

# 工程电磁场数值分析与综合

谢德馨 杨仕友 编著



 机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



# 工程电磁场数值分析与综合

谢德馨 杨仕友 编著  
汤蕴璆 颜威利 主审



机械工业出版社

本书吸纳了计算电磁学最近发展的成果,系统地阐述了工程电磁场数值分析与综合的基本原理和方法。全书共分3篇,计15章,其中工程电磁场正问题主要包括节点有限元法、棱边有限元法、有限体积法、无网格法和时域有限差分法;工程电磁场耦合问题涵盖电磁场与电路系统和机械运动的耦合;工程电磁场逆问题介绍了进化类标量优化算法和矢量优化算法,以及与随机优化算法相结合的表面响应模型。书中包含若干典型算例,每章后面附有参考文献,书末附有典型计算机源程序,包括求解稀疏对称方程组的ICCG法源程序,简单禁忌搜索算法程序,以及简单一维伽辽金无单元法程序。

本书既可作为高等工科院校电气工程学科的研究生深一层次的教学或参考学习用书,也可供从事电磁场理论与应用研究的教师、科研工作者和工程技术人员阅读、参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场数值分析与综合/谢德馨,杨仕友编著. —北京:机械工业出版社,2008.8

ISBN 978-7-111-24914-6

I. 工… II. ①谢…②杨… III. 电磁场-数值计算 IV. 0441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第125139号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:王保家 责任编辑:关晓飞 责任校对:张晓蓉

封面设计:陈沛 责任印制:李妍

北京富生印刷厂印刷

2009年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm·25.75印张·501千字

标准书号:ISBN 978-7-111-24914-6

定价:42.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

销售服务热线电话:(010)68326294

购书热线电话:(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话:(010)88379727

封面无防伪标均为盗版

# 前 言

工程电磁场的数值分析与综合设计是计算电磁学的重要组成部分。计算电磁学以电磁场理论为基础,将数值计算、优化方法和计算机软件技术结合起来,解决复杂的工程电磁场问题,在最近数十年,特别是20世纪90年代以来得到了蓬勃发展,已成为一门新兴的综合性学科。由于电气设备的工业需求和控制技术的广泛应用、计算机技术的持续进步和日益普及、计算数学和软件技术的快速发展,促使计算电磁学研究的深度和广度不断拓展,在电磁场正问题、逆问题和耦合问题分析的诸多方面都取得了重大的科学进步。这一迅速发展的形势,对从事工程电磁场理论与应用研究的研究生、教师、科研工作者和工程技术人员提出了新的要求。

在这种新形势下,本书作者试图将自己的研究成果和国际著名学者的部分研究成果结合起来,提供一本既有电磁场分析与综合的基本理论、基本方法,又有近15年来国际上提出的一些新方法,在文字表述上由浅入深的实用参考书。因此,本书内容既包括节点有限元法,又包括棱边有限元法,同时也介绍了时域有限差分法、有限体积法和无网格法;既有三维涡流问题的稳态分析,又有瞬态分析;既包括工频问题,又包括高频问题;既含正问题的数值分析,也含近年来逆问题的最新发展,同时也介绍了受到研究者关注的耦合问题。本书分为3篇,共15章,为了便于读者查询,每章后面均附有较为详细的参考文献。书中提供了较多实际算例,以便将理论与算法具体化。书末附有若干计算机源程序,可作为进行有关实际问题计算时程序编写的基础和参考。

本书第1章1.5节“线性和非线性数学规划”、第5章“无网格法”、第3篇“工程电磁场逆问题”中的4章以及附录B“简单禁忌搜索算法程序”、附录C“简单一维伽辽金无单元法程序”由浙江大学杨仕友教授撰写;第8章8.6节“表面阻抗法”、8.7节“计算实例:铁磁材料中的涡流与磁场”由浙江大学姚纓英教授撰写;沈阳工业大学谢德馨教授撰写了其余章节,并对全书进行了整理、统一和定稿。

本书由哈尔滨理工大学汤蕴璆教授和河北工业大学颜威利教授主审。汤蕴璆教授仔细审阅了第1~7章;颜威利教授仔细审阅了第8~15章以及附录,他们改正了初稿中的错误和不妥之处,并对各章提出了许多宝贵意见。此外,在本书撰写过程中,还得到沈阳工业大学数学系王金铭教授的热心帮助,他对棱边元插

值函数的推导、周期性边界条件的处理等问题提出了宝贵意见。在此，作者谨向他们表示衷心的感谢。

本书内容也融入了作者所在单位研究小组中多年来博士生、硕士生的研究成果，在此一并表示作者的谢意。

由于作者水平的限制，书中难免存在缺点错误，恳请读者批评指正。

编著者

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 工程电磁场数值分析与综合的基本问题</b> .....	1
1.1 概述 .....	1
1.1.1 电磁场数值分析方法的分类 .....	2
1.1.2 计算电磁学的研究现状与技术进步 .....	4
1.2 电磁场控制方程的表述 .....	8
1.2.1 麦克斯韦方程组 .....	9
1.2.2 唯一性定理和矢量场的分类 .....	10
1.2.3 场矢量和位函数的微分方程 .....	13
1.2.4 工程电磁场数值分析中电磁位方程的表述 .....	17
1.3 边界条件 .....	23
1.3.1 不同媒质的分界面条件 .....	23
1.3.2 场域边界条件 .....	26
1.3.3 开域问题与空间变换 .....	29
1.4 基函数与权函数 .....	34
1.4.1 加权余量法简介 .....	34
1.4.2 基函数的类型 .....	35
1.4.3 权函数的类型 .....	38
1.5 线性和非线性数学规划 .....	40
参考文献 .....	41

## 第 1 篇 工程电磁场正问题

<b>第 2 章 有限元法 I (节点元)</b> .....	46
2.1 概述 .....	46
2.2 基于变分原理的有限元法 .....	47
2.2.1 古典变分法简介 .....	47
2.2.2 变分有限元法 .....	52
2.2.3 单元插值基函数的构成 .....	54
2.2.4 静态场泊松方程边值问题的变分有限元法 .....	63
2.2.5 各类边界条件的处理 .....	71
2.3 伽辽金有限元法 .....	77

2.3.1	三维涡流场分析的矢量磁位和标量电位数学模型	77
2.3.2	标量电位的作用	82
2.3.3	三维正弦涡流场问题的伽辽金有限元离散化	84
2.4	三维瞬态涡流场分析	99
2.4.1	时步法	100
2.4.2	状态空间法	104
2.5	计算实例	108
2.5.1	线性正弦稳态涡流问题 (TEAM Workshop 问题 7)	108
2.5.2	非线性瞬态涡流问题 (TEAM Workshop 问题 10)	109
	参考文献	114
<b>第 3 章</b>	<b>有限元法 II (棱边元)</b>	<b>116</b>
3.1	概述 (从节点元到棱边元)	116
3.2	六面体 Whitney 单元插值函数的构建	117
3.2.1	六面体 Whitney 单元的插值函数	117
3.2.2	六面体 Whitney 单元插值函数的旋度	122
3.3	六面体 Mur 单元的插值函数	123
3.4	棱边元与节点元在三维电磁场分析中的比较	125
	参考文献	127
<b>第 4 章</b>	<b>有限体积法</b>	<b>129</b>
4.1	概述	129
4.2	有限差分法简介	130
4.2.1	差分与差商	130
4.2.2	截断误差	131
4.2.3	二维泊松方程的差分离散	132
4.3	有限体积法简介	135
4.3.1	格点型有限体积法	136
4.3.2	格心型有限体积法	138
4.3.3	有限体积法在电磁场分析中的应用	139
	参考文献	141
<b>第 5 章</b>	<b>无网格法</b>	<b>142</b>
5.1	概述	142
5.1.1	无网格法的发展历史	142
5.1.2	无网格法的近似函数	143
5.2	伽辽金无单元法的基本原理和实施过程	146
5.2.1	边值问题及其弱形式泛函	147
5.2.2	伽辽金无单元法的形状函数	147
5.2.3	不同媒质分界面条件的处理	148
5.2.4	离散化方程	149

5.2.5 权函数的支撑区间 .....	150
5.2.6 算法验证 .....	150
5.3 计算实例 .....	152
参考文献 .....	154
<b>第 6 章 时域有限差分法</b> .....	<b>156</b>
6.1 时域有限差分法的基本方程 .....	156
6.1.1 广义形式的麦克斯韦旋度方程 .....	156
6.1.2 时域有限差分方程 .....	157
6.2 空间网格大小和时间步长的选取 .....	161
6.3 吸收边界条件 .....	162
6.3.1 二阶吸收边界条件的解析表达 .....	163
6.3.2 二阶吸收边界条件的差分近似 .....	164
6.4 激励源的引入 .....	166
参考文献 .....	168
<b>第 7 章 电磁场数值计算的后处理</b> .....	<b>169</b>
7.1 局部与总体电磁量的计算 .....	169
7.1.1 磁感应强度 .....	169
7.1.2 电流密度 .....	170
7.1.3 电感、能量与涡流损耗 .....	170
7.1.4 绕组磁链 .....	174
7.2 力与力矩的计算 .....	176
7.2.1 麦克斯韦应力法 .....	176
7.2.2 虚功原理 .....	179
7.2.3 节点力法 .....	182
7.2.4 计算实例 .....	183
参考文献 .....	187
<b>第 8 章 铁磁材料中的电磁场分析与磁特性模拟</b> .....	<b>189</b>
8.1 铁磁材料中电磁场计算的特点 .....	189
8.2 各向异性问题 .....	192
8.2.1 结构各向异性 .....	192
8.2.2 材料各向异性 .....	193
8.3 正弦激励下非线性电磁场的磁导率 .....	199
8.3.1 问题的复杂性 .....	199
8.3.2 有效磁导率的计算 .....	200
8.4 谐波平衡有限元法 .....	201
8.5 时间周期有限元法 .....	204
8.6 表面阻抗法 .....	207
8.6.1 一维表面阻抗条件的导出 .....	208



8.6.2	对一维表面阻抗条件的修正	209
8.6.3	饱和工作状态时的表面阻抗	212
8.6.4	表面阻抗法的有限元模型	213
8.7	计算实例: 铁磁材料中的涡流与磁场 (TEAM Workshop 问题 21)	216
	参考文献	220
<b>第9章 有限元离散化方程组解法的若干问题</b>		<b>223</b>
9.1	求解线性方程组的方法分类	223
9.2	预处理共轭梯度法	224
9.2.1	共轭梯度法简介	224
9.2.2	一种典型的预处理共轭梯度法	228
9.2.3	ICCG 法应用中的几个问题	231
9.2.4	ICCG 法的改进	233
9.3	牛顿-拉夫逊法在求解非线性代数方程组中的应用	234
9.3.1	牛顿-拉夫逊法简介	234
9.3.2	牛顿-拉夫逊法在静磁场有限元分析中的迭代格式	236
9.3.3	用牛顿-拉夫逊法求解正弦涡流场复系数非线性代数方程组	240
9.4	计算实例: 改进的预处理共轭梯度法	244
	参考文献	245

## 第2篇 工程电磁场与电路系统和机械运动的耦合问题

<b>第10章 电磁场与电路系统的耦合问题</b>		<b>247</b>
10.1	概述	247
10.2	间接场路耦合法	248
10.2.1	二维电磁场方程与电路方程的耦合	248
10.2.2	计算实例: 笼型感应电动机稳态起动电流的计算	248
10.3	直接场路耦合法	252
10.3.1	直接场路耦合法的研究概况	252
10.3.2	计算实例: 变压器大电流绕组并联导线中环流损耗的计算	253
	参考文献	259
<b>第11章 电磁场、电路系统与机械运动系统的耦合问题</b>		<b>261</b>
11.1	场-路-运动耦合问题的控制方程	261
11.2	场-路-运动耦合问题分析中时间步长的控制	265
11.3	动态有限元网格的处理	268
	参考文献	273

## 第3篇 工程电磁场逆问题

<b>第12章 电磁场逆问题数值分析</b>		<b>275</b>
12.1	概述	275

12.2	电磁场逆问题的特点和计算过程 .....	276
12.3	优化算法 .....	277
12.4	电磁场逆问题数值分析中的特殊问题 .....	279
12.5	计算实例 .....	280
	参考文献 .....	282
<b>第 13 章</b>	<b>进化类标量优化算法 .....</b>	<b>284</b>
13.1	概述 .....	284
13.2	遗传算法 .....	284
13.2.1	遗传算法的基本原理 .....	284
13.2.2	遗传算法的实现 .....	287
13.2.3	遗传算法的改进 .....	290
13.2.4	算法验证 .....	292
13.3	模拟退火算法 .....	293
13.3.1	模拟退火算法的基本原理 .....	293
13.3.2	连续变量模拟退火算法的收敛条件 .....	294
13.3.3	模拟退火算法的实现 .....	297
13.3.4	连续变量优化的一种实用模拟退火算法 .....	299
13.3.5	模拟退火算法的改进 .....	302
13.3.6	计算实例 .....	305
13.4	禁忌搜索算法 .....	306
13.4.1	禁忌搜索算法的基本原理 .....	306
13.4.2	连续变量优化设计的基本禁忌搜索算法 .....	307
13.4.3	一种改进的禁忌搜索算法 .....	307
13.4.4	禁忌搜索算法的若干改进措施 .....	311
13.4.5	算法验证 .....	313
13.5	粒子群优化算法 .....	314
13.5.1	粒子群优化算法的基本原理和迭代过程 .....	315
13.5.2	粒子群优化算法的控制参数分析 .....	317
13.5.3	一种改进的粒子群优化算法 .....	318
13.5.4	杂交粒子群优化算法 .....	319
13.5.5	粒子群优化算法与遗传算法的异同点 .....	322
13.5.6	计算实例 .....	324
	参考文献 .....	327
<b>第 14 章</b>	<b>表面响应模型及其在电磁场逆问题分析与计算中的应用 .....</b>	<b>329</b>
14.1	概述 .....	329
14.2	基于径向基函数的表面响应模型 .....	330
14.2.1	基本原理 .....	330
14.2.2	常用径向基函数及其优、缺点 .....	331

14.2.3 MQ 径向基函数中形状参数 $h$ 的选择 .....	332
14.3 基于移动最小二乘近似的表面响应模型 .....	334
14.3.1 基本原理 .....	335
14.3.2 权函数的选择 .....	336
14.3.3 MLS 的函数重构能力 .....	337
14.4 基于紧支集径向基函数的表面响应模型 .....	338
14.4.1 紧支集径向基函数 .....	338
14.4.2 基于紧支集径向基函数的表面响应模型 .....	339
14.5 基于表面响应模型和标量进化算法相结合的快速全局优化算法 .....	339
14.6 采样点的产生规则 .....	340
14.6.1 应用模拟退火算法产生采样点 .....	340
14.6.2 均匀网格取点法 .....	340
14.6.3 随机智能取点法 .....	340
14.7 算法验证 .....	341
参考文献 .....	345
<b>第 15 章 矢量进化算法 .....</b>	<b>347</b>
15.1 概述 .....	347
15.2 矢量(多目标)优化问题的基本概念和术语 .....	347
15.2.1 绝对最优解或理想最优解 .....	348
15.2.2 优势解、非支配解和帕莱托最优解 .....	348
15.3 多目标优化问题适值计算机制和方法 .....	349
15.3.1 原始方法 .....	349
15.3.2 非基于 Pareto 解的矢量优化方法 .....	352
15.3.3 基于 Pareto 最优解的方法 .....	356
15.4 适值共享和种群多样性 .....	357
15.5 矢量进化算法的实现 .....	358
15.5.1 优等群体的引入及更新规则 .....	358
15.5.2 适值计算方法 .....	359
15.5.3 适值共享 .....	359
15.5.4 个体总适值 .....	360
15.6 计算实例 .....	360
参考文献 .....	361
<b>附录 .....</b>	<b>362</b>
附录 A 求解稀疏对称方程组的 ICGG 法源程序 .....	362
附录 B 简单禁忌搜索算法源程序 .....	370
附录 C 简单一维伽辽金无单元法源程序 .....	377

# 第 1 章 工程电磁场数值分析与综合的基本问题

工程电磁场数值分析与综合问题包括电磁场的正问题、逆问题，以及电磁场与电路或其他系统的耦合问题。本章介绍这一研究领域的发展概况和共性问题，包括电磁场控制方程的表述、边界条件的确定、基函数与权函数的类型，以及数学规划的基本概念。

## 1.1 概述

尽管电磁学的缘起具有悠久的历史，但计算电磁学的蓬勃发展却是最近 30 多年的事。计算电磁学以电磁场理论为基础，以高性能计算技术为手段，运用计算数学提供的各种方法，解决复杂的工程问题，是电磁学中一个十分活跃的研究领域，已经构成了一门新兴的边缘交叉学科。

电磁场数值分析的理论和方法是计算电磁学的重要组成部分，属于电磁场正问题，它的任务是在已知电气设备设计方案的条件下通过数值分析的手段对方案的优劣作出评价。具体地说，就是已知给定区域内的几何结构与物理参数，求解一个电磁场定解问题，得到所研究区域中的电场或磁场的空间分布和时间变化，并在此基础上计算出设备的电感、电容、能量、损耗、电磁力等各种特性参数。与正问题相对的电磁场逆问题，在工程上大多属于电磁装置的综合设计问题。由于在综合设计过程中必然涉及电磁场的数值分析和计算，故称之为电磁场逆问题，它的任务是给定电磁场的期望分布或理想特性参数，通过对场源、场域以及场域中媒质分布的优化设计，实现电磁场和电磁能量的最优控制和利用。电磁装置的优化设计、无损检测、医学图像重构等问题都属于电磁场逆问题的研究范围。

电磁场数值分析方法的提出可以溯源到 20 世纪 40 年代就已付诸工业应用的有限差分法<sup>[1]</sup>，但是当时的计算工具只限于计算尺和手摇计算机，限制了数值方法的发展。数十年来，现代电气和电子工业的不断发展和迫切需求成为促进计算电磁学发展的动力，同时，由于计算机技术的持续进步和日益普及，以及计算数学和软件技术的快速发展，提供了强大的物质基础和计算工具，使得计算电磁学的研究取得了重大的进步。从二维到三维，从线性到非线性，从静态场到时变场，从单一电磁场问题到电磁场与电路系统、机械运动系统或其他物理场的耦

合问题, 从正问题到逆问题, 计算能力均有了飞跃性的提高。

### 1.1.1 电磁场数值分析方法的分类

对已经发展起来的电磁场数值分析方法进行大体上的分类, 有助于根据所研究问题的基本属性来选择恰当的数学工具, 建立相应的数学模型, 从而方便地求得问题的解。电磁场数值分析离不开场域的离散化。从离散化的形式来区分, 可将这些方法分为场域元法、边界元法和等效源法, 其中边界元法也可看作激励源位于边界上的等效源法。若从数学模型中控制方程的形式上分类, 则可将这些方法分为微分方法和积分方法。

在电气工程电磁场分析中, 最早应用的是有限差分法。有限差分法属于场域元法。这一方法的基本原理可用“以差商近似代替微商”来概括。其基本步骤是, 首先将求解区域分成等距或不等距的矩形网格(二维)或立方形网格(三维), 然后在网格的节点上用差分方程近似微分方程, 形成离散化的差分方程组并求解之。但经典有限差分法的规则网格不能满意地模拟几何形状复杂的问题, 而电工设备中的电磁场却往往正是以包含复杂的几何形状和不同媒质的物理参数为特征, 这就成为有限差分法的主要缺点; 此外, 如果需要引入泰勒级数的高阶项来提高有限差分法的计算精度, 也将遇到困难, 因此有限差分法在电磁场分析中的应用逐渐被有限元法替代。但是应当指出, 有限差分法仍具有生命力, 高频电磁场分析中使用的传统时域有限差分法就是一种显式的有限差分法; 在流体力学的数值计算领域有限差分法也仍然占据重要地位。

有限元法是应用最为广泛的电磁场数值解法, 同样也属于场域元法, 这一方法最初是在力学领域提出并发展起来的。有限元法本身又可分为节点元和棱边元两个分支, 前者将待求电磁场的物理量定义在网格节点上, 后者则定义在网格棱边上。最初的研究工作集中于节点元, 此后棱边元的研究也在平行发展。把有限元法首先用于电工设备电磁场计算的是 Winslow<sup>[2]</sup>, 他用有限元法分析了加速器磁铁的饱和效应。Silverster 和 Chari<sup>[3]</sup>则提出了电机内电磁场问题的第一个通用非线性变分表述。自此以后, 有限元法在各种电工问题中得到了广泛应用, 与此有关的研究文章不胜枚举。其中, 1970 年以后 Anderson<sup>[4]</sup>对变压器漏磁场的研究, 奥田 (Okuda)<sup>[5]</sup>等人对汽轮发电机端部磁场的研究, 1980 年以后 Nakata<sup>[6]</sup>等人对电磁媒质特性的数值模拟和实验研究, Morisue<sup>[7]</sup>、Biro<sup>[8]</sup>等人对规范问题的新见解, 这些都是富有开创性的成果。

边界元法是另一种使用较多的电磁场数值分析方法<sup>[9,10]</sup>, 与有限元法和有限差分法的剖分对象为整个求解场域不同, 边界元法的剖分对象为场域边界, 对于二维平行平面场和轴对称场而言即为边界线, 对于三维场即为边界面。从场的激励源的角度来看, 边界元法中的场源实质上是体现在边界上的等效源。

典型的等效源法<sup>[11]</sup>包括模拟电荷法、模拟电流法和模拟磁荷法等，这些方法用于计算场域之外的所谓“无效区”的等效源来代替场的激励。等效源法在静态场特别是静电场分析中得到广泛应用。

上面所述的有限差分法和有限元法同时又属于微分方法，其数学模型是从电磁场的偏微分方程定解问题出发而建立的。与微分方法平行发展的还有积分方法，例如边界元法有时也称为边界积分方法或者边界积分方程方法，其数学模型中的积分方程称为直接边界积分方程；在高频电磁场领域广泛应用的矩量法，则是一种采用加权余量法对间接边界积分方程进行离散化的方法。图 1-1 和图 1-2 列出了各种数值方法的大致分类。

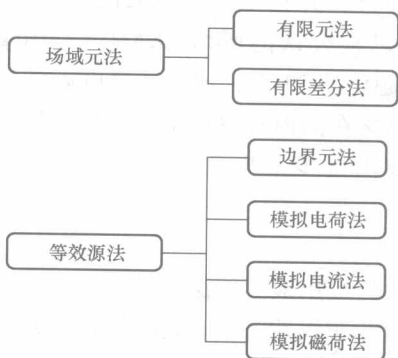


图 1-1 各种数值方法的分类  
(根据离散化方式)

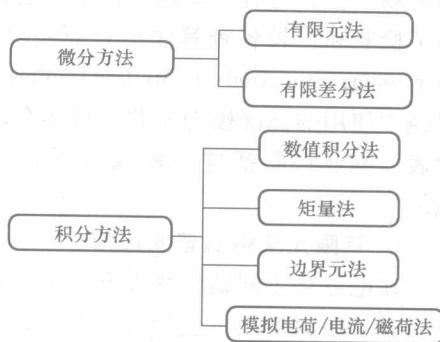


图 1-2 各种数值方法的分类  
(根据控制方程)

除了上述常用的数值方法以外，一些新的算法，例如吸收了有限元法的分片插值思想并兼有有限差分法简单性的有限体积法；以独特的网格单元形式直接将场矢量在场域网格中离散并进行差分求解的有限积分法；免除了有限元法中繁琐的网格剖分的无单元法；在粗网格和细网格之间迭代以取得足够精度的解并加速收敛的多重网格法等，都可以看做传统数值方法的新的扩展。此

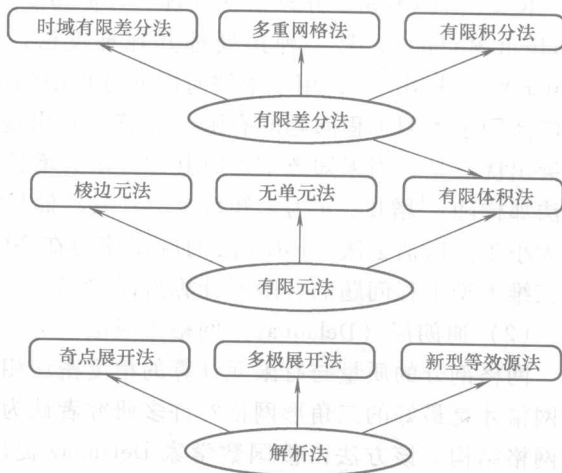


图 1-3 新方法与传统方法的联系

外,来源于解析法的一些半解析方法,例如多极展开法、奇点展开法和新型等效源法<sup>[12]</sup>等,也被独立地、或与其他数值方法相结合<sup>[13]</sup>地应用于工程电磁场分析。图 1-3 给出了这些新方法与传统方法之间的联系。由于同一方法可能与若干其他方法存在内在的联系,因此该图只是给出了不同方法之间的大体关系。

### 1.1.2 计算电磁学的研究现状与技术进步

计算电磁学研究正在蓬勃发展,其标志之一是在这一领域内有组织的学术活动。例如 COMPUMAG (Computing Electromagnetic Field Conference)、CEFC (Conference on Electromagnetic Field Computation) 等影响较大的世界性国际会议均为双年会;另有一些地区性国际会议定期召开,并且正在向更大的地域扩展。为了检验和比较各种算法的计算精度,目前已被公认的所谓 TEAM (Testing of Electromagnetic Analysis Method) Workshop 问题已达 33 个,成为计算电磁学研究经常使用的标准模型例题。每年有数千篇论文在国内外各种学术会议和刊物上发表。本节将概括这一领域的研究现状与技术进步,并介绍若干重要的研究成果<sup>[14,15]</sup>。

#### 1. 有限元法得到普遍应用

在电磁场正问题的分析方法中,有限元法的应用最为广泛,其二维、三维解已经有了很大发展,包括对稳态、时变场问题和非线性问题、运动媒质问题的处理,对规范问题的正确理解等。用有限元法解决工程问题的论文在各种有关文献中所占的比例最大。以下成果对有限元法的发展起到了重要的促进作用。

##### (1) 求解有限元离散化方程组的 ICCG 法

ICCG 法即不完全乔累斯基分解-共轭梯度法 (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method),是一种预处理共轭梯度法。该方法最初由 J. A. Meijerink 和 V. der Vorst 提出<sup>[16]</sup>,用于求解有限元分析中的大型稀疏对称代数方程组,目前已广泛用于大型工程问题的有限元计算,并出现了一些改进形式<sup>[17]</sup>。这一方法的突出优点是,当未知数增加时其计算次数增长较慢,不像高斯消去法及其派生方法那样随  $n^3$  增长, $n$  为未知数个数;其存储量需求独立于系数矩阵的带宽,也大大小于高斯消去法。ICCG 法的应用使得在 20 世纪 80 年代以前很难进行的许多三维大型工程问题的有限元计算得以实现。

##### (2) 迪朗尼 (Delaunay) 网格生成法

网格剖分的质量与有限元计算的精度密切相关。对于一组给定的节点,怎样的网格才是最好的三角形网格?许多研究者认为,迪朗尼三角化方法能实现最好的网格结构。该方法由俄国数学家 Delaunay 提出,Cendes 首先将这一方法应用于二维有限元网格自适应生成<sup>[18]</sup>。这一方法能使三角形的最小角度之和极大化,也就是所生成的三角形在一定条件下最接近于等边三角形,于是能避免细长

畸形单元的产生,这正是有限元分析所要求的。迪朗尼法已从二维推广到三维,此时需要将三角形转变成四面体,将二维情况下的外接圆转变成外接球<sup>[19]</sup>。

### (3) 开域问题的变换方法

开域问题的边界位于无穷远处,在有限元计算中无法实现。常用的权宜之计是采用截断法,将无限域截断成有限域。为了确定这一边界的设定是否合理,通常需要经过多次试算,最后设定一个满足给定误差要求的相对较小的区域作为求解域,显然这一区域仍然包含了很大的“无用”空间。为节约计算机资源并提高计算精度,1988年由Freeman和Lowther<sup>[20]</sup>提出了处理开域问题的精确变换方法。应用保角变换中的拟矢径变换,将无穷区域变换到有限区域内,再进行有限元离散化。这一方法已被推广到三维<sup>[21]</sup>。其后发展起来的几何变换法突破了保角变换的限制,保留了有限元法系数矩阵稀疏对称的优点,应用起来比较方便。

### (4) 棱边元(Edge Element)的使用

从20世纪80年代开始,在三维涡流问题计算中采用了多种矢量位-标量位耦合的数学模型,最初均应用于常规的节点元。为了直接获得待求的场矢量并且便于处理非线性问题,也出现了直接以磁场强度(或电场强度)为未知量的算法。但是在节点元中作为未知函数的场矢量在相邻单元的公共棱边上有唯一的值,因而其切向分量和法向分量都是连续的,此时,若以磁场强度 $\mathbf{H}$ 和标量磁位 $\psi$ 为未知函数建立数学模型,当采用节点元计算时,在两种媒质交界面处磁场强度的法向分量将保持连续,这就违背了电磁场边界条件的基本理论。Bos-savit<sup>[22,23]</sup>首先将Whitney<sup>[24]</sup>提出的棱边元引入电磁场分析。棱边元中将未知函数取作场矢量沿单元棱边的环量,可以保证共有一条棱边的相邻单元的 $\mathbf{H}$ 切向分量相等,而对 $\mathbf{H}$ 的法向分量不作约束,从而解决了这一矛盾。

## 2. 场-路-运动耦合问题研究取得新进展

电磁场与电路系统、机械运动系统以及其他物理场的耦合问题的研究取得了很大进展。采用电路系统变量与电磁场变量的直接耦合来分析二维电磁场已很普遍。电磁系统与机械运动的耦合、电磁系统与包括磁致伸缩效应在内的微型机械变形问题的耦合、磁场与熔融金属流场的耦合、电场与气流场的耦合均已吸引了不少研究者的关注。

旋转电机、直线电机和各种含有运动执行元件的电磁机械的动态特性仿真需要研究场-路-运动系统的耦合。在这一研究中,将电压作为已知量,以电流和电磁位作为待求变量,将电路方程与电磁场方程直接联立求解的所谓直接耦合方法已被很多研究者采用<sup>[25]</sup>。由于求解场域中含有运动部分,因而在有限元分析中需要不断改变网格剖分。为了减轻网格生成的负担,目前已经发展了几种不同的处理方法,大体可分成“协调交界面”和“非协调交界面”两类<sup>[26]</sup>。在协调交界面方法中,静止部分的网格保持固定,运动部分的网格拓扑结构不变,只改变



节点坐标,但运动边界上的节点需要小心处理,以保持两部分交界面网格的相容性。这类方法的实施依赖于具体问题,其计算机程序不够通用。非协调交界面方法是场域内静止部分和运动部分的网格分别独立生成,在两部分的交界面上网格不需要协调相容,采用拉格朗日乘子法实现两部分的耦合<sup>[27]</sup>。这一方法即使对运动部分的网格也只需要生成一次,就可以处理运动网格的旋转或移动,其缺点是由于拉格朗日乘子项的加入使离散化方程组系数矩阵的性状变差,增加了方程组求解时的 ICCG 迭代次数。

### 3. 媒质特性模拟的研究进一步精细化

工程电磁场数值计算的精度在很大程度上依赖于所研究区域中各种媒质电磁特性参数的准确模拟。媒质的非线性、各向异性等特性研究均取得了显著成果。以往的忽略磁滞和各向异性或简单地应用平均磁化曲线来模拟铁磁媒质非线性磁滞特性的方法,在许多电磁装置的磁场分析中已经不能满足要求。在铁磁媒质磁滞特性的模拟中,应用较多的是 Preisach (1935) 模型<sup>[28]</sup>。Mayergoyz 等人对该模型的原始版本作了重要改进,目前已经发展了标量磁滞模型、矢量磁滞模型<sup>[29]</sup>、动态磁滞模型<sup>[30]</sup>等针对不同问题的模拟方法。考虑旋转磁化的 E&S 模型是最近几年提出的矢量磁滞模型。事实上,在电机、变压器运行时,铁心中的局部磁场是交变磁场 ( $H$  与  $B$  矢量方向相同) 和旋转磁场 ( $H$  与  $B$  矢量方向不同) 的合成。与之相联系的铁心损耗也可分为交变损耗和旋转损耗两部分,在以往的许多磁滞模型中都没有考虑旋转损耗。日本学者 M. Enokizono 与合作者 N. Soda 在 2000 年提出了“Enokizono and Soda (E&S)”模型<sup>[31]</sup>,同时考虑了电磁钢片的磁滞、各向异性以及旋转损耗。

此外,新材料的使用促进了媒质电磁特性模拟的研究,例如微粉粘结型永磁媒质的磁性<sup>[32]</sup>、超磁致伸缩媒质特性的有限元模拟<sup>[33,34]</sup>等。特别应当提到的是新型媒质在生物医学领域的应用。参考文献 [35] 研究了用于目标药物递送的粘性液体中超顺磁铁氧纳米颗粒在外磁场作用下经生物毛细管运动的动态特性,就是一个涉及媒质特性模拟和不同物理场耦合的前沿性课题的例子。

应当指出,媒质特性模型的建立是与电磁场的数值分析方法密切相关的。如何将复杂媒质特性模型与数值分析方法恰当地结合,仍然是需要深入研究的课题。

### 4. 电磁场逆问题成为研究热点之一

电磁场逆问题的研究与耦合问题、媒质特性模拟问题被公认为 20 世纪 90 年代计算电磁学的三大研究热点。电磁场逆问题从第 6 届 COMPUMAG 会议 (1987 年, Graz, Austria) 开始成为以后历届会议的重要专题。这一问题实际上包含了电磁场分析 (正问题) 与优化方法的组合。由于将电磁场数值分析作为目标函数评价的手段,因而有别于其他的优化问题。由于电磁场逆问题需要冗长的计算