

ZHONGXUESHUXUESIWEIFANGFACONGSHU

中学数学思维方法丛书

反思与监控

尤善培 编著

FANSIYUJIAKONG
YOUSHANPEI

ZHONGXUE
SHUXUE
SIWEIFANGFA
CONGSHU



大象出版社

中学数学思维方法丛书。

- 走向数学发现
- 原则与策略
- 猜想与合情推理
- 直觉探索方法
- 逻辑探索方法
- 整体方法
- 逻辑与演绎
- 综合与构造
- 转化与化归
- 抽象与模式
- 反思与监控
- 计算机与思维
- 观念与文化

ISBN 7-5347-2525-9



9 787534 725258 >

ISBN 7-5347-2525-9/G · 2050

定价：6.90 元

中学数学思维方法丛书

反思与监控

尤善培 编著

大象出版社

FANSIYUJIANKONG

YOUSHANPEI



图书在版编目(CIP)数据

反思与监控/尤善培著. — 郑州:大象出版社,
2000.10

(中学数学思维方法丛书/王梓坤,张乃达主编)

ISBN 7-5347-2525-9

I.反… II.尤… III.数学-思维方法-中学-课外
读物 IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 44680 号

责任编辑 侯耀宗

责任校对 郭一凡 范秀娟

封面设计 马天羽

出版 大象出版社 (郑州市农业路 73 号 邮政编码 450002)

发行 新华书店经销

印刷 河南第二新华印刷厂

版次 2000 年 10 月第 1 版 2000 年 10 月第 1 次印刷

开本 850 × 1168 毫米 1/32

印张 4.75

字数 100 千字

印数 1-3 000 册

定价 6.90 元

主编 王梓坤 张乃达

责任编辑 侯耀宗
封面设计 马天羽

中学数学思维方法丛书

主 编 王梓坤 张乃达

编 委 (以姓氏笔画为序)

王梓坤 过伯祥 杨世明

张乃达 蒋 声

本册作者 尤善培

序

早在 1995 年 8 月,大象出版社(原河南教育出版社)在扬州举办了一个座谈会,邀请十余位教学水平很高的数学教师参加,商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为,这是一个富有创见的倡议,因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础,又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书,对中学数学教学,无疑会是非常有益的;而更主要的,广大的中学生,将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面,学到很多的东西。这对将来无论做什么工作,都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景,总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣,而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼,必须东拼西凑,多一只兔便比鸡多了两条腿,好不容易才能做出一题。而学过代数,这类问题便变得极为简单。做几何题也一样,必须具体问题具体解决,而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积,如果不用积分便会相当麻烦。由此可见,方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研,从事创新、发现或发明,那就更应重视方法,特别是思维方法。没有新思想,没有新方法,要超过前人是很难的。有鉴于此,一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们,要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 G. Pólya 写过几种关于数学思想方法的书,如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》,后来都成为世界名著,很受欢迎。

学习任何一门科学,都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来,前者比较容易。因为知识已经成熟,而且大都已经过前人整理,成为循序渐进的教材。但能力则不然,那是捉摸不定、视之无形的东西,主要靠自己去思考,去探索,去总结,去刻苦锻炼。老师的培养固然重要,但只能起辅导作用。只可意会,不可言传,而有时甚至连意会都做不到。正如游泳,只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师,则应无保留地传授自己的经验和体会,尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗:“鸳鸯绣出凭君看,不把金针度与人。”意思是说知识可以输出,但能力不可传授。前一句话意思很好,后一句应改为“急把金针度与人”。这套丛书,正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法,可分为演绎与归纳两大类。在数学中,演绎极为重要,而归纳则基本上用不上,除了 C. F. Gauss 等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后,这种情况已大为改

观。混沌学主要靠计算机而发展起来,数学模拟也主要靠计算机。再者,以往数学中极少实验,还是由于计算机的广泛使用,现在不少数学系已有了实验室,特别是统计实验室。可以期望,计算机对改变数学的面貌,对改善数学的思维方法,都会起到越来越大的作用。

在此之前,我国已经出版了几本关于数学方法的书,它们都各有特色。如就规模之大,选题之广,论述之精而言,这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中,将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

99.7.6.

引 言

你听过“空城计”的故事吗？

那是《三国演义》中的一个惊心动魄、流芳千古的故事。

相传三国时代，蜀国丞相兼军师诸葛亮带兵阳平（今西阳平关）时，派大将魏延领兵去攻打魏国，只留少数老弱军士守城，不料，魏国大都督司马懿率大队人马杀来，如果靠几个老弱军士出城应战，只能是以卵击石，怎么办？

诸葛亮经过紧张而又冷静地思考之后，想出了一条妙计。他传令大开城门，让老弱军士在城门口洒扫道路，自己则登上城楼，摆好香案，端坐弹琴，态度从容，琴声优雅。

司马懿来到城前，见此情景，顿生疑惑，他想：诸葛亮一生精明过人，谨慎有余，从不冒险。今天如此这般，与其一生表现矛盾，恐怕城内必有伏兵，故意诱我入城，决不能中计也！

于是，急命退兵。

人们无不赞叹运筹帷幄、智慧超群的诸葛亮！

又如火烧赤壁一仗，基本策略不过是诸葛亮和周瑜掌心里写的那一个“火”字。围绕着“火”，展开了草舟借箭、群英会、连环计、

苦肉计、“借”东风，火烧赤壁、华容道等一连串的激烈的斗智斗勇，打败了曹操的几十万大军，取得了战役的最后胜利。

人们又情不自禁地赞颂冲锋陷阵、英勇无比的关羽、张飞、赵子龙等将士。

如果把数学解题比作打仗，为了攻克一个又一个数学堡垒，那么我们自己不但要扮演勇猛无比的将士，还要扮演足智多谋的诸葛亮。在数学解题的思维活动中，我们的“将士”就是数学基础知识，我们的“兵器”就是数学基本方法，而调动数学基础知识、动用数学基本方法的数学思维方法就是我们的用兵之法。

引以自豪的是，我们的中学生竟然和数学家一样，天天都在解数学题，在进行着数学思维活动。这种实实在在、富有情趣的思维活动为我们提供了既需运筹帷幄又要冲锋陷阵的实践机会，这种扣人心弦、扑朔迷离的思维活动激荡着我们思维的琴弦，增长着我们的才干。

但是我们自己要扮演好二重角色并不是简单的事情。我们自己既是指挥者，又是战斗者，更重要的是要对自己的思维活动的目的、思维的方式和方法、思维的进程、思维的途径随时进行评价，自己既是评价者，又是第三个角色的扮演者。

也就是说，假如你在足球比赛场上，你应该既是运动员，又是教练员，还是评论员。

如果真是这样，你的足球水平就会大大提高的。

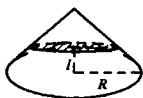
好有一比：在数学思维活动中，我们好像在明月当空的夜晚，独自一人坐在石凳上，伏着石桌，斟满杯中酒，举杯畅饮，让月光尽情地照耀着自己的身影，这正是

举杯邀明月，对影成三人。

目 录

引言	(1)
一、数学思维中的反思	(1)
1. 旧事重提	(2)
2. 思考的思考	(11)
3. 前进中的探索	(22)
4. 反思还在继续	(34)
二、数学思维中的自我	(46)
1. 古老的传说	(47)
2. 认识自己	(50)
3. 三思而后行	(55)
4. 天高可问	(63)
三、数学思维中的目标	(73)
1. 紧紧盯住目标	(74)
2. 明确目标	(80)
3. 逐步逼近	(86)
4. 大胆猜测	(93)

四、数学思维中的监控	(103)
1. 明确大方向	(104)
2. 随机应变	(109)
3. 没有平坦的大道	(118)
4. 精益求精	(128)
主要参考书目	(137)



一、数学思维中的反思

一个人从青少年时期开始,对思维的反省性、监控性的特点就逐渐显露出来,而且越来越明显.当他们能意识到自己智力活动的过程并设法加以控制时,就可以使自己的思路更加清晰,判断更趋正确.如果学生在解题的过程中,能够说出思考过程,实际上就是在一定程度上对其思维的方式或手段进行调节的结果.这种调控思维方式或手段的学习方法,往往使人的解题水平稳步提高,而这个水平就从某个方面反映了人的认知能力.当思维的目标确定以后,作为思维主体——人,如果他有认知能力的话,就会在不同程度上产生认识的体验,从而提出相应的思维策略,并能对它不断改进、完善.在数学教学中,我们可以让学生通过自我的控制、调节,达到提高他们思维水平,并使之向优化的方向发展.

1. 旧事重提

(1) 事前没有想到

这件事已经过去十几年了,却始终铭刻在我的脑海里,难以忘怀,因为我在学生面前“挂了黑板”,出了洋相,又从难堪的窘迫中解脱出来,发现了一些新的道理,回想起来,仍记忆犹新,余味无穷.

曾经有这样一道题,那是一道全国高中数学联赛题.

题目:设 $f(x) = ax^2 + bx$, 且 $1 \leq f(-1) \leq 2, 2 \leq f(1) \leq 4$, 求证:
 $5 \leq f(-2) \leq 10$

在一节数学课上,我准备讲解这道题目,于是开始实施事先准备好的教案.

下面是一段教学实录:

师:要证明本题,应首先将条件和结论变得更具体一些,怎样变呢?

生:因为 $f(x) = ax^2 + bx$, 则已知条件就是

$$1 \leq a - b \leq 2, \quad \text{①}$$

$$2 \leq a + b \leq 4, \quad \text{②}$$

$$\text{结论为: } 5 \leq 4a - 2b \leq 10 \quad \text{③}$$

师:那么,怎样从①②推出③呢?

(学生开始投入了紧张思考,未等学生思考好,出于教师的表现欲,又开始了讲解)

师:只要将①和②相加,得 $3 \leq 2a \leq 6$, 再与 $2 \times \text{①}$ 相加即得,为

什么呢？这是因为 $f(-2) = 4a - 2b = 2a + 2(a - b)$ 。

（学生如痴如醉，投来敬佩的目光，课上到这里，我不免有些得意）

忽然，有一位同学甲举手要求发言，我微笑着示意他发言。

生甲：老师，我也像你一样，拼拼凑凑，却得到了另外一个结果。

师：那肯定是你搞错了。

（我没有兴致去看他的解答，想敷衍过去）

生甲：我肯定没有搞错。

师：那你就上来把过程写在黑板上。

下面是学生的板演内容：

$$\because f(x) = ax^2 + bx, \quad 1 \leq f(-1) \leq 2, \quad 2 \leq f(1) \leq 4,$$

$$\therefore 1 \leq a - b \leq 2. \quad \text{①}$$

$$2 \leq a + b \leq 4. \quad \text{②}$$

$$\text{①} + \text{②} \quad \text{得} \quad 3 \leq 2a \leq 6. \quad \text{即}$$

$$\frac{3}{2} \leq a \leq 3. \quad \text{③}$$

$$\text{①} - \text{②} \quad \text{得} \quad -3 \leq -2b \leq 0, \quad \text{即}$$

$$0 \leq b \leq \frac{3}{2}. \quad \text{④}$$

$$\text{③} \times \text{④} + \text{④} \times (-2), \quad \text{得} \quad 3 \leq 4a - 2b \leq 12.$$

$$\text{即} \quad 3 \leq f(-2) \leq 12.$$

我要求全体学生认真研究他的求解过程，究竟错在什么地方。

这时，教室内叽叽喳喳，一片混乱，可是，我愣住了，生甲的解题过程没有错误，问题出在什么地方？

立刻，我成了学生目光的聚焦点，我当堂又揭不开其中的奥