升大學權威參考書

高中微積分300題演習

—觀念・解法—

張崇芳　編譯

升大學權威參考書

高中微積分300題演習

——觀念・解法——

張崇芳　編譯

格致圖書公司　印行

高中微積分300題演習

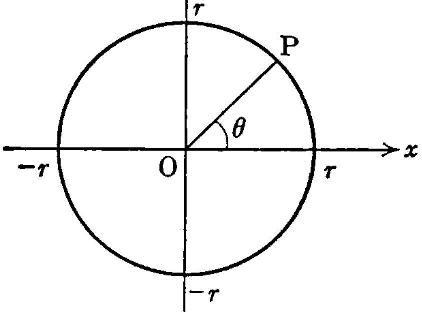
編 譯 者 ： 張 崇 芳
出 版 者 ： 格 致 圖 書 有 限 公 司
總 經 銷 ： 儒 林 圖 書 有 限 公 司
地　　址 ： 台北市重慶南路一段121號8樓23室
電　　話 ： 3118971-3 3144000
郵政劃撥 ： 0106792-1號
吉豐印刷廠有限公司承印
板橋市三民路二段居仁巷一弄53號

行政院新聞局局版台業字第4336號
中華民國七十七年十二月初版
定價新台幣 180 元正

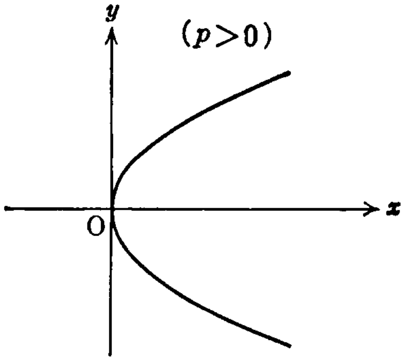
<曲線方程式及其圖形>

圓 $x^2+y^2=r^2$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

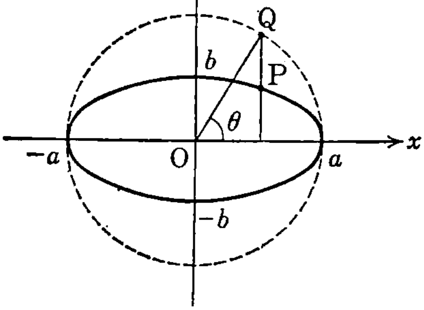


拋物線 $y^2=4px$



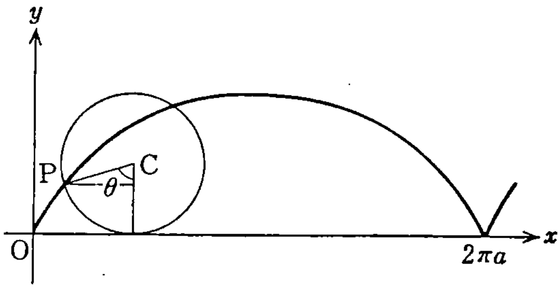
橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$$



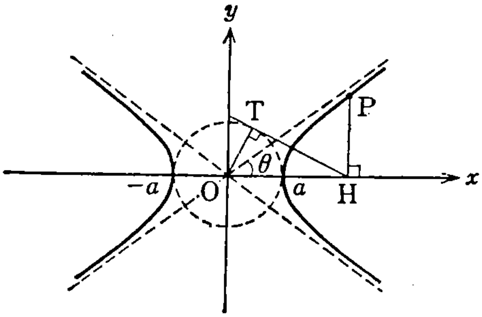
擺線

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$



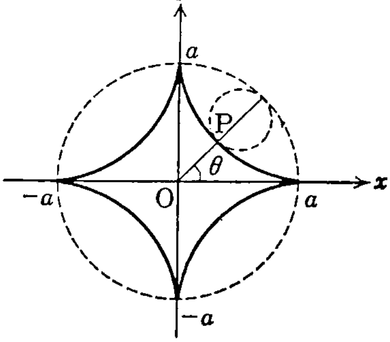
雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\begin{cases} x=a\sec\theta \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$



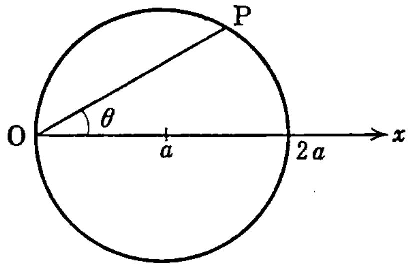
星形線

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases},\quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$



圓 (1)

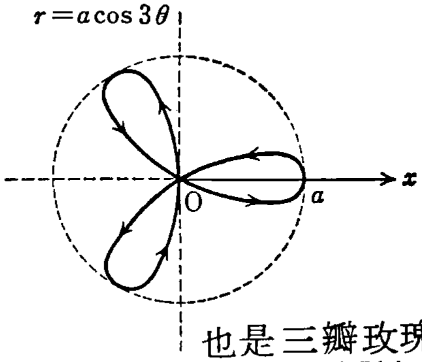
$r=2\cos\theta$



（註）$r=a, r=2a\sin\theta$ 也是圓的極方程式

三瓣玫瑰線

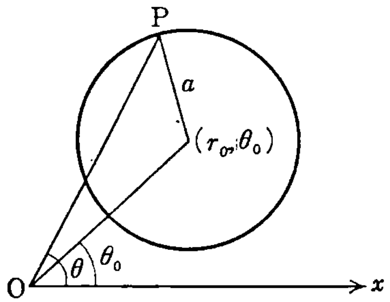
$r=a\cos 3\theta$



（注）$r=a\sin 3\theta$ 也是三瓣玫瑰線的方程式

圓 (2)

$r^2-2r_0r\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2=a^2$

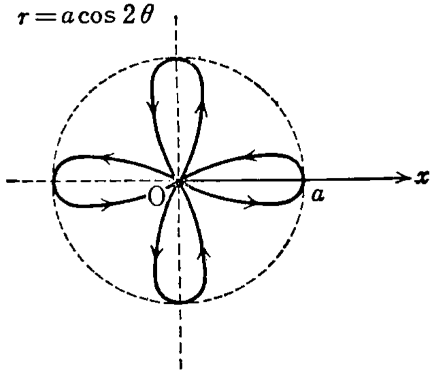


（註） 通過極點時

$r=2a\cos(\theta-\theta_0)$

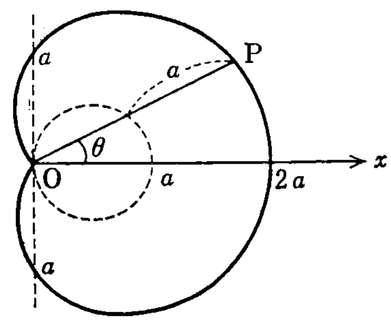
四瓣玫瑰線

$r=a\cos 2\theta$



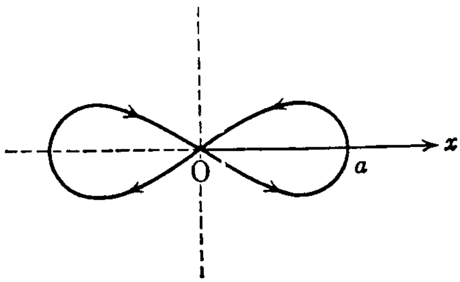
心臟線

$r=a(1+\cos\theta)$



雙紐線

$r^2=a^2\cos^2 2\theta$



❖ 對數的性質

$\log_a x = y \rightleftarrows a^y = x$

（底不是 1 的正數
眞數的正數）

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^m = m \log_a x$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

❖ 數列的和

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

❖ 三角函數的性質

＜正弦定理＞

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

R：△ABC 的外接圓的半徑

餘弦定理

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

平方關係

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

＜加法定理＞

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

（$\pm$ 順序相同）

＜三角函數的組合＞

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

＜倍角公式＞

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

<半角公式>

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

<3 倍角公式>

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

<和，差 ⇄ 積)

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

<一般解>

$\sin x=a$ $(|a|\leqq 1)$ 的解

$x=n\pi+(-1)^n\alpha$ （n ：整数）

$\left(\sin\alpha=a\right.$ で， $\left.-\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos x=a$ $(|a|\leqq 1)$ 的解

$x=2n\pi\pm\alpha$ （n ：整数）

（$\cos\alpha=a$ で， $0\leqq\alpha\leqq\pi$）

$\tan x=a$ 的解 $x=n\pi+\alpha$ （n ：整数）

$\left(\tan\alpha=a\right.$ で， $\left.-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

<常用的公式>

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

設 $\tan\frac{\theta}{2}=t$ とおくと，

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$

設 $\tan\theta=t$ とおくと，

$$\sin^2\theta=\frac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2\theta=\frac{1}{1+t^2}$$

目　錄

第一章　函數的極限與連續

第二章　導函數

第三章　導函數的計算與微分法

第四章　導函數的應用（I）

第五章　導函數的應用（II）

積分

第一章　定積分與不定積分

第二章　不定積分的計算

第三章　定積分的計算

第四章　定積分的應用

第五章 有關定積分的各種問題

第1章 函數的極限與連續

§ 1 函數

■函數的定義　假定有二個變數 x 、 y ，對於每個 x 值，就有一個，而且只有一個 y 值與之對應，此時 x 與 y 之間具有函數關係， y 稱為 x 的函數， x 稱爲變數。

■函數符號　y 爲 x 的函數時，用 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 等來表示， $x=a$ 時的 y 值用 $f(a)$, $g(a)$ 等來表示。

■變域、定義域、對應域（值域）　函數 $y=f(x)$ 中， x 與 y 值的範圍稱爲變域， x 的變域稱爲函數 $y=f(x)$ 的定義域，函數 y 的變域稱爲函數 $y=f(x)$ 的對應域。

■開區間　滿足 $a<x<b$ 的 x 值範圍用符號 (a, b) 表示。

■閉區間　滿足 $a\leqq x\leqq b$ 的 x 值範圍用符號 $[a, b]$ 表示。

■顯函數　以 $y=f(x)$ 的形式表示的函數稱爲顯函數。

■隱函數　以 $f(x, y)=0$ 的形式表示的函數稱爲隱函數。例如， $y=-2x+3$, $y=\sin x$ 爲顯函數， $2x+y-3=0$ ， $x^2+y^2-1=0$ 爲隱函數。

■反函數　求解函數 $y=f(x)$ ，得出 $x=g(y)$ 。此 $x=g(y)$ 稱爲 $y=f(x)$ 的反函數。函數 $y=f(x)$ 及其反函數 $y=g(x)$ 的圖形對稱直線 $y=x$ 。

■合成函數　以二個函數 $y=f(t)$, $t=g(x)$ 的形式表示的函數

y，稱為變數 x 的合成函數，以 $y=f\{g(x)\}$ 表示之。

■偶函數 x 的函數 $f(x)$ 對所有的 x 值均有 $f(-x)=f(x)$ 的關係，謂之偶函數。偶函數的圖形對稱 y 軸。

■奇函數 x 的函數 $f(x)$ 對所有的 x 值均有 $f(-x)=-f(x)$ 的關係，謂之奇函數。奇函數的圖形對稱原點。

■周期函數 假定有正常數 p 對所有的 x 值均有 $f(x+p)=f(x)$ 的關係，則函數 $f(x)$ 稱為以 p 為周期的周期函數。

參考事項 周期之中最小的正數稱為基本周期。

【例題】 假定函數 $f(x)$ 滿足下面的條件。

(a)就任意實數 x，y，$f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$。

(b) $f(1)=1$。

請回答下面的問題。

①證明 $f(0)=2$。

②試求 $f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，$f(5)$ 的值。

③對任意實數 x，證明 $f(x+6)=f(x)$。

【解說】 因為條件(a)對任意的實數 x，y 都成立，所以可代入任何數值。

①題將 $x=1$，$y=0$ 代入。

②題將 $y=1$ 代入。

【解答】 ①(a)將 $x=1$，$y=0$ 代入，得出

$$f(1)f(0)=f(1)+f(1)$$

因為 $f(1)=1$，所以 $f(0)=2$

②(a)中將 $y=1$ 代入，得出 $f(x)f(1)=f(x+1)+f(x-1)$

因為 $f(1)=1$，所以 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$。

因為此式對任意的 x 都成立，所以

設 $x=1$ 時，$f(2)=f(1)-f(0)=-1$

設 $x=2$ 時，$f(3)=f(2)-f(1)=-2$

設 $x=3$ 時，$f(4)=f(3)-f(2)=-1$

設 $x=4$ 時，$f(5)=f(4)-f(3)=1$

答： $f(2)=-1$，$f(3)=-2$，$f(4)=-1$，$f(5)=1$

③依 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，

$$f(x+6)=f(x+5)-f(x+4)=\{f(x+4)-f(x+3)\}-f(x+4)=-f(x+3)=-\{f(x+2)-f(x+1)\}=-\{f(x+1)-f(x)-f(x+1)\}=f(x)$$

因此，對任意實數 x 均有 $f(x+6)=f(x)$ 的關係。

【問題 1 】 請說明下面函數的定義域、對應域。

① $y=\sqrt{x-x^2}$　　② $x^2-y^2=1$

【問題 2 】 請從下面的函數(1)～(5)中對所有的 x 值

①選出等式 $f(x)=f(-x)$ 成立的函數。

②選出等式 $f(x)=-f(-x)$ 成立的函數。

(1) $f(x)=x^2+1$　　(2) $f(x)=x^3+x$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$ $(x\neq 1,\ x\neq -1)$

(4) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$　$(a>0,\ a\neq 1)$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$ $(a>0,\ a\neq 1,\ x\neq 0)$

（解）

1. ① $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}$

② $x \leqq -1$，$x \geqq 1$，y 爲所有的實數

2. (3) $f(-x) = \log_a(-x+\sqrt{1+x^2}) = \log_a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$= \log_a(x+\sqrt{1+x^2})^{-1} = -\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$

$= -f(x)$

(5) $f(-x) = \frac{1}{a^{-x}-1} + \frac{1}{2} = \frac{-a^x}{a^x-1} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x+1}{2(a^x-1)}$

$= -\frac{1}{a^x-1} - \frac{1}{2} = -f(x)$

因此①成立的函數有(1)，(3)

②成立的函數有(2)，(4)，(5)

§ 2 函數的極限

在微分、積分中經常需要取不同的 x 值無限趨近一定的 a 值來看看函數 $f(x)$ 的狀態。這個 $f(x)$ 的狀態就稱爲函數的極限。

當 x 的值爲正，而且無限大時，或 x 的值爲負而且無限小時，函數 $f(x)$ 的狀態也稱爲函數的極限。

■極　限

x 的值無限趨近 a 時，若 $f(x)$ 的值無限趨近一定的值 A，則 A 稱爲 x 趨近 a 時 $f(x)$ 的極限值。用符號表示如下：

$\lim_{x \to a} f(x) = A$ 或 $x \to a$ 時 $f(x) \to A$

當 x 的值無限趨近 a 時，$f(x)$ 的值若爲正，而且無限大，則稱 $f(x)$ 爲正無限大發散。用符號表示如下：