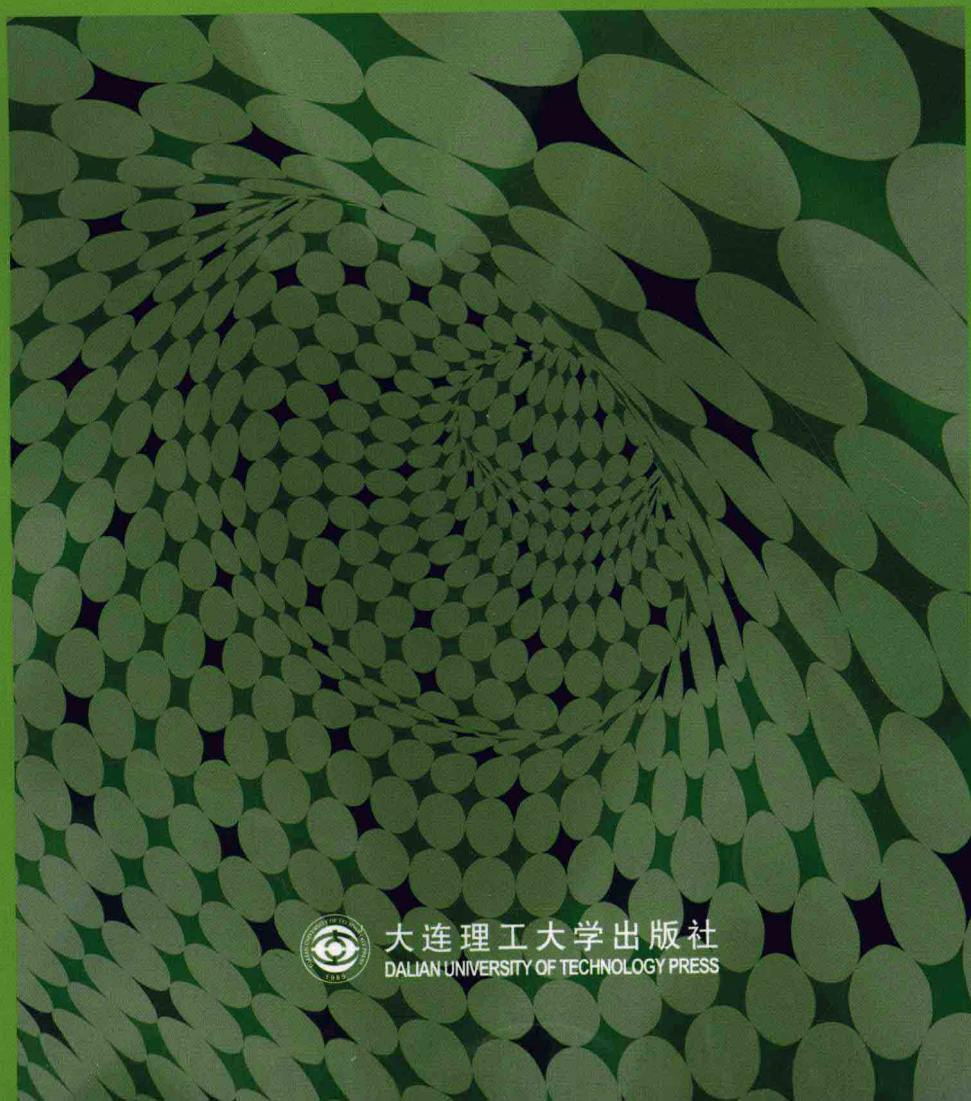


大学数学辅导

DAXUE SHUXUE FUDAO

李 林 冯敬海 编著



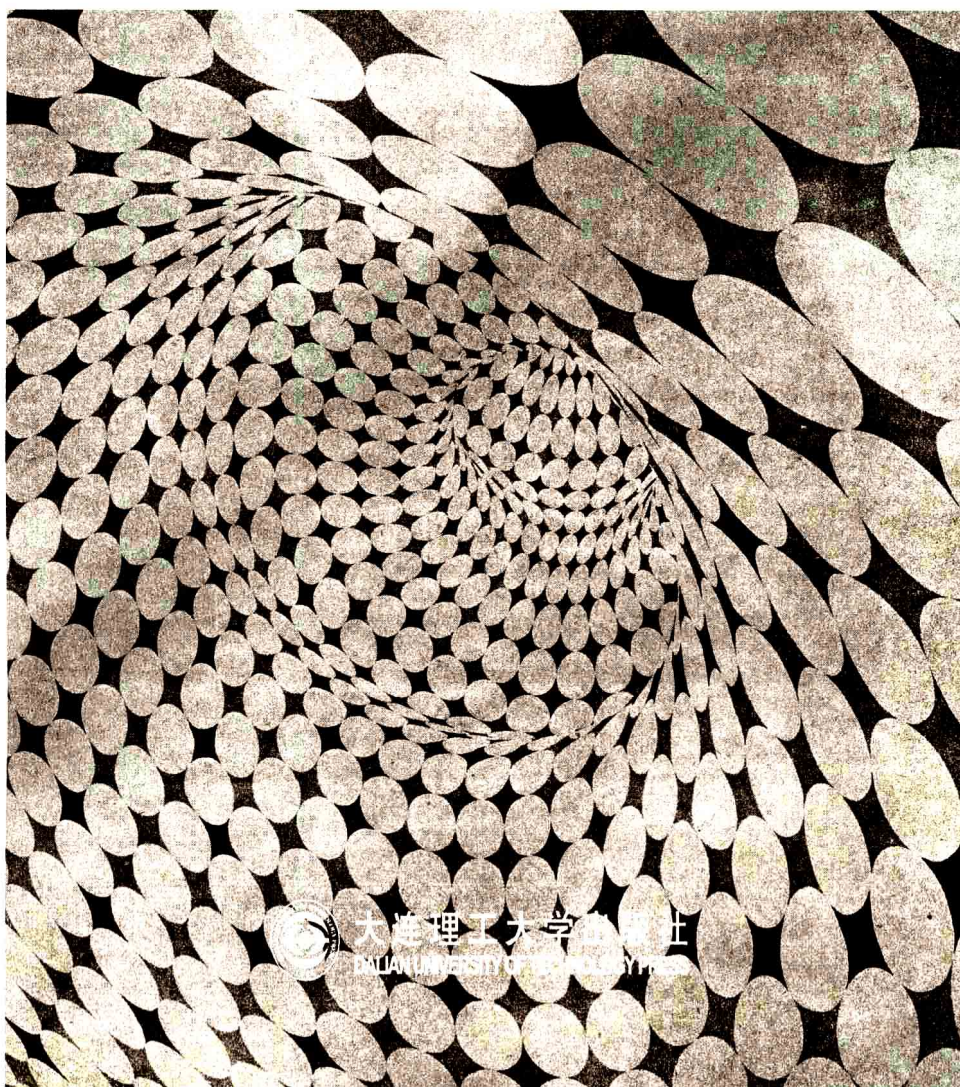
大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



大学数学辅导

DAXUE SHUXUE FUDAO

李 林 冯敬海 编著



图书在版编目(CIP)数据

大学数学辅导/李林,冯敬海编著. —大连:大连理工大学出版社,2008.7

ISBN 978-7-5611-4310-0

I. 大… II. ①李…②冯… III. 高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 104368 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84703636

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连华伟印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm	印张:26	字数:600 千字
2008 年 7 月第 1 版	2008 年 7 月第 1 次印刷	

责任编辑:梁 锋 王 伟	责任校对:婕 琳
封面设计:宋 蕾	

ISBN 978-7-5611-4310-0

定 价:48.00 元

前 言

《大学数学辅导》是为备考全国硕士研究生数学考试而编写的辅导书,也可作为本科非数学类专业的学生的参考用书。

硕士研究生入学考试是一种选拔性考试,命题以考试大纲为依据,强调在考查知识的基础上,重点考查考生的分析问题和解决实际问题的能力,旨在帮助考生理解数学原理,掌握解题方法,从而提高应试能力。

本书由内容与方法提要、典型例题分析两部分构成,具有以下特点:

1. 全面介绍考试大纲要求的内容与方法,以及理解概念和掌握方法应注意的问题。
2. 典型例题分析力求典型和全面,通过对典型题目的透彻分析与解答,点击题目要领,展示解题思路,透视考题结构。对题目的条件与结论之间进行逻辑关系的解剖,理清解题思路。
3. 按照教育部考试中心制定的《数学考试大纲》,数学一、数学二、数学三、数学四有不同要求。本书在各章节中分别作出标明,考生可按不同要求复习。

本书主要参考了同济大学的《高等数学》(五版),上海交通大学的《高等数学试题解析》,大连理工大学的《工科微积分》。

限于编者水平有限,加之时间仓促,书中的缺点和不足在所难免,敬请读者与同行批评指正。

编 者

2008.7

目 录

高等数学

第1章 函数 极限 连续 / 1

1.1 函 数 / 1

内容与方法提要 / 1 典型例题分析 / 2

1.2 函数极限 / 5

内容与方法提要 / 5 典型例题分析 / 6

题型一 利用重要极限求极限 / 6

题型二 左、右极限 / 8

题型三 利用理化求极限 / 9

题型四 利用等价无穷小替换求极限 / 9

题型五 洛必达法则 / 10

题型六 无穷小量的比较 / 11

题型七 已知极限, 确定参数或求另一

函数极限 / 11

1.3 数列极限 / 12

内容与方法提要 / 12 典型例题分析 / 13

1.4 连续性 / 15

内容与方法提要 / 15 典型例题分析 / 16

第2章 一元函数微分学 / 20

2.1 导数与微分的定义 / 20

内容与方法提要 / 20 典型例题分析 / 20

题型一 导数定义 / 20

题型二 利用导数定义求导 / 23

2.2 可导性的几个结论 / 25

内容与方法提要 / 25 典型例题分析 / 26

2.3 导数与微分的计算 / 27

内容与方法提要 / 27 典型例题分析 / 27

2.4 微分中值定理——罗尔定理 / 30

内容与方法提要 / 30 典型例题分析 / 31

2.5 微分中值定理——拉格朗日中值定理 / 35

内容与方法提要 / 35 典型例题分析 / 36

2.6 微分中值定理——柯西中值定理 / 39

内容与方法提要 / 39 典型例题分析 / 39

2.7 泰勒公式 / 41

内容与方法提要 / 41 典型例题分析 / 42

2.8 导数的应用 / 47

内容与方法提要 / 47 典型例题分析 / 48

题型一 证明不等式 / 48

题型二 利用导数讨论函数的性态 / 50

2.9 讨论方程的实根 / 57

内容与方法提要 / 57 典型例题分析 / 57

第3章 一元函数积分学 / 59

3.1 原函数的性质及重要定理 / 59

内容与方法提要 / 59 典型例题分析 / 61

3.2 积分变限函数的求导 / 63

内容与方法提要 / 63 典型例题分析 / 64

3.3 对称区间上的积分 / 66

内容与方法提要 / 66 典型例题分析 / 67

3.4 积分计算的分部积分法与换元法 / 69

内容与方法提要 / 69 典型例题分析 / 70

题型一 换元法 / 70

题型二 分部积分法 / 71

题型三 积分法的综合应用 / 72

题型四 分段函数、绝对值、周期函数

的积分 / 76

3.5 积分等式和不等式的证明 / 79

内容与方法提要 / 79 典型例题分析 / 80

3.6 广义积分 / 83

内容与方法提要 / 83 典型例题分析 / 83

3.7 定积分的应用 / 85

内容与方法提要 / 85 典型例题分析 / 86

题型一 几何上的应用 / 86

题型二 物理上的应用 / 91

3.8 微积分在经济学中的应用 / 92

内容与方法提要 / 92 典型例题分析 / 94

第4章 向量代数与空间解析几何 / 97

内容与方法提要 / 97 典型例题分析 / 100

第5章 多元函数微分学 / 103

5.1 基本概念 / 103

内容与方法提要 / 103 典型例题分析 / 104

- 5.2 复合函数微分法 / 107
 内容与提要 / 107 典型例题分析 / 108
- 5.3 隐函数微分法 / 110
 内容与提要 / 110 典型例题分析 / 111
- 5.4 极值与最值 / 114
 内容与提要 / 114 典型例题分析 / 114
- 5.5 多元函数微分法的几何应用 / 120
 内容与提要 / 120 典型例题分析 / 121
- 5.6 方向导数与梯度 / 121
 内容与提要 / 121 典型例题分析 / 122

第6章 多元函数积分学 / 125

- 6.1 二重积分 / 125
 内容与提要 / 125 典型例题分析 / 126
 题型一 交换积分顺序 / 126
 题型二 直角坐标下二重积分的计算 / 128
 题型三 极坐标下二重积分的计算 / 128
 题型四 利用对称性计算二重积分 / 129
 题型五 分区域积分 / 131
 题型六 某些特殊类型的二重积分 / 133
- 6.2 三重积分 / 135
 内容与提要 / 135 典型例题分析 / 136
 题型一 直角坐标下三重积分的计算 / 136
 题型二 柱面坐标与球面坐标下三重积分的计算 / 137
 题型三 利用对称性计算三重积分 / 138
- 6.3 第一型曲线积分 / 140
 内容与提要 / 140 典型例题分析 / 141
- 6.4 第一型曲面积分 / 142
 内容与提要 / 142 典型例题分析 / 143
- 6.5 重积分与第一型曲线、曲面积分的应用 / 146
 内容与提要 / 146 典型例题分析 / 147
- 6.6 第二型曲线积分 / 152
 内容与提要 / 152 典型例题分析 / 153
 题型一 利用计算公式求第二型曲线积分 / 153
 题型二 利用格林公式求第二型曲线积分 / 154
 题型三 积分与路径无关 / 156

- 6.7 第二型曲面积分 / 161
 内容与提要 / 161 典型例题分析 / 162
 题型一 第二型曲面积分的有关计算 / 162
 题型二 曲线积分、曲面积分综合题 / 165

第7章 常微分方程 / 167

- 7.1 几类一阶方程 / 167
 内容与提要 / 167 典型例题分析 / 168
- 7.2 可降阶的高阶方程 / 171
 内容与提要 / 171 典型例题分析 / 171
- 7.3 线性微分方程 / 173
 内容与提要 / 173 典型例题分析 / 174
 题型一 线性方程解的性质与结构 / 174
 题型二 常系数线性方程 / 175
- 7.4 利用变量替换化简方程 / 177
 内容与提要 / 177 典型例题分析 / 177
- 7.5 微分方程的应用 / 179
 内容与提要 / 179 典型例题分析 / 180
- 7.6 差分方程 / 183
 内容与提要 / 183 典型例题分析 / 184

第8章 无穷级数 / 185

- 8.1 数项级数 / 185
 内容与提要 / 185 典型例题分析 / 187
 题型一 有关级数敛散性的概念 / 187
 题型二 正项级数的敛散性 / 189
 题型三 条件收敛, 绝对收敛 / 191
- 8.2 幂级数 / 193
 内容与提要 / 193 典型例题分析 / 194
 题型一 求收敛半径和收敛域 / 194
 题型二 求幂级数的和函数 / 196
 题型三 求常数项级数的和 / 198
 题型四 幂级数和函数与微分方程综合题 / 199
 题型五 函数展为幂级数 / 200
- 8.3 傅立叶级数 / 202
 内容与提要 / 202 典型例题分析 / 203
 题型一 求 $f(x)$ 傅立叶级数和函数 $S(x)$ / 203
 题型二 求函数的傅立叶级数 / 203

线性代数

第1章 行列式 / 205

内容与提要 / 205 典型例题分析 / 207

- 题型一 数字型行列式 / 207
- 题型二 利用行列式的性质及相似矩阵
计算行列式 / 208
- 题型三 含参数的行列式计算 / 210
- 题型四 证明 $|A|=0$ / 213

第2章 矩 阵 / 214

- 2.1 矩阵的运算 / 214
 - 内容与方法提要 / 214 典型例题分析 / 215
 - 题型一 $r(A)=1$, 求 A^n / 215
 - 题型二 利用 $A \sim B$, 求 A^n / 216
 - 题型三 求 A^n / 217
- 2.2 可逆矩阵 / 218
 - 内容与方法提要 / 218 典型例题分析 / 218
 - 题型一 利用可逆定义求逆矩阵 / 218
 - 题型二 证明矩阵可逆 / 220
 - 题型三 用伴随阵求逆矩阵 / 221
- 2.3 初等变换与初等矩阵 / 222
 - 内容与方法提要 / 222 典型例题分析 / 223
- 2.4 矩阵的秩 / 224
 - 内容与方法提要 / 224 典型例题分析 / 225
- 2.5 矩阵方程 / 226
 - 内容与方法提要 / 226 典型例题分析 / 226

第3章 向 量 / 229

- 3.1 向量及其运算 / 229
 - 内容与方法提要 / 229 典型例题分析 / 230
- 3.2 线性相关 / 230
 - 内容与方法提要 / 230 典型例题分析 / 231
- 3.3 线性无关 / 232
 - 内容与方法提要 / 232 典型例题分析 / 233
- 3.4 有关相关性的几个结论 / 236
 - 内容与方法提要 / 236 典型例题分析 / 238
- 3.5 线性表示 / 239
 - 内容与方法提要 / 239 典型例题分析 / 240
- 3.6 向量空间 / 242
 - 内容与方法提要 / 242 典型例题分析 / 243
 - 题型一 基与坐标 / 243
 - 题型二 过渡矩阵 / 244

第4章 线性方程组 / 245

- 4.1 线性方程解的判别 / 245
 - 内容与方法提要 / 245 典型例题分析 / 246
 - 题型一 方程组的表达形式 / 246
 - 题型二 方程组解的判别 / 247
 - 题型三 有关基础解的证明 / 250
 - 题型四 抽象方程组讨论 / 251
 - 题型五 已知解, 求方程组 / 253
- 4.2 含参数的方程组讨论 / 254
 - 内容与方法提要 / 254 典型例题分析 / 254
- 4.3 两个方程组的公共解与同解问题 / 258
 - 内容与方法提要 / 258 典型例题分析 / 258
 - 题型一 公共解讨论 / 258
 - 题型二 同解讨论 / 259

第5章 矩阵的特征值与特征向量 / 260

- 5.1 特征值与特征向量 / 260
 - 内容与方法提要 / 260 典型例题分析 / 261
 - 题型一 求特征值与特征向量 / 261
 - 题型二 特征值与特征向量的有关证明 / 263
 - 题型三 判别矩阵相似 / 264
 - 题型四 利用相似讨论行列式或
矩阵的秩 / 266
- 5.2 矩阵运算对特征值与特征向量的
影响 / 267
 - 内容与方法提要 / 267 典型例题分析 / 268
- 5.3 实对称矩阵 / 270
 - 内容与方法提要 / 270 典型例题分析 / 271
- 5.4 确定矩阵中的参数 / 276
 - 内容与方法提要 / 276 典型例题分析 / 276

第6章 二次型 / 281

- 6.1 二次型的概念及其标准形 / 281
 - 内容与方法提要 / 281 典型例题分析 / 282
 - 题型一 化二次型为标准形 / 282
 - 题型二 合同与相似 / 288
- 6.2 正交二次型与正定矩阵 / 289
 - 内容与方法提要 / 289 典型例题分析 / 290
 - 题型一 正定的判别 / 290
 - 题型二 证明矩阵正定 / 291

概率论与数理统计

第1章 随机事件及其概率 / 294

- 1.1 随机事件及其运算 / 294

内容与方法提要/ 294 典型例题分析/ 295

1.2 概率的定义及其计算/ 296

内容与方法提要/ 296 典型例题分析/ 297

题型一 古典概型的摸球问题/ 297

题型二 随机入盒问题/ 297

题型三 随机取数问题/ 298

题型四 几何概型/ 299

1.3 概率计算公式/ 300

内容与方法提要/ 300 典型例题分析/ 301

题型一 加法公式与求逆公式的

应用/ 301

题型二 乘法公式及条件概率的有关

应用/ 302

题型三 全概率公式与逆概率公式的

应用/ 305

1.4 独立性和综合应用/ 307

内容与方法提要/ 307 典型例题分析/ 309

题型一 互不相容与独立性/ 309

题型二 利用独立性计算概率/ 311

第2章 一维随机变量及其分布/ 313

2.1 离散型随机变量及其概率分布/ 313

内容与方法提要/ 313 典型例题分析/ 315

题型一 直接利用常用分布的计算问题/ 315

题型二 求离散型随机变量的分布/ 316

2.2 连续型随机变量及其分布/ 317

内容与方法提要/ 317 典型例题分析/ 319

题型一 确定分布中的参数/ 319

题型二 利用分布计算相关概率/ 321

2.3 随机变量的函数的分布/ 323

内容与方法提要/ 323 典型例题分析/ 324

题型一 离散型随机变量 X 的函数的分布/ 324

题型二 连续型随机变量 X 的函数的分布/ 325

第3章 多维随机变量及其分布/ 328

3.1 二维随机变量/ 328

内容与方法提要/ 328 典型例题分析/ 330

题型一 离散型 (X, Y) 有关分布的计算/ 330

题型二 连续型 (X, Y) 有关分布的计算/ 334

3.2 独立性/ 336

内容与方法提要/ 336 典型例题分析/ 337

题型一 独立性的判别与证明/ 337

题型二 利用独立性化简计算/ 338

题型三 求分布函数/ 340

3.3 随机变量的函数的分布/ 340

内容与方法提要/ 340 典型例题分析/ 342

题型一 离散型随机变量函数的分布/ 342

题型二 连续型随机变量函数的分布/ 343

题型三 综合题/ 345

第4章 随机变量的数字特征/ 347

4.1 随机变量的数学期望与方差/ 347

内容与方法提要/ 347 典型例题分析/ 348

题型一 利用定义计算期望和方差/ 348

题型二 利用期望和方差的性质计算/ 350

题型三 将 X 分解后, 求 X 的期望 EX / 351

题型四 随机变量函数的期望与方差/ 352

4.2 协方差和相关系数/ 356

内容与方法提要/ 356 典型例题分析/ 357

题型一 已知分布, 求数字特征/ 357

题型二 分布未知, 求数字特征/ 359

题型三 独立性与不相关性/ 361

题型四 综合题/ 363

第5章 大数定律与中心极限定理/ 367

5.1 大数定律/ 367

内容与方法提要/ 367 典型例题分析/ 368

题型一 切比雪夫不等式的应用/ 368

题型二 大数定律的简单应用/ 369

5.2 中心极限定理/ 370

内容与方法提要/ 370 典型例题分析/ 372

第6章 数理统计的基本概念/ 373

6.1 基本概念与统计量/ 373

内容与方法提要/ 373 典型例题分析/ 375

题型一 正态总体的样本均值的分布/ 375

题型二 求统计量的数字特征/ 376

6.2 抽样分布/ 377

内容与方法提要/ 377 典型例题分析/ 379

第7章 参数估计/ 383

7.1 点估计/ 383

内容与方法提要/ 383 典型例题分析/ 385

题型一 矩估计/ 385

题型二 最大似然估计/ 386

7.2 估计量的评判标准/ 388

内容与方法提要/ 388 典型例题分析/ 388

题型一 无偏性/ 388	第 8 章 假设检验/ 397
题型二 有效性/ 389	8.1 显著性检验 /397
题型三 一致性/ 390	内容与方法提要/ 397 典型例题分析/ 400
7.3 区间估计 /391	8.2 两个正态总体的假设检验 /402
内容与方法提要/ 391 典型例题分析/ 394	内容与方法提要/ 402 典型例题分析/ 404
题型一 单个正态总体下置信区间/ 394	
题型二 两个总体的区间估计/ 395	



第1章 函数 极限 连续

1.1 函 数

内容与方法提要

1. 函数是一种“对应”

函数的运算:加、减、乘、除、复合。其中函数的复合是考点之一,求函数的复合表达式常用代入法。

2. 函数的性质

(1)奇偶性:主要考查奇偶性定义及函数求导和积分后的奇偶性。

① $f(x)$ 为可导的奇函数(偶函数) $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数(奇函数)。

② $f(x)$ 为连续的奇函数(偶函数) $\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 是偶函数(奇函数)。

说明 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f(-u)d(-u)$

$$= \begin{cases} \int_0^x f(u)du = F(x) & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时} \\ -\int_0^x f(u)du = -F(x) & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时} \end{cases}$$

(2)有界性

① $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界。

② $f(x)$ 在 (a, b) 内连续,且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a, b) 内有界。

说明 由 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在,根据极限的局部有界性有, $f(x)$ 在 $(a, a+\delta_1)$ 与 $(b-\delta_2, b)$ ($\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$)内均有界。而 $f(x)$ 在 $[a+\delta_1, b-\delta_2]$ 内连续,所以必有界。

(3)周期性

设 $f(x)$ 以 T 为周期,即 $f(x+T)=f(x)$ 。

①若 $f(x)$ 可导,则 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 是有相同的周期。

② $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 不一定是周期函数。

说明 周期函数的积分不一定是周期函数。例如, $\int_0^x \cos t dt = \sin x$ 是周期函数,但 $\int_0^x (\cos t + C) dt = \sin x + Cx$ 不是周期函数。

(4) 单调性

①定义:对 $f(x)$ 的定义域内任意两点 $x_1 < x_2$ ($x_1 > x_2$), 有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) 则称 $f(x)$ 是单调增加(减少)。

②若 $f'(x) > 0$ (< 0), 则 $f(x)$ 单调增加(减少)。

典型例题分析

【例 1】 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解析 用代入法得

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1 & |f(x)| \leq 1 \\ 0 & |f(x)| > 1 \end{cases}, \text{ 故 } f[f(x)] = 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

【例 2】 设 $f(x)$ 连续, 则下列函数必为偶函数的为()。

A. $\int_0^x f^2(t) dt$

B. $\int_0^x f(t^2) dt$

C. $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt$

D. $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$

解析 由 $f(t) + f(-t)$ 是偶函数知 $t[f(t) + f(-t)]$ 是奇函数。所以, $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$ 是偶函数, 故 D 正确。

评注 若 $f(x)$ 为连续的偶函数, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 不一定是奇函数 ($a \neq 0$)。

【例 3】 设 $f(x) = -f(-x)$, 在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内有()。

A. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

B. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

C. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

D. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

解析 由已知, $f(x)$ 为奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数, $f''(x)$ 是奇函数。由 $f'(x) > 0, x \in (0, +\infty)$, 得 $f'(x) > 0, x \in (-\infty, 0)$ 。由 $f''(x) > 0, x \in (0, +\infty)$, 得 $f''(x) < 0, x \in (-\infty, 0)$ 。故 C 正确。

【例 4】 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在哪个区间上有界。

A. $(-1, 0)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, 2)$

D. $(2, 3)$

解析 此例要判别 $f(x)$ 在开区间上有界, 考虑 $f(x)$ 在开区间两个端点的极限。

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(-x) \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \frac{-\sin(-3)}{(-2) \cdot (-3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x) \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \frac{-\sin(-2)}{(-1) \cdot (-2)^2}$$

又 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内连续, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界, 故 A 正确。

【例 5】 以下四个命题中正确的是()。

A. 若 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有界

B. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

C. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

D. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

解析 讨论 $f'(x)$ 在某区间内的有界与 $f(x)$ 有界的关系, 用拉格朗日中值定理。

若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则存在 $M>0$, 对 $x \in (0,1)$, 有 $|f'(x)| \leq M$ 。任取 $x_0 \in (0,1)$, 由拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

于是

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f'(\xi)| |x - x_0| \leq |f(x_0)| + M$$

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 所以 C 正确。

【例 6】 设 $f(x)$ 有二阶导数, 且 $f(x) = -f(-x)$, $f(x) = f(x+1)$, $f'(1) > 0$, 则 ()。

A. $f''(-5) \leq f'(-5) \leq f(-5)$

B. $f(-5) = f''(-5) < f'(-5)$

C. $f'(-5) \leq f(-5) \leq f''(-5)$

D. $f(-5) < f'(-5) = f''(-5)$

解析 由已知, $f(x)$ 以 1 为周期, 故 $f'(x)$, $f''(x)$ 均是以 1 为周期, 又 $f(x)$ 是奇函数, 所以

$$f(-5) = f(-5+5) = f(0) = 0$$

$$f'(-5) = f'(-5+6) = f'(1) > 0$$

$$f''(-5) = f''(-5+5) = f''(0) = 0$$

这里 $f'(x)$ 为偶函数, $f''(x)$ 为奇函数, 所以, $f''(0) = 0$, 故 B 正确。

【例 7】 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 ()。

A. 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数

B. 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数

C. 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数

D. 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数

解析 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是偶函数。故 A 正确。

当 $f(x)$ 是偶函数, 且 $a=0$ 时, $F(x)$ 才是奇函数, 所以 B 不正确。

对于 C, 设 $f(x+T) = f(x)$, 则

$$\begin{aligned} F(x+T) - F(x) &= \int_a^{x+T} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^T f(t) dt + \int_T^{x+T} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \int_T^{x+T} f(t) dt &\stackrel{t=u+T}{=} \int_0^x f(u+T) du = \int_0^x f(u) du \\ \int_a^T f(t) dt - \int_a^x f(t) dt &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt - \int_a^0 f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^T f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

所以

$$F(x+T) - F(x) = \int_0^T f(t) dt$$

于是 $F(x)$ 以 T 为周期的充要条件是 $\int_0^T f(t) dt = 0$ 。

对于 D 显然不正确。例如 $f(x)=x$ 为单调增加, $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2$ 不单调。

【例 8】 设 $y=f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b$ ($a < b$) 对称, 证明 $f(x)$ 是周期为 $2(b-a)$ 的周期函数。

证 $y=f(x)$ 的图形关于 $x=a$ 与 $x=b$ 对称, 则对任意 x 有

$$f(a+x)=f(a-x), \quad f(b+x)=f(b-x)$$

于是

$$\begin{aligned} f(x+2(b-a)) &= f(b+(x+b-2a)) \\ &= f(b-(x+b-2a)) \\ &= f(a+(a-x)) \\ &= f(a-(a-x)) = f(x) \end{aligned}$$

故 $2(b-a)$ 是 $f(x)$ 的周期。

【例 9】 设 $f(x)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 上, $x_1 > 0, x_2 > 0$, 且 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少, 证明

$$f(x_1+x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$$

证 不妨设 $x_1 < x_2$, 依题设有 $\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1}$, 所以,

$$x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1)$$

由

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2}$$

得

$$x_2 f(x_1+x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2)$$

故

$$x_2 f(x_1+x_2) \leq x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2)$$

所以有

$$f(x_1+x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$$

评注 本例中若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调增加, 其他条件不变, 可证明 $f(x_1+x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ 。

【例 10】 设 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 可导 ($a > 0$), $f(0)=0$, $f'(x)$ 单调增加, $F(x)=\frac{f(x)}{x}$, 证明 $F(x)$ 在 $(0, a)$ 内也单调增加。

证 $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - [f(x) - f(0)]}{x^2}$

$$= \frac{x f'(x) - f'(\xi)x}{x^2} = \frac{x[f'(x) - f'(\xi)]}{x^2} \geq 0 \quad (0 < \xi < x)$$

其中

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)$$

故 $F(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加。

1.2 函数极限

内容与提要

1. 定义

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{使当 } |x| > X \text{ 时, } |f(x) - A| < \epsilon$$

2. 极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

3. 极限四则运算法则

设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B, \quad \lim f(x)g(x) = AB, \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

4. 极限的复合函数运算法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 且在 $\dot{U}(x_0)$ 内 $\varphi(x) \neq u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$$

说明 复合函数运算法则是变量替换法求极限的依据。

5. 极限的性质

(1) 唯一性: 若 $\lim f(x) = A$, 则 A 必唯一。

(2) 有界性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$ 。

(3) 保号性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0 (< 0)$, 则必 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) > 0 (< 0)$$

(4) 保序性: 若 $f(x) > g(x) (f(x) < g(x))$ 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$

说明 以上性质对 $x \rightarrow \infty$ 及对数列极限也成立。

6. 无穷小量

(1) 定义: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量。

(2) 无穷小的运算性质:

- ① 有限个无穷小之和为无穷小;
- ② 有界函数与无穷小的积为无穷小;
- ③ 极限与无穷小的关系:

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 α 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量。

(3) 无穷小的比较:

设 α 和 β 是相同变化趋势下的无穷小量。

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, 则称 α 较 β 高阶无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$ 。

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$ 。

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$, 则称 α 与 β 是同阶无穷小。

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta^k} = C \neq 0$, 则称 α 是 β 的 k 阶无穷小, 其中 k 为正整数。

若 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, 则称 α 较 β 低阶无穷小。

(4) 等价无穷小替换定理:

若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 。

7. 无穷大量

(1) 定义: 对 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量。

(2) 无穷大量与无穷小量的关系:

若 $\lim f(x) = 0 (f(x) \neq 0)$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)} = \infty$ 。

8. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

典型例题分析

► 题型一 利用重要极限求极限 ◀

【例 11】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$ 。

解法 1 利用重要极限。

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1 + \sin x}{\tan x - \sin x} \cdot \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{x^3}}$$

由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \cdot \frac{1}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x (1 + \sin x)} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = e^{\frac{1}{2}}$$

解法 2 利用幂指函数 $u^v = e^{v \ln u}$ 。

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{3} \ln \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)}$$

由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \ln \left(1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = e^{\frac{1}{2}}$$

评注 这里利用了 $\ln(1+u) \sim u (u \rightarrow 0)$ 。

【例 12】 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^x$ 。

解析 利用重要极限。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^2 \right]^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{2}{x}} \cdot \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}} \end{aligned}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = 1, \text{ 故原式} = e.$$

【例 13】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$ 。

解析 利用重要极限。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2 \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2 \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \right)^{\frac{1 - \tan \frac{1}{n}}{2 \tan \frac{1}{n}} \cdot \frac{2 \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \cdot n} \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \tan \frac{1}{n}}{1 - \tan \frac{1}{n}} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot n}{1 - \tan \frac{1}{n}} = 2$$

故

$$\text{原式} = e^2$$

评注 这里利用了 $\tan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty)$ 。

► 题型二 左、右极限 ◀

分段函数在分界点处的极限用左、右极限求之。另外绝对值函数, $\frac{1}{x} (x \rightarrow 0^-, x \rightarrow 0^+)$, $\arctan x (x \rightarrow \pm\infty)$, $e^x (x \rightarrow \pm\infty)$ 常用左、右极限求之。

【例 14】 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin a(e^x - 1)}{e^x - 1} & x < 0 \\ \frac{2(e^{ax} - 1)}{\ln(1 + 2x)} & x > 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 。

解析

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin a(e^x - 1)}{e^x - 1} = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(e^{ax} - 1)}{\ln(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot ax}{2x} = a \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$$

评注 这里利用了 $\sin a(e^x - 1) \sim a(e^x - 1)$, $\ln(1 + 2x) \sim 2x$, $e^x - 1 \sim x (x \rightarrow 0)$ 。

【例 15】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$ 。

解析

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{-x} \right) &= 2 - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \end{aligned}$$

故原式 = 1。

评注 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ 。

【例 16】 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{2}{\pi} x \arctan x}{e^x + x}$ 。

解析 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\arctan x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 。