1290—1349)，而第一本有系統的三角學則係德國學者約翰·米勒在十五世紀以筆名列基蒙塔所發表的五卷關於三角學的有系統的論文"論各種三角形"。在這個著作中三角學是被作爲一門獨立的而不從屬於天文學的科目而敍述的。

十六世紀的法蘭西代數學家法蘭蘇阿·韋達(1540—1603)開始以文字符號表示三角公式，後來，更有許多學者致力於三角學的研究，如納伯爾(對數發明者)、棣美弗(1667—1754)、包傑諾特，以及天才的彼得堡科學院士尤拉(1707—1783)等，而尤拉應推爲三角函數近代理論的創始人。

尤拉在他自己的著作"分析引論"中，把三角學進行了解析的敍述，從不多的一些基本公式推出所有的三角公式。他提出三角函數是表示對應的三角線與圓半徑之比值的數，把三角函數引入了代數的領域。

尤拉用小寫拉丁字母 a,b,c 表示三角形的邊，用大寫字母 A,B,C 表示它們的對角，大大地簡化了三角公式，並給定各象限中函數符號的法則，得出一般的誘導公式，訂正了三角學中的許多錯誤。

所以具有近代形式的三角，還不過二百年左右。

談到三角的起源，在西洋不過是公元後的事，但是我國則在公元前幾世紀已知根據相似三角形比例，用類似三角的方法來解決測量的問題。可惜在三國以後竟沒有人再繼續研究，於是就把發明三角術的榮譽讓給西洋人了。

“周髀”是我國最早的一部天文測量的書，著作年月根據內容推測，大概在西漢末年(公元第一世紀)，“周髀”內載有陳子應用相似三角形比例測量太陽的高、遠、星宿的行度等法則。

三國時代(公元第三世紀)魏劉徽在“九章算術”的序文裏說：“凡測高而欲兼知其遠的，必須用兩表。”表就是竿，用同樣長的兩根直立在地面，就能測海島的高遠。劉徽著“海島算經”用重差法解測量問題，雖不用三角函數，但能直接度量相似直角三角形的兩邊，用其比值代替三角函數，這與用近代三角學來解無甚差別。所以我們說：中國的重差術是歐洲三角術的嚆矢。

劉徽、祖沖之等又利用勾股定理來計算圓的弦、矢與半徑的關係(矢就是弦與對弧所成弓形的高)，研究的內容就更接近於現代三角函數的內容了。

重差術起源於“周髀”，至魏劉徽而完備。劉徽還撰有“九章重差圖”一卷，可惜早已失傳，後人只知其法，不知其理。宋楊輝、元朱世傑、明顧應祥等人所著的書中雖引海島問題，但都不詳備，又無闡發，大概“海島算經”一書，已經殘缺不全了。清乾隆間戴震修“四庫全書”，於是重差術全篇才得重傳於世。後來李潢作“海島算經細草圖說”，應用相似形比例加以證明，

世人才知道重差術的原理，與歐西的三角術實際上是沒有什麼兩樣的。

函數概念

前面已經講過，三角學的主要內容之一是關於三角函數性質的研究。所以在學習三角時，首先要把函數的意義及有關函數的一些名詞解釋清楚，這樣，才能保證循序漸進的學習，為研究三角函數打好基礎。

我們研究某些問題時，所遇到的量可分為兩類，即常量和變量。

所謂**常量，就是在整個研究過程中，保持一定值的量**，而**變量，則在研究過程中，可以取不同值的量**。例如，任意圓的圓周長和它直徑的比等於π(圓周率)，是一個常量。任意正方形對角線的長和它的邊長的比等於$\sqrt{2}$，它是永遠不變的，所以也是一個常量。

通常用$a,b,c,\cdots\cdots$表示常量，用$x,y,z,\cdots\cdots$表示變量。

變量可以取的值，有時並沒有什麼限制，但有時受一定條件的限制。如果變量x的所有值都包含在a,b兩實數之間(其中$b>a$)並包括a,b兩數在內，則變量x叫做在閉區間$[a,b]$上變化，可用下列不等式：

$a\leq x\leq b$ 表示之。

如果變量所取的值不包括a,b兩數在內，則變量x叫做在開區間(a,b)上變化，並用下列不等式：

$a<x<b$ 表示之。

函數的一般概念是這樣敍述的：**如果當一變量 (x) 取定一值之後，由於某些情況，我們已不能對另一變量 (y) 給以任意的值。就是說，如果對於一個變量是所取定的值，另外一個變量有一個或幾個確定的值與它對應，則後者 (y) 叫做前者 (x) 的函數，而前者 (x) 叫做此函數的自變量。**

例如：

$$y=2x-1,$$

$$y=\sqrt{x+2},$$

$$y=x^2+1,$$

上列各式，都是 x 的不同的函數。

例如，討論上列第一個函數，便有：

當 $x=-3$ 時， $y=-7$，

當 $x=-2$ 時， $y=-5$，

當 $x=-1$ 時， $y=-3$，

當 $x=0$ 時， $y=-1$，

當 $x=1$ 時， $y=1$，

當 $x=2$ 時， $y=3$，

同樣的，我們也可以說正方形的面積 A 是它的邊 x 的函數，即 $A=x^2$

直角三角形的一隻銳角 A 是另外一銳角 B 的函數，即 $A=90^\circ-B$

我們已經知道 x 和 y 的關係，但是，並不需要把這個關係詳細表示出來，而只需要表示出 x 和 y 間的關係的存在，在這種情形下，可用下面的記號：

$$y=f(x), \qquad y=F(x), \qquad y=\phi(x),$$

其中不同的字母 f, F, ϕ 等等是表示 x 和 y 間的關係的不同形式，即 x 的不同函數。

例如用 $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ 三個記號來表示前例所引入的函數，則可以寫成：

$$f(x)=2x-1,$$

$$F(x)=x^2+1,$$

函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 或 $x=b$ 時的值用記號

$$f(a), f(b), \cdots\cdots \text{等等}$$

表示，即 $f(a)$是函數 $f(x)$在$x=a$ 時的特殊值。

在上述例子

$$f(x)=2x-1$$

中第二行的數就是表示函數對於x值的特殊值：$f(-3)=-7$, $f(-2)=-5$, $f(-1)=-3$, $f(0)=-1$, $f(1)=1$ 等。

爲方便起見可將自變量的值和它對應的函數的特殊值排成下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=f(x)$	-7	-5	-3	-1	1	3	5

這裏需要特別注意的是函數的特殊值，不一定能够得到，有時函數的特殊值並不存在。

例如 $f(x)=\sqrt{x+2}$, 則當 $x<-2$ 時，因爲二次方根內不能爲負值，在實數域內這個函數的特殊值如〔$f(-3)$〕不存在。同理對於下列函數

$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$， 因爲分母不能爲 0，所以 $f(1)$ 是不存在的。

能使函數的特殊值存在的自變量值的全體叫做函數的存在域或叫函數的定義域。

例如 (1) $f(x)=2x-1$，

函數 $f(x)$ 的定義域是實數集合，

(2) $F(x)=\sqrt{x+2}$，

函數 $F(x)$ 的定義域是等於或大於 -2 的實數集合

即 $x\geq -2$，

(3)直角三角形的脫角是 A 和 B，則

$$A=90°-B$$

函數 A 的定義域是所有銳角

即 $0°<B<90°$，

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$，

函數 $f(x)$ 的定義域是除 2 及 -2 以外的實數集合

即 $x\neq 2$ 或 -2。

當 $y=f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 間任意取兩自變數 x_1, x_2。

當 $x_1<x_2$ 時，而有 $f(x_1)<f(x_2)$，這樣，

$y=f(x)$ 叫做在區間 $[a,b]$ 的**單調增函數**(圖 4)，反之當 $x_1<x_2$ 時，而有 $f(x_1)>f(x_2)$，這樣，

$y=f(x)$ 叫做在區間 $[a,b]$ 的**單調減函數**(圖 5)。

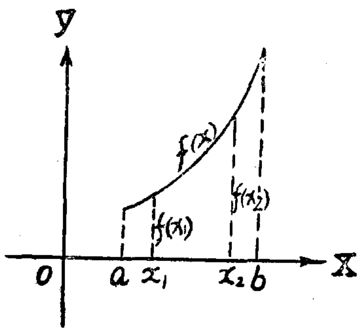

圖 4

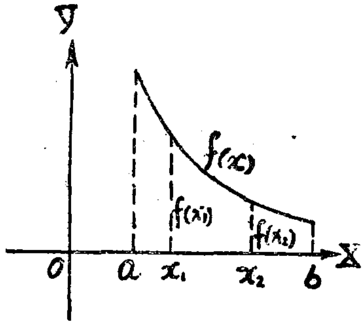

圖 5

也有在〔a,b〕區間內，有時增加，有時減少的叫做在區間〔a,b〕的**非單調函數**(圖 6)。

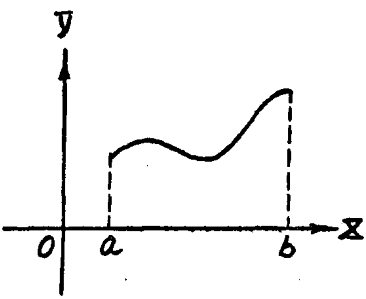

圖 6

初等函數**分代數函數與超越函數**兩類，代數函數是**“凡是對自變量（x）作有限次代數運算，便可求出函數值的那種函數，叫做代數函數。”**

所謂代數運算是“加、減、乘、除、冪指數爲有理數的乘方。”

例如　$y=2x-1$；　$y=\sqrt{x+2}$ 等都是代數函數。

矢量和射影

在初等幾何裏研究線段只講長度（用單位尺度測量出來的數值），不注意線段的起點和終點，但在研究三角時，因三角