

升大學權威參考書

高中微積分300題演習

—觀念・解法—

張崇芳 編譯

升大學權威參考書

高中微積分300題演習

—觀念·解法—

張崇芳 編譯

格致圖書公司 印行

~~~~~  
{ 版權所有 {  
{ 翻印必究 {  
~~~~~

高中微積分 300 題演習

編譯者：張崇芳

出版者：格致圖書有限公司

總經銷：儒林圖書有限公司

地址：台北市重慶南路一段121號8樓23室

電話：3118971-3 3144000

郵政劃撥：0106792-1號

吉豐印刷廠有限公司承印

板橋市三民路二段居仁巷一弄53號

行政院新聞局局版台業字第4336號

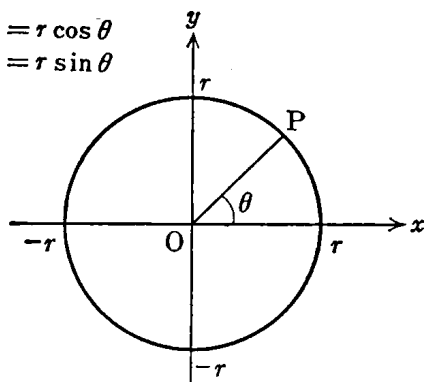
中華民國七十七年十二月初版

定價新台幣 180 元正

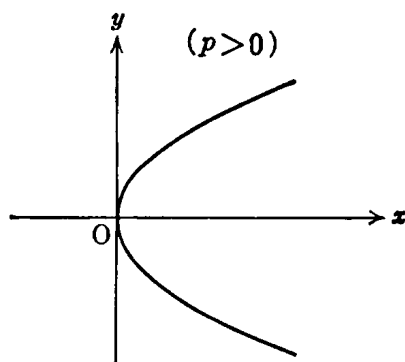
< 曲線方程式及其圖形 >

圓 $x^2 + y^2 = r^2$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

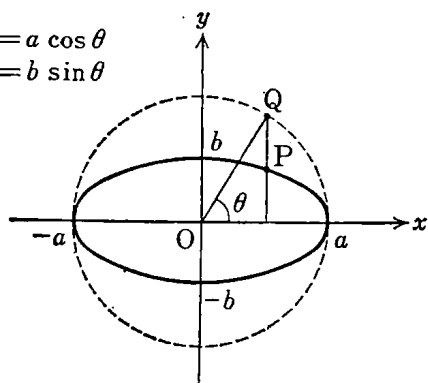


拋物線 $y^2 = 4px$



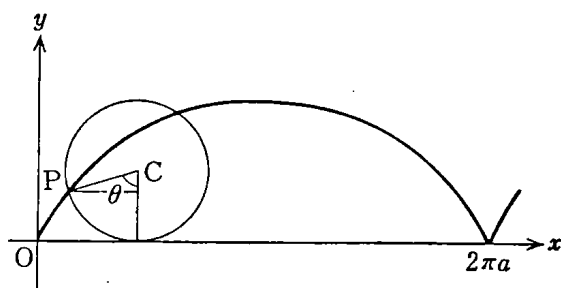
橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$



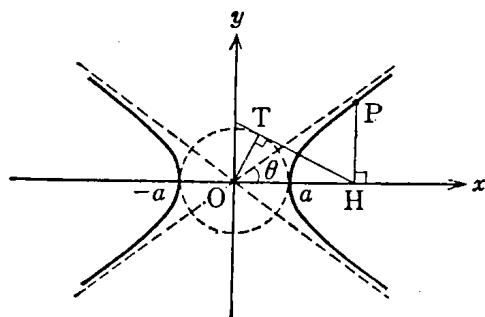
擺線

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$



雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{cases}$$



星形線

$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}, \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

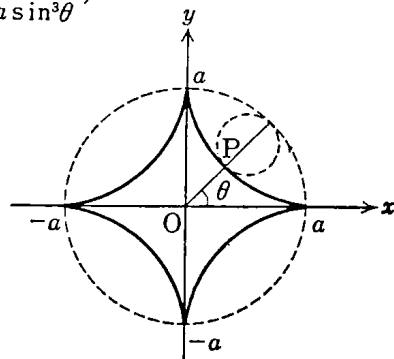
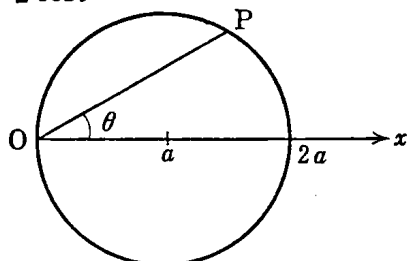


圖 (1)

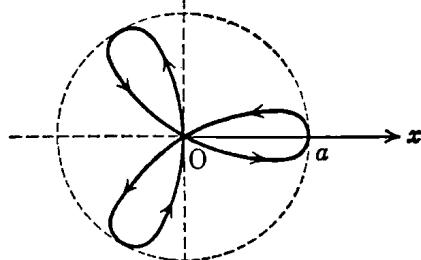
$$r = 2 \cos \theta$$



(註) $r = a, r = 2a \sin \theta$ 也是
圓的極方程式

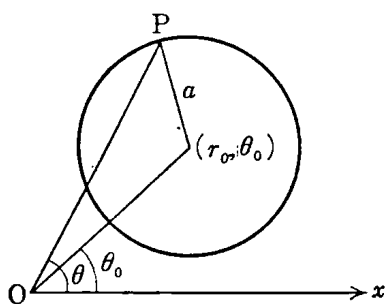
三瓣玫瑰線

$$r = a \cos 3\theta$$



也是三瓣玫瑰
(註) $r = a \sin 3\theta$ 線的方程式

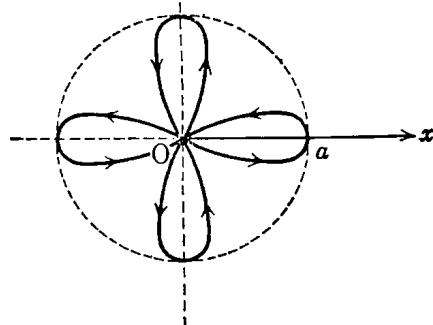
圖 (2) $r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = a^2$



(註) 通過極點時
 $r = 2a \cos(\theta - \theta_0)$

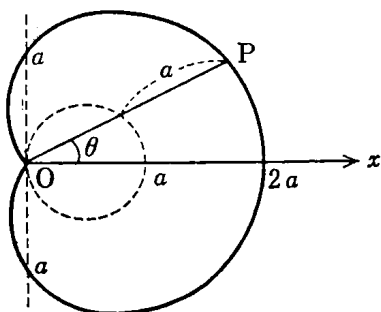
四瓣玫瑰線

$$r = a \cos 2\theta$$



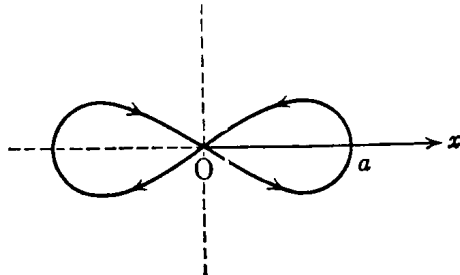
心臟線

$$r = a(1 + \cos \theta)$$



雙紐線

$$r^2 = a^2 \cos^2 2\theta$$



❖ 對數的性質

$\log_a x = y \iff a^y = x$
(底不是 1 的正數
真數的正數)

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^m = m \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

❖ 數列的和

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

❖ 三角函數的性質

< 正弦定理 >

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

R: $\triangle ABC$ 的外接圓的半徑

餘弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

平方關係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

< 加法定理 >

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

($\pm$ 順序相同)

< 三角函數的組合 >

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{ただし, } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

< 倍角公式 >

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

<半角公式>

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

<3倍角公式>

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

<和, 差 $\rightleftharpoons$ 積>

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \beta$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta$$

$$= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta$$

$$= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

<一般解>

$\sin x = a$ ($|a| \leq 1$) の解

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \quad (n: \text{整数})$$

$$\left(\sin \alpha = a \text{ ㄒ, } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$\cos x = a$ ($|a| \leq 1$) の解

$$x = 2n\pi \pm \alpha \quad (n: \text{整数})$$

$$(\cos \alpha = a \text{ ㄒ, } 0 \leq \alpha \leq \pi)$$

$\tan x = a$ の解 $x = n\pi + \alpha$ ($n: \text{整数}$)

$$\left(\tan \alpha = a \text{ ㄒ, } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

<常用的公式>

$$\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

設 $\tan \frac{\theta}{2} = t$ とおくと,

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

設 $\tan \theta = t$ とおくと,

$$\sin^2 \theta = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2}$$

目錄

第一章 函數的極限與連續

§ 1 函數	1
§ 2 函數的極限	4
整數函數、分數函數、無理函數的極限	6
三角函數的極限	13
指數函數、對數函數的極限	18
決定係數的問題	21
用極限表示的函數	22
圖形的極限	25
§ 3 函數的連續	34
函數的連續	36
中間值定理	41

第二章 導函數

§ 1 平均改變率	45
§ 2 微分係數（改變率）	47
§ 3 導函數	52
§ 4 可微分	54
§ 5 平均值定理	56

第三章 導函數的計算與微分法

§ 1 基本公式	61
----------	----

$y = x^n$ (n 爲有理數), $y = k$ (k 爲常數) 的導函數	61
三角函數的導函數	66
指數函數、對數函數的導函數	68
§ 2 微分法	69
合成函數的微分法	69
隱函數的微分法	73
反函數的微分法	74
對數微分法	77
參數式表示的函數微分法	80
§ 3 高階導函數	82

第四章 導函數的應用 (I)

§ 1 切線、法線的應用	89
曲線上點的切線	89
已知斜率的切線	92
曲線外一點的切線	95
有關切線的各種問題	96
§ 2 函數的遞增、遞減與函數的圖形	104
函數的遞增、遞減	104
極大、極小(1)	106
函數的圖形	111
極大、極小(2)	133
最大、最小	134

第五章 導函數的應用 (II)

§ 1 關於圖形的最大、最小問題	141
長度的最大、最小	141

面積的最大、最小·····	144
體積的最大、最小·····	149
其他的最大值、最小值·····	154
§ 2 方程式的根 ·····	155
實根的個數·····	156
根的存在證明·····	166
關於重根的問題·····	168
§ 3 不等式的應用 ·····	169
不等式的證明·····	169
決定使不等式成立的值·····	175
§ 4 近似式與近似值 ·····	177
一次近似式·····	177
二次近似式·····	183
近似值與誤差·····	184
§ 5 速度、加速度 ·····	189
直線上的運動·····	189
平面上點的運動·····	194
§ 6 關於增加率的問題 ·····	198
面積的增加率·····	198
體積的增加率·····	200

積分

第一章 定積分與不定積分

§ 1 區分求積法	203
面積	203
體積	205
§ 2 定積分	208
定積分的定義	208
定積分的性質	210
積分的平均值定理	214
§ 3 定積分與不定積分的關係	215
不定積分	215
不定積分與定積分的關係	217

第二章 不定積分的計算

§ 1 不定積分的計算	219
x^n 的不定積分	219
$\frac{1}{x}$ 的不定積分	222
三角函數的不定積分(1)	223
e^x 的不定積分	225
§ 2 置換積分法	226
$f(ax+b)$ 的不定積分	226
$f(g(x))g'(x)$ 的不定積分	231
三角函數的不定積分(2)	233

a^x 的不定積分	238
§ 3 部分積分法	239
$p'(x) \log x$ 的不定積分	239
$p(x)e^x, p(x)\sin x$ 的不定積分	241
$e^x \sin x$ 的不定積分	244
§ 4 各種不定積分	245
有理函數的不定積分	245
利用特殊置換的積分	248
遞迴式	253
§ 5 不定積分整理	256

第三章 定積分的計算

§ 1 基本計算	265
§ 2 定積分的置換積分法	265
§ 3 置換為三角函數	277
$\sqrt{a^2 - x^2}$ 型	277
$\frac{1}{x^2 + a^2}$ 型	279
§ 4 定積分的部分積分法	280
§ 5 各種定積分	282
偶函數、奇函數的定積分	282
需要分成不同情形加以討論的定積分	284
絕對值與參數 (parameter) 的定積分	287
§ 6 遞迴式	290

第四章 定積分的應用

§ 1 面積	295
--------------	-----

直角座標上的面積·····	295
參數方程式的面積·····	324
極座標上的面積·····	329
§ 2 體積·····	332
與定直線垂直的兩平面所切割的立體體積·····	332
一條曲線環繞 x 軸或 y 軸旋轉所形成旋轉體的體積·····	335
兩曲線所圍圖形環繞 x 軸或 y 軸旋轉所形成旋轉體的體積 ·····	340
參數方程式、極方程式所表示的曲線旋轉體的體積·····	349
§ 3 平面曲線的長度·····	355
§ 4 速度、加速度與位移、距離·····	360
直線上的運動·····	360
平面上的運動·····	364

第五章 有關定積分的各種問題

§ 1 定積分的極限值·····	371
§ 2 求 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt$ 的問題·····	373
§ 3 函數的決定·····	375
§ 4 最大、最小以及極大、極小·····	380
§ 5 數列的極限值·····	384
§ 6 等式證明問題·····	390
§ 7 不等式的問題·····	392
§ 8 舒瓦茲 (schwarz) 不等式 ·····	397
§ 9 定積分的近似值·····	400

第 1 章

函數的極限與連續

§ 1 函數

- 函數的定義 { 假定有二個變數 x 、 y ，對於每個 x 值，就有一個，而且只有一個 y 值與之對應，此時 x 與 y 之間具有函數關係， y 稱爲 x 的函數， x 稱爲變數。
- 函數符號 { y 爲 x 的函數時，用 $y=f(x)$ ， $y=g(x)$ 等來表示， $x=a$ 時的 y 值用 $f(a)$ ， $g(a)$ 等來表示。
- 變域、定義域、對應域 (值域) { 函數 $y=f(x)$ 中， x 與 y 值的範圍稱爲變域， x 的變域稱爲函數 $y=f(x)$ 的定義域，函數 y 的變域稱爲函數 $y=f(x)$ 的對應域。
- 開區間 { 滿足 $a < x < b$ 的 x 值範圍用符號 (a, b) 表示。
- 閉區間 { 滿足 $a \leq x \leq b$ 的 x 值範圍用符號 $[a, b]$ 表示。
- 顯函數 { 以 $y=f(x)$ 的形式表示的函數稱爲顯函數。
- 隱函數 { 以 $f(x, y)=0$ 的形式表示的函數稱爲隱函數。例如， $y=-2x+3$ ， $y=\sin x$ 爲顯函數， $2x+y-3=0$ ， $x^2+y^2-1=0$ 爲隱函數。
- 反函數 { 求解函數 $y=f(x)$ ，得出 $x=g(y)$ 。此 $x=g(y)$ 稱爲 $y=f(x)$ 的反函數。函數 $y=f(x)$ 及其反函數 $y=g(x)$ 的圖形對稱直線 $y=x$ 。
- 合成函數 { 以二個函數 $y=f(t)$ ， $t=g(x)$ 的形式表示的函數

■ 偶函數

■ 奇函數

■ 周期函數

y ，稱為變數 x 的合成函數，以 $y=f\{g(x)\}$ 表示之。

x 的函數 $f(x)$ 對所有的 x 值均有 $f(-x)=f(x)$ 的關係，謂之偶函數。偶函數的圖形對稱 y 軸。

x 的函數 $f(x)$ 對所有的 x 值均有 $f(-x)=-f(x)$ 的關係，謂之奇函數。奇函數的圖形對稱原點。

假定有正常數 p 對所有的 x 值均有 $f(x+p)=f(x)$ 的關係，則函數 $f(x)$ 稱為以 p 為周期的周期函數。

參考事項

周期之中最小的正數稱為基本周期。

【例題】假定函數 $f(x)$ 滿足下面的條件。

(a) 就任意實數 x, y , $f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ 。

(b) $f(1)=1$ 。

請回答下面的問題。

① 證明 $f(0)=2$ 。

② 試求 $f(2), f(3), f(4), f(5)$ 的值。

③ 對任意實數 x ，證明 $f(x+6)=f(x)$ 。

【解說】因為條件(a)對任意的實數 x, y 都成立，所以可代入任何數值。

① 題將 $x=1, y=0$ 代入。

② 題將 $y=1$ 代入。

【解答】①(a) 將 $x=1, y=0$ 代入，得出

$$f(1)f(0)=f(1)+f(1)$$

因為 $f(1)=1$ ，所以 $f(0)=2$

②(a)中將 $y=1$ 代入，得出 $f(x)f(1)=f(x+1)+f(x-1)$

因為 $f(1)=1$ ，所以 $f(x+1)=f(x)+f(x-1)$ 。

因為此式對任意的 x 都成立，所以

設 $x=1$ 時， $f(2)=f(1)+f(0)=-1$

設 $x=2$ 時， $f(3)=f(2)+f(1)=-2$

設 $x=3$ 時， $f(4)=f(3)+f(2)=-1$

設 $x=4$ 時， $f(5)=f(4)+f(3)=1$

答： $f(2)=-1$ ， $f(3)=-2$ ， $f(4)=-1$ ， $f(5)=1$

③依 $f(x+1)=f(x)+f(x-1)$ ，

$$\begin{aligned} f(x+6) &= f(x+5) + f(x+4) = \{ f(x+4) + f(x+3) \} + f(x+4) \\ &= 2f(x+4) + f(x+3) = \{ 2f(x+3) + f(x+2) \} + f(x+3) \\ &= 3f(x+3) + f(x+2) = \{ 3f(x+2) + f(x+1) \} + f(x+2) \\ &= 4f(x+2) + f(x+1) = \{ 4f(x+1) + f(x) \} + f(x+1) \\ &= 5f(x+1) + f(x) = 6f(x) \end{aligned}$$

因此，對任意實數 x 均有 $f(x+6)=6f(x)$ 的關係。

【問題 1】請說明下面函數的定義域、對應域。

① $y=\sqrt{x-x^2}$ ② $x^2-y^2=1$

【問題 2】請從下面的函數(1)~(5)中對所有的 x 值

①選出等式 $f(x)=f(-x)$ 成立的函數。

②選出等式 $f(x)=-f(-x)$ 成立的函數。

(1) $f(x)=x^2+1$ (2) $f(x)=x^3+x$

(3) $f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$ ($x \neq 1$ ， $x \neq -1$)

(4) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ ($a>0$ ， $a \neq 1$)

(5) $f(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$ ($a>0$ ， $a \neq 1$ ， $x \neq 0$)

(解)

$$1. \textcircled{1} 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} x \leq -1, x \geq 1, y \text{ 爲所有的實數}$$

$$\begin{aligned} 2. \textcircled{3} f(-x) &= \log_a(-x + \sqrt{1+x^2}) = \log_a \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \\ &= \log_a (x + \sqrt{1+x^2})^{-1} = -\log_a (x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} f(-x) &= \frac{1}{a^{-x}-1} + \frac{1}{2} = \frac{-a^x}{a^x-1} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x+1}{2(a^x-1)} \\ &= -\frac{1}{a^x-1} - \frac{1}{2} = -f(x) \end{aligned}$$

因此 $\textcircled{1}$ 成立的函數有(1), (3)

$\textcircled{2}$ 成立的函數有(2), (4), (5)

§ 2 函數的極限

在微分、積分中經常需要取不同的 x 值無限趨近一定的 a 值來看函數 $f(x)$ 的狀態。這個 $f(x)$ 的狀態就稱爲函數的極限。

當 x 的值爲正，而且無限大時，或 x 的值爲負而且無限小時，函數 $f(x)$ 的狀態也稱爲函數的極限。

■ 極 限

x 的值無限趨近 a 時，若 $f(x)$ 的值無限趨近一定的值 A ，則 A 稱爲 x 趨近 a 時 $f(x)$ 的極限值。用符號表示如下：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ 或 } x \rightarrow a \text{ 時 } f(x) \rightarrow A$$

當 x 的值無限趨近 a 時， $f(x)$ 的值若爲正，而且無限大，則稱 $f(x)$ 爲正無限大發散。用符號表示如下：