大学数学辅导

DAXUE SHUXUE FUDAO

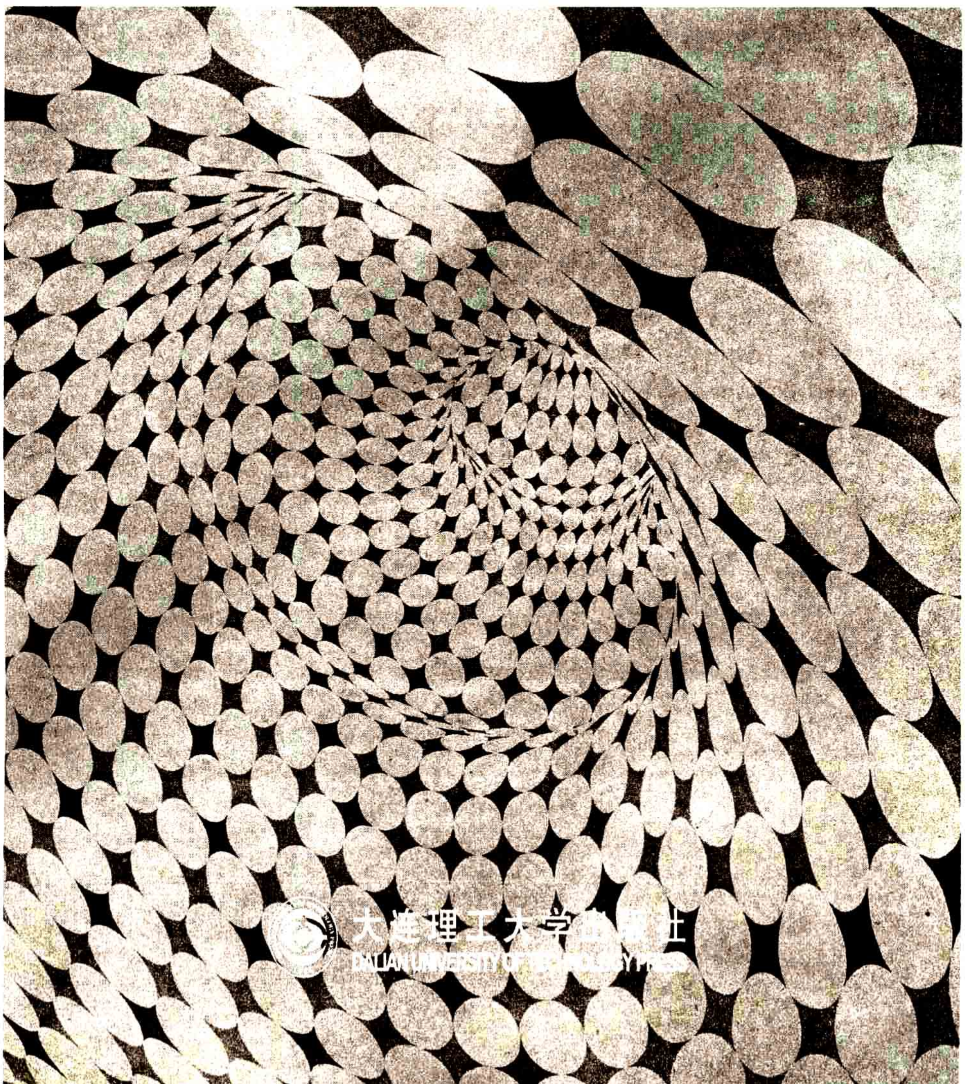
李　林　冯敬海　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

大学数学辅导

DAXUE SHUXUE FUDAO

李　林　冯敬海　编著



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学数学辅导/李林，冯敬海编著. —大连：大连理工大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-5611-4310-0

Ⅰ.大… Ⅱ.①李…②冯… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第104368号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路80号 邮政编码：116023
发行：0411-84708842 传真：0411-84701466 邮购：0411-84703636
E-mail：dutp@dutp.cn URL：http://www.dutp.cn
大连华伟印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm 印张：26 字数：600千字
2008年7月第1版 2008年7月第1次印刷

责任编辑：梁 锋 王 伟 责任校对：婕 琳
封面设计：宋 蕾

ISBN 978-7-5611-4310-0 定 价：48.00元

前　言

《大学数学辅导》是为备考全国硕士研究生数学考试而编写的辅导书，也可作为本科非数学类专业的学生的参考用书。

硕士研究生入学考试是一种选拔性考试，命题以考试大纲为依据，强调在考查知识的基础上，重点考查考生的分析问题和解决实际问题的能力，旨在帮助考生理解数学原理，掌握解题方法，从而提高应试能力。

本书由内容与方法提要、典型例题分析两部分构成，具有以下特点：

1. 全面介绍考试大纲要求的内容与方法，以及理解概念和掌握方法应注意的问题。

2. 典型例题分析力求典型和全面，通过对典型题目的透彻分析与解答，点击题目要领，展示解题思路，透视考题结构。对题目的条件与结论之间进行逻辑关系的解剖，理清解题思路。

3. 按照教育部考试中心制定的《数学考试大纲》，数学一、数学二、数学三、数学四有不同要求。本书在各章节中分别作出标明，考生可按不同要求复习。

本书主要参考了同济大学的《高等数学》(五版)，上海交通大学的《高等数学试题解析》，大连理工大学的《工科微积分》。

限于编者水平有限，加之时间仓促，书中的缺点和不足在所难免，敬请读者与同行批评指正。

编　者

2008.7

目　录

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

高等数学

第1章　函数　极限　连续

1.1　函　数

内容与方法提要

1. 函数是一种“对应”

函数的运算:加、减、乘、除、复合。其中函数的复合是考点之一,求函数的复合表达式常用代入法。

2. 函数的性质

(1)奇偶性:主要考查奇偶性定义及函数求导和积分后的奇偶性。

①$f(x)$为可导的奇函数(偶函数)$\Rightarrow f'(x)$是偶函数(奇函数)。

②$f(x)$为连续的奇函数(偶函数)$\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数(奇函数)。

说明

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)$$

$$=\begin{cases}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x) & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时}\\ -\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x) & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时}\end{cases}$$

(2)有界性

①$f(x)$在$[a,b]$上连续$\Rightarrow f(x)$在$[a,b]$上有界。

②$f(x)$在(a,b)内连续,且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$均存在$\Rightarrow f(x)$在$(a,b)$内有界。

说明　由$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$均存在,根据极限的局部有界性有,$f(x)$在$(a,a+\delta_1)$与$(b-\delta_2,b)(\delta_1>0,\delta_2>0)$内均有界。而$f(x)$在$[a+\delta_1,b-\delta_2]$内连续,所以必有界。

(3)周期性

设$f(x)$以T为周期,即$f(x+T)=f(x)$。

①若$f(x)$可导,则$f'(x)$与$f(x)$是有相同的周期。

②$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$不一定是周期函数。

说明　周期函数的积分不一定是周期函数。例如,$\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=\sin x$是周期函数,但$\int_0^x(\cos t+C)\mathrm{d}t=\sin x+Cx$不是周期函数。

(4)单调性

①定义：对 $f(x)$ 的定义域内任意两点 $x_1<x_2(x_1>x_2)$，有 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$ 则称 $f(x)$ 是单调增加(减少)。

②若 $f'(x)>0(<0)$，则 $f(x)$ 单调增加(减少)。

典型例题分析

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$______。

解析　用代入法得

$$f[f(x)]=\begin{cases}1 & |f(x)|\leqslant 1\\ 0 & |f(x)|>1\end{cases}，故\ f[f(x)]=1\quad(-\infty<x<+\infty)$$

【例 2】 设 $f(x)$ 连续，则下列函数必为偶函数的为(　　)。

A. $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$　　B. $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　D. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

解析　由 $f(t)+f(-t)$ 是偶函数知 $t[f(t)+f(-t)]$ 是奇函数。所以，$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$ 是偶函数，故 D 正确。

评注　若 $f(x)$ 为连续的偶函数，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不一定是奇函数 $(a\neq 0)$。

【例 3】 设 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0,f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有(　　)。

A. $f'(x)<0,f''(x)<0$　　B. $f'(x)<0,f''(x)>0$

C. $f'(x)>0,f''(x)<0$　　D. $f'(x)>0,f''(x)>0$

解析　由已知，$f(x)$ 为奇函数、则 $f'(x)$ 是偶函数、$f''(x)$ 是奇函数。由 $f'(x)>0,x\in(0,+\infty)$，得 $f'(x)>0,x\in(-\infty,0)$。由 $f''(x)>0,x\in(0,+\infty)$，得 $f''(x)<0,x\in(-\infty,0)$。故 C 正确。

【例 4】 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在哪个区间上有界。

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

解析　此例要判别 $f(x)$ 在开区间上有界，考虑 $f(x)$ 在开区间两个端点的极限。

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(-x)\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin(-3)}{(-2)\cdot(-3)^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin(-2)}{(-1)\cdot(-2)^2}$$

又 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内连续，所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界，故 A 正确。

【例 5】 以下四个命题中正确的是(　　)。

A. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

B. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

C. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

D. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

解析　讨论 $f'(x)$ 在某区间内的有界与 $f(x)$ 有界的关系，用拉格朗日中值定理。

若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则存在 $M>0$，对 $x\in(0,1)$，有 $|f'(x)|\leqslant M$。任取 $x_0\in(0,1)$，由拉格朗日中值定理，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\quad(\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|\leqslant|f(x_0)|+M$$

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，所以 C 正确。

【例 6】　设 $f(x)$ 有二阶导数，且 $f(x)=-f(-x)$，$f(x)=f(x+1)$，$f'(1)>0$，则（　　）。

A. $f''(-5)\leqslant f'(-5)\leqslant f(-5)$　　　　B. $f(-5)=f''(-5)<f'(-5)$

C. $f'(-5)\leqslant f(-5)\leqslant f''(-5)$　　　　D. $f(-5)<f'(-5)=f''(-5)$

解析　由已知，$f(x)$ 以 1 为周期，故 $f'(x)$，$f''(x)$ 均是以 1 为周期，又 $f(x)$ 是奇函数，所以

$$f(-5)=f(-5+5)=f(0)=0$$
$$f'(-5)=f'(-5+6)=f'(1)>0$$
$$f''(-5)=f''(-5+5)=f''(0)=0$$

这里 $f'(x)$ 为偶函数，$f''(x)$ 为奇函数，所以，$f''(0)=0$，故 B 正确。

【例 7】　设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）。

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数

解析　当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数。故 A 正确。

当 $f(x)$ 是偶函数，且 $a=0$ 时，$F(x)$ 才是奇函数，所以 B 不正确。

对于 C，设 $f(x+T)=f(x)$，则

$$\begin{aligned}F(x+T)-F(x)&=\int_a^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

而

$$\int_T^{x+T}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=u+T}\int_0^x f(u+T)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

$$\int_a^T f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$F(x+T)-F(x)=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

于是 $F(x)$ 以 T 为周期的充要条件是$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$。

对于 D 显然不正确。例如 $f(x)=x$ 为单调增加，$F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2$ 不单调。

【例 8】 设 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b(a<b)$ 对称，证明 $f(x)$ 是周期为 $2(b-a)$ 的周期函数。

证 $y=f(x)$ 的图形关于 $x=a$ 与 $x=b$ 对称，则对任意 x 有

$$f(a+x)=f(a-x),\quad f(b+x)=f(b-x)$$

于是

$$\begin{aligned}f(x+2(b-a))&=f(b+(x+b-2a))\\&=f(b-(x+b-2a))\\&=f(a+(a-x))\\&=f(a-(a-x))=f(x)\end{aligned}$$

故 $2(b-a)$ 是 $f(x)$ 的周期。

【例 9】 设 $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上，$x_1>0,x_2>0$，且$\frac{f(x)}{x}$单调减少，证明

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$$

证 不妨设 $x_1<x_2$，依题设有$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}$，所以，

$$x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$$

由

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}$$

得

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)$$

故

$$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$$

所以有

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$$

评注 本例中若$\frac{f(x)}{x}$单调增加，其他条件不变，可证明 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$。

【例 10】 设 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 可导 $(a>0)$，$f(0)=0$，$f'(x)$ 单调增加，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，证明 $F(x)$ 在 $(0,a)$ 内也单调增加。

证 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}$

$$=\frac{xf'(x)-f'(\xi)x}{x^2}=\frac{x[f'(x)-f'(\xi)]}{x^2}\geqslant 0 \quad (0<\xi<x)$$

其中

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$$

故 $F(x)$在$(0,a)$内单调增加。

1.2　函数极限

内容与方法提要

1. 定义

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当 }0<|x-x_0|<\delta\text{ 时},|f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X>0,\text{使当}|x|>X\text{ 时},|f(x)-A|<\varepsilon$$

2. 极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

3. 极限四则运算法则

设$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim f(x)g(x)=AB,\quad \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0)$$

4. 极限的复合函数运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,且在$\mathring{U}(x_0)$内 $\varphi(x)\neq u_0$,$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

说明　复合函数运算法则是变量替换法求极限的依据。

5. 极限的性质

(1)唯一性:若$\lim f(x)=A$,则 A 必唯一。

(2)有界性:若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有$|f(x)|\leqslant M$。

(3)保号性:若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(<0)$,则必$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$f(x)>0(<0)$$

(4)保序性:若 $f(x)>g(x)(f(x)<g(x))$且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都存在,则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim_{x\to x_0}g(x)\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim_{x\to x_0}g(x)\right)$$

说明　以上性质对 $x\to\infty$及对数列极限也成立。

6. 无穷小量

(1)定义:若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称 $f(x)$是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量。

(2)无穷小的运算性质：

①有限个无穷小之和为无穷小；

②有界函数与无穷小的积为无穷小；

③极限与无穷小的关系：

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,其中$\alpha$为$x\to x_0$时的无穷小量。

(3)无穷小的比较：

设α和β是相同变化趋势下的无穷小量。

若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$,则称$\alpha$较$\beta$高阶无穷小,记为$\alpha=o(\beta)$。

若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$,则称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小,记为$\alpha\sim\beta$。

若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=C\neq0$,则称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小。

若$\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=C\neq0$,则称$\alpha$是$\beta$的$k$阶无穷小,其中$k$为正整数。

若$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称$\alpha$较$\beta$低阶无穷小。

(4)等价无穷小替换定理：

若$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$。

7. 无穷大量

(1)定义：对$\forall M>0$,$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$,有$|f(x)|>M$,则称$f(x)$是当$x\to x_0$时的无穷大量。

(2)无穷大量与无穷小量的关系：

若$\lim f(x)=0(f(x)\neq0)$,则$\lim\frac{1}{f(x)}=\infty$。

8. 两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$　　(2)$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$。

典型例题分析

题型一　利用重要极限求极限

【例11】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$。

解法1 利用重要极限。

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}}$$

由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=1\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

故

$$原式=e^{\frac{1}{2}}$$

解法2 利用幂指函数 $u^v=e^{v\ln u}$。

$$原式=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)}$$

由

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}=\frac{1}{2}$$

故

$$原式=e^{\frac{1}{2}}$$

评注 这里利用了 $\ln(1+u)\sim u(u\to 0)$。

【例12】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)^x$。

解析 利用重要极限。

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}$$

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=1$，故原式 $=e$。

【例13】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$。

解析 利用重要极限。

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}\cdot\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\cdot n}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot n}{1-\tan\frac{1}{n}}=2$$

故

$$原式=e^2$$

评注　这里利用了 $\tan\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$。

▶题型二　左、右极限◀

分段函数在分界点处的极限用左、右极限求之。另外绝对值函数，$\frac{1}{x}(x\to0^-,x\to0^+)$，$\arctan x(x\to\pm\infty)$，$e^x(x\to\pm\infty)$常用左、右极限求之。

【例 14】　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin a(e^x-1)}{e^x-1} & x<0\\ \dfrac{2(e^{ax}-1)}{\ln(1+2x)} & x>0\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

解析

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin a(e^x-1)}{e^x-1}=a$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2(e^{ax}-1)}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot ax}{2x}=a$$

故

$$\lim_{x\to0}f(x)=a$$

评注　这里利用了 $\sin a(e^x-1)\sim a(e^x-1)$，$\ln(1+2x)\sim2x$，$e^x-1\sim x(x\to0)$。

【例 15】　求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$。

解析

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

故原式=1。

评注　$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$。

【例 16】　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-\frac{2}{\pi}x\arctan x}{e^x+x}$。

解析　当 $x\to+\infty$时，$\arctan x\to\frac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$时，$\arctan x\to-\frac{\pi}{2}$。