JP

高考数学精品系列

代数

解题思路与典型问题

战维华　王尧
梅宏霓　周琥　著

高考数学精品系列之

代　　数
解题思路与典型问题

战维华　王　尧
梅宏霓　周　琥　著

陕西人民教育出版社

（陕）新登字 004 号

高考数学精品系列之
代　数
解题思路与典型问题
战维华　王　尧
梅宏霓　周　琥　著
陕西人民教育出版社出版发行
（西安长安路南段 376 号）
各地新华书店经销　　陕西师大印刷厂印刷
787×1092 毫米　32 开本　10.5 印张　308 千字
1995 年 12 月第 1 版　1995 年 12 月第 1 次印刷
印数：1－6,000
ISBN7－5419－6189－2/G・5438
定　价：8.80 元

前　言

在数学教学大纲及会考、高考说明中，已经明确指出：高中的数学教学使学生掌握数学的基础知识，基本技能和基本的数学思想和方法，培养学生的运算能力、逻辑思维的能力、空间想像能力，以及分析问题和解决问题的能力. 从发展的角度来看，对学生数学能力，逐步提出了较高的要求，并且对学生的考核，也由知识型转向能力型. 因而对中学数学教学和中学生提出一个值得重视又急待解决的问题，那就是，如何使学生完成以“基础”到“能力”的转化，如何提高学生数学能力的问题.

本书编写的宗旨是为了帮助具备了高中数学“三基”的学生，加深和加强对“三基”的理解和应用，进而提高他们的数学素质，使之能力得到培养和锻炼，帮助他们完成从“基础”到“能力”的转化.

本书没有罗列高中代数各章的知识点，也没有逐章逐节系统的叙述，而是精心选编了分别与高中代数各章相呼应的二十几个专题，对高中代数中的难点、重点及近几年来考试的热点问题，通过例题予以归纳、分析，引导学生在思考中深刻理解和掌握基础知识之间的内在联系，提高他们运用数学思想方法的意识和自觉性，使他们数学能力得到训练. 由于各个专题与教材的呼应，既相互联系，又各成系统，因此也适合高中各学段的学生学习参考.

在每一专题的前面，都对本专题的主导思想及在高中代数及后继学习中的地位作了概述，点出本专题的核心问题. 选编的例题，一般包括了知识和方法的综合及应用两个方面，并且有一定的难度，其意在思考，旨在方法，重在分析，以激发学生探索数学问题的情趣. 每一专题选择了适量的习题，供读者练习.

由于编者水平有限，谬误不足之处在所难免，望读者予以批评指正.

编者

1994 年 12 月

目　录

一、集合及其应用

集合的概念及其基本理论，是近代数学的最基本、最普遍的概念和内容之一. 集合的思想方法，不仅渗透于数学领域的各分支，而且也渗透于自然科学的许多领域. 集合的表达已是现代科学中的广泛、准确的语言.

尽管中学阶段所涉及集合理论本身的内容不多，但是正是这种现代化的表示，进一步对方程和不等式的解，有了更明确的表示. 用集合的符号表示量与量，形与形的关系，有力地促进学生思维能力的提高，为进一步学习打下了基础.

由于集合的概念及集合的思想有着广泛的应用性和强烈的渗透性，尤其集合的思想，对于中学数学各章节之间，几何与代数的内在联系，综合运用知识，进一步学习函数起着极大的推动作用. 因此，掌握集合的综合问题，以及运用集合的思想去分析问题、解决问题是极为重要的.

例1 设集合 $M=\{x\mid x=m^2+n^2, m,n\in Z\}$，求证：(1) 若 $p,q\in M$，则 $p\cdot q\in M$；(2) 若 $p,q\in M$，且 $q\neq 0$，则 $\dfrac{p}{q}=a^2+b^2, a,b\in Q$.

分析 本题是元素与集合之间的关系问题. 欲证 $p\cdot q\in M$，只需证 $p\cdot q$ 可以表示为两个整数的平方和即可.

证明 (1) 因为 p、$q\in M$，则设 $p=m_1^2+n_1^2$，$q=m_2^2+n_2^2$，其中 m_1，m_2，n_1，$n_2\in Z$，那么：

$$\begin{aligned}pq &= (m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)\\ &= m_1^2m_2^2+m_1^2n_2^2+m_2^2n_1^2+n_1^2n_2^2\\ &= (m_1^2m_2^2+2m_1m_2n_1n_2+n_1^2n_2^2)\\ &\quad +(m_1^2n_2^2-2m_1m_2n_1n_2+m_2^2n_1^2)\end{aligned}$$

$$= (m_1m_2 + n_1n_2)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2$$

$\therefore\ pq \in M.$

(2)$\because\ p,q \in M$，且 $pq \in M$，设 $pq = m^2 + n^2 (m,n \in Z)$，则

$$\frac{p}{q} = \frac{pq}{q^2} = \frac{m^2+n^2}{q^2} = (\frac{m}{q})^2 + (\frac{n}{q})^2.$$

令$\frac{m}{q} = a, \frac{n}{q} = b$，于是$\frac{p}{q} = a^2 + b^2$，因为 m,n,q 均为整数且 $q \neq 0$，所以 a,b 是有理数，从而，

$$\frac{p}{q} = a^2 + b^2, a,b \in Q.$$

例2 已知 $m,n \in Z$，集合 $M = \{x | x = m + \sqrt{2}n\}$，设 $x,y \in M$.

(1) 试判断 $x+y, x \cdot y$ 和 $\frac{y}{x}(x \neq 0)$ 是否也属于 M?

(2) 求证：对于给定的整数 n，能够使：

$$0 < m + \sqrt{2}n < 1$$

成立的整数 m 的值是唯一的.

解 (1) 设 $x = m_1 + \sqrt{2}n_1, y = m_2 + \sqrt{2}n_2$，其中 $m_1,m_2,n_1,n_2 \in Z$，则：

$x + y = (m_1 + m_2) + \sqrt{2}(n_1 + n_2)$；

$xy = (m_1m_2 + 2n_1n_2) + \sqrt{2}(m_1n_2 + m_2n_1)$；

由于 $m_1,m_2,n_1,n_2 \in Z$，则它们的和，差、积仍为整数，

$\therefore\ x + y \in M, xy \in M.$

$$\because\ \frac{y}{x} = \frac{m_2 + \sqrt{2}n_2}{m_1 + \sqrt{2}n_1} = \frac{(m_1m_2 - 2n_1n_2) + \sqrt{2}(m_1n_2 - m_2n_1)}{m_1^2 - 2n_1^2}$$

由于 $m_1m_2 - 2n_1n_2, m_1n_2 - m_2n_1$ 能否被 $m_1^2 - 2n_1^2$ 整除，是与 m_1,m_2,n_1,n_2 的取值相关的，(例如当 $m_1 = 1, n_1 = 5, m_2 = 1, n_2 = 2$ 时，就不能整除).

$\therefore\ \frac{y}{x} \overline{\in} M.$

(2) 由已知 $0 < m + \sqrt{2}n < 1$，则

$$-\sqrt{2}n < m < 1 - \sqrt{2}n$$

由已知 $n \in Z$，且 $\sqrt{2}$ 是无理数，那么 $-\sqrt{2}n$ 和 $1-\sqrt{2}n$ 都是无理数，并且 $-\sqrt{2}n$ 与 $1-\sqrt{2}n$ 的差是 1，因此它们之间有且仅有一个整数，记为 m，故：在给定整数 n 时，有且仅有一个整数 m，使 $0 < m + \sqrt{2}n < 1$ 成立.

例 3 设集合 S 是满足下列条件的有理数集合：(1) 若 $a \in S, b \in S$，则 $a+b \in S, ab \in S$；(2) 对任一有理数 r，两个关系 $r \in S$，$-r \in S$，$(r \neq 0)$ 有仅且只有一个成立. 证明：S 是由全体正有理数组成的集合.

分析 判断或证明一个对象是否为某一集合的元素，就是要检验这个对象是否具有这个集合的元素所共有的属性. 本题的证明，就是要证明所有正有理数，都满足题设的两个条件. 这是因为满足条件则属于 S，否则就不属于 S.

证明 设任意的 $r \in Q, r \neq 0$，由(2)知，$r \in S$ 与 $-r \in S$ 有且仅有一个成立. 如果 $r \in S$，由(1)知 $r \cdot r \in S$，即 $r^2 \in S$；如果 $-r \in S$，由(1)知 $(-r)\cdot(-r) = r^2 \in S$，从而恒有 $r^2 \in S$.

取 $r = 1$，则 $r \in S$，由(1)知 $1 + 1 = 2 \in S$，进而 $2 + 1 = 3 \in S$，……，则全体正整数都属于 S.

设 $p、q \in N$，由(1)知 $p \cdot q \in S$，又由前证 $(\frac{1}{q})^2 \in S$，所以 $\frac{p}{q} = pq \cdot \frac{1}{q^2}$，由(1)知 $\frac{p}{q} \in S$，从而知一切正有理数都属于 S.

如果有理数 $r < 0$，则 $-r > 0$，由前证有 $-r \in S$，与条件(2)的唯一性矛盾，因此负有理数不属于 S.

如果 $r = 0$，则 $-r = 0 \in S$，与条件(2)的唯一性矛盾，因此 0 不属于 S.

综上所述，S 是由全体正有理数组成的集合.

讲评 以上三个例题研究判断元素与集合之间关系的思想及方法，是集合问题的基础. 下面再研究两个集合之间的关系问题

例 4 设集合 $A = \{m \mid m = x^2 - y^2, x, y \in Z\}$，$B = \{m \mid m = 2k + 1$，或 $m = 4k, k \in Z\}$，求证：$A = B$.

分析 1 根据两个集合相等的定义：$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $A = B$. 因此只需证对于 m 是属于 A 的任一元素，也是属于 B；同时再证 m 是属于

B 的任一元素也属于 A 即可.

证法1 设 m_0 是属于 A,则必存在一对整数 x,y,使 $m = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. (1) 若 x,y 的奇偶性相同,则 $x-y,x+y$ 同时为偶数,令 $x-y=2k_1,x+y=2k_2$,那么 $m=4k_1\cdot k_2$,再令 $k=k_1k_2(k_1,k_2,k$ 均为整数),即 $m=4k\in B$;(2) 若 x,y 的奇偶性不同,即是一奇一偶,那么 $x-y,x+y$ 同时为奇数,则 $m=(x+y)(x-y)$ 也必为奇数,设 $m=2k+1\in B(k\in Z)$,所以属于 A 的任一元素都属于 B,即 $A\subseteq B$.

设 $m\in B$ 的任一元素,则 $m=2k+1$ 或 $m=4k$. (1) 若 $m=2k+1=(k+1)^2-k^2\in A$;(2) 若 $m=4k=(k+1)^2-(k-1)^2\in A$. 所以属于 B 的任一元素也都属于 A,即 $B\subseteq A$.

综上所述:$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,即 $A=B$.

分析2 如果 $A=A_1\cup A_1$ 且 $A_1\cap A_2=\varnothing,B=B_1\cup B_2$ 且 $B_1\cap B_2=\varnothing$,若 $A_1=B_1$ 且 $A_2\doteq B_2$,则有 $A=B$. 由于集合 A 是一个整数的集合,是一个奇数的集合与一个偶数的集合的并集,而 B 也是一个奇数的集合与一个偶数的集合的并集. 因此只需证:$\{m|m=x^2-y^2,x,y\in Z$ 且 x,y 同奇偶$\}=\{m|m=4k,k\in Z\}$;与$\{m|m=x^2-y^2,x,y\in Z$ 且 x,y 奇偶性相异$\}=\{m|m=2k+1,k\in Z\}$ 同时成立.

证法2 (1) 设 $x=2k_1,y=2k_2$,则 $x^2-y^2=4k_1^2-4k_2^2=4(k_1^2-k_2^2)$,令 $k_1^2-k_2^2=k$,那么 $x^2-y^2=4k$.

设 $x=2k_1+1,y=2k_2+1$,则 $x^2-y^2=(2k_1+1)^2-(2k_2+1)^2=4(k_1^2+k_1-k_2^2-k_2)$,令 $k_1^2+k_1-k_2^2-k_2=k$,那么 $x^2-y^2=4k$. 总之,不论 x,y 同奇还是同偶,恒有 $x^2-y^2=4k$ 成立,即:$\{m|m=x^2-y^2,x,y\in Z$,且 x,y 同奇偶$\}=\{m|m=4k,k\in Z\}$.

(2) 设 $x=2k_1,y=2k_2+1$,则 $x^2-y^2=4k_1^2-(2k_2+1)^2=4k_1^2-4k_2^2-4k_2-1=2(2k_1^2-2k_2^2-2k_2-1)+1$,令 $2k_1^2-2k_2^2-2k_2-1=k$,则 $x^2-y^2=2k+1$.

又设 $x=2k_1+1,y=2k_2$,则 $x^2-y^2=(2k_1+1)^2-4k_2^2=4k_1^2+4k_1-4k_2^2+1=2(2k_1^2+2k_1-2k_2^2)+1$,令 $2k_1^2+2k_1-2k_2^2=k$,则 $x^2-y^2=2k+1$,总之,不论 x,y 为奇为偶,当 x,y 奇偶性相异时,恒有 $x^2-y^2=2k+1$ 成立,即:$\{m|m=x^2-y^2,x,y\in Z$ 且 x,y 奇偶性相异$\}=\{m|m=2k+1,k\in Z\}$.

由(1)、(2) 知：$A = B$.

例 5 关于两个集合：$A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{a,ar,ar^2\}$（其中 $d\neq 0$，$r\neq 1$），试求 $A=B$ 成立的充要条件，并求出 $a=1$ 时的集合 A.

解 由列举法表示集合时元素的无序性及集合相等的充要条件：若 $A=B$，则有 $a+d=ar$ 且 $a+2d=ar^2$，与 $a+d=ar^2$ 且 $a+2d=ar$ 的两种情况，因此分两种情况来证明.

(1) 由 $A=B$ 成立的充要条件知：

$$\begin{cases}a+d=ar\\a+2d=ar^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=ar-a & ①\\a+2d=ar & ②\end{cases}$$

代①入②得：$a+2(ar-a)=ar^2$

$\because d\neq 0$，则 $a\neq 0$，

$\therefore r^2-2r+1=0\Rightarrow r=1$

但 $r\neq 1$，所以(1) 是不可能的：

(2) 由 $A=B$ 成立的充要条件知：

$$\begin{cases}a+d=ar^2\\a+2d=ar\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=ar^2-a & ③\\a+2d=ar & ④\end{cases}$$

代③入④得：$a+2(ar^2-a)=ar$

$\because a\neq 0$，$\therefore 2r^2-r-1=0$.

$\because r\neq 1$，$\therefore r=-\dfrac{1}{2}$.

当 $r=-\dfrac{1}{2}$ 时，$d=-\dfrac{3}{4}a$.

故 $A=B$ 的充要条件是 $r=-\dfrac{1}{2}$，$d=-\dfrac{3}{4}a$.

当 $a=1$ 时，$d=-\dfrac{3}{4}$，从而 $A=\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},1\}$.

例 6 已知集合 $A=\{x|3-x\geqslant\sqrt{x-1},x\in R\}$，集合 $B=\{x|x^2-(a+1)x+a\leqslant 0,x\in R\}$，求：

(1) 当 $A=B$ 时，a 的值；

(2) 当 $A\subset B$ 时，a 的取值范围.

解 (1) 由已知 $A=\{x|3-x\geqslant\sqrt{x-1},x\in R\}=\{x|1\leqslant x\leqslant$

$2, x \in R\}$；$B=\{x|x^2-(a+1)x+a\leqslant 0, x\in R\}=\{x|(x-a)(x-1)\leqslant 0, x\in R\}=\{x|1\leqslant x\leqslant a, x\in R, a\geqslant 1\}\cup\{x|a\leqslant x\leqslant 1, x\in R, a<1\}$.

当且仅当 $a=2$ 时，$A=B$.

(2) 若 $A\subset B$，$\because 1<2$，$\therefore \{x|a\leqslant x\leqslant 1, x\in R, a<1\}\subset\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$，即当 $1\leqslant a<2$ 时，$A\subset B$.

讲评　本题的两个集合，是描述两个不等式的解，即两个区间之间的包含关系．因此关键是把集合的语言正确编译出来，去比较区间端点处的实数的大小．

例7　设集合 $A=\{x|2x^3+5x^2+x-2>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，若使 $A\cup B=\{x|x+2>0\}$ 且 $A\cap B=\{x|\frac{1}{2}<x\leqslant 3\}$，求 a,b 的值.

解　由 $A=\{x|2x^3+5x^2+x-2<0\}$

$$=\{x|-2<x<-1 \text{ 或 } x>\frac{1}{2}\} \qquad ①$$

设 α、β 为一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根，则 $\alpha+\beta=-a$，$\alpha\cdot\beta=b$，且 $B=\{x|\alpha\leqslant x\leqslant\beta, \alpha\leqslant\beta\}$　②

$\because A\cup B=\{x|x+2>0\}=\{x|x>-2\}$.

$\therefore \alpha\leqslant -1$ 且 $\beta>\frac{1}{2}$　③

又 $\because A\cap B=\{x|\frac{1}{2}<x\leqslant 3\}$.

$\therefore \alpha\geqslant -1$ 且 $\beta=3$.　④

(这是由于，如果 $\alpha<-1$，那么 $A\cap B$ 就不仅仅是 $\frac{1}{2}<x\leqslant 3$，并且还有 $k<x<-1$ 的这一部分，与已知矛盾)．由③、④知：$\alpha=-1$，$\beta=3$.

从而　$a=-(\alpha+\beta)=-2$，$b=\alpha\cdot\beta=-3$.

故满足要求的是　$a=-2$，$b=-3$.

讲评　这是一个已知集合运算的结果，去求已知集合表示中未知常数，即求已知集合的问题，必须深透理解集合运算的意义，并能把集合的语言正确编译为相应的问题予以解决．

例8　设 a、b 是两个实数，集合

$A = \{(x,y) \mid x = n, y = na + b, n \in Z\}$;

$B = \{(x,y) \mid x = m, y = 3m^2 + 15, m \in Z\}$;

$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 144\}$.

是平面 xoy 内的点的集合，讨论是否存在 a、b，使得：(1) $A \cap B \neq \varnothing$（$\varnothing$ 表示空集）；(2) $(a,b) \in C$ 同时成立.

分析1 根据集合的意义，每一个集合都描述一个确定的条件，所谓 $A \cap B \neq \varnothing$，即是同时满足 A 和 B 条件的元素是存在的，并且至少存在一个；所谓 $(a,b) \in C$，即是点 (a,b) 满足条件 C. 从几何意义上讲，满足 (1) 的 (a,b) 在一条直线上，满足 (2) 的 (a,b) 在以原点为圆心，半径为 12 的圆的内部（包括周界在内）. 从而问题转化为直线上是否存在一个点 (a,b)，它与圆心（原点）的距离小于或等于半径 12.

解法1 若实数 a,b 满足 (1)，则必存在（至少存在）一对 n,m，使得：

$$(n, na + b) = (m, 3m^2 + 15)$$

成立，即：$\begin{cases} n = m \\ na + b = 3m^2 + 15 \end{cases}$

也就是存在这样的 n，使 $na + b = 3n^2 + 15$. 把 (a,b) 看作点，那么点 (a,b) 是直线

$$nx + y - (3n^2 + 15) = 0 \qquad ①$$

上的点.

又若点 (a,b) 属于 C，即点 (a,b) 到原点（圆心）的距离 d 小于或等于 12. 于是：

$$d = \frac{|3n^2 + 15|}{\sqrt{1 + n^2}} = \frac{3n^2 + 15}{\sqrt{1 + n^2}}$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{1 + n^2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{1 + n^2}}\right) \geqslant 12 \qquad ②$$

若 $\dfrac{\sqrt{1 + n^2}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{1 + n^2}} \Rightarrow n^2 + 1 = 4 \Rightarrow n = \pm\sqrt{3}$.

$\because n \in Z$，则 ② 式中等号不成立

$\therefore d > 12$.

但是，$\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant 12$，因此满足 (1) 的 (a,b)，必不满足 (2). 故不存在这

样的实数 a,b,使得(1),(2)同时成立.

分析 2 由于条件(2)是以不等式的形式出现,因此可以将问题转化为一个不等式,存在不存在的问题,就是不等式有没有实数解的问题.

解法 2 满足条件(1)的(a,b)必满足方程

$$na + b = 3n^2 + 15$$

即: $$b = 3n^2 - na + 15 \quad ①$$

满足条件(2)的(a,b)必有: $$a^2 + b^2 \leqslant 144 \quad ②$$

代①入②得: $a^2 + (3n^2 - na + 15)^2 \leqslant 144$,即:

$$(1 + n^2)a^2 - 2n(3n^2 + 15)a + (3n^2 + 15)^2 - 144 \leqslant 0 \quad ③$$

对 a 来说,必有实数解,但是由③

$$\begin{aligned}\Delta &= 4n^2(3n^2 + 15)^2 - 4(1 + n^2)[(3n^2 + 15)^2 - 144] \\ &= -4(9n^4 - 54n^2 + 81) \\ &= -36(n^2 - 3)^2 < 0 \quad (\because n \neq \pm\sqrt{3})\end{aligned}$$

∴ 不等式③无实数解.

故不存在这样的实数 a、b,使(1)、(2)同时成立.

例 9 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素,$A \cap B$ 含有 4 个元素,试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数

(1)$C \subset A \cup B$,且 C 中含有 3 个元素;

(2)$C \cap A \neq \varnothing$,($\varnothing$ 表示空集).

解法 1 由 A、B 各含有 12 个元素且 $A \cap B$ 含有 4 个元素,因此 $A \cup B$ 有 $12 + 12 - 4 = 20$ 个元素.那么满足条件(1)的集合C的个数为:

$$N_1 = C_{20}^3 = 1140(\text{个})$$

而不满足条件(2),即 $C \cap A = \varnothing$ 的 C 的个数,是仅包含属于 B 而不属于 A 的 8 个元素组成 C 的个数 $N_2 = C_8^3 = 56$(个).于是同时满足条件(1)、(2)的 C 的个数是:

$$N = N_1 - N_2 = 1140 - 56 = 1084(\text{个})$$

故同时满足(1)、(2)的集合 C 的个数是 1084 个.

解法 2 属于B而不属于A的元素有8个,A中的元素有12个.满足条件(2),即为C中元素至少含有A中的一个元素.于是,集合C的个数为:

$$N = C_{12}^{1}C_{8}^{2} + C_{12}^{2}C_{8}^{1} + C_{12}^{3}C_{8}^{0}$$
$$= 1528 + 336 + 220 = 1084(\text{个})$$

故同时满足(1)、(2) 的集合 C 的个数是 1084.

讲评　这是1986年全国高考试题，当时考生最大的障碍是理解不了题意，即不能正确地把这个用集合语言叙述的组合问题编译出来. 这是解决集合综合问题的一个困难却又是重要的问题.

例10　某班同学订阅三种杂志，订阅杂志的人有 a 人，共订阅杂志 b 本，三本杂志都订阅的 c 人，试问：

(1) 只订阅一种杂志的人有多少人?

(2) 只订阅两种杂志的人有多少人?

解　设三种杂志分别订阅的同学的集合记为 A、B、C，如图 1—1，它们交出七个部分，分别记为 P、Q、R、S、T、U、V，那么，若设只订阅一种杂志的人数为 x，只订阅两种的人数为 y，就有：$P + Q + R = x$，$S + U + T = y$，则：

$$\begin{cases} x + y = a - c, \\ x + 2y = b - 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a - b + c \\ y = b - a - 2c. \end{cases}$$

故只订阅一种杂志的人有 $2a - b + c$ 人，只订阅两种杂志的人有 $b - a - 2c$ 人.

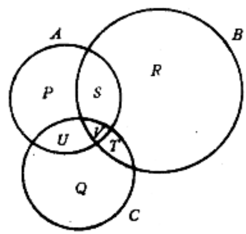

图　1—1

讲评　这是一个有限集元素个数的计算问题. 通过韦恩图不难得出下面两个简单的命题. 若把集合 A 的元素的个数记为 $N(A)$，那么

(1) $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$；

(2) $N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - B(B \cap C) - N(C \cap A) + N(A \cap B \cap C)$.

例11　在 1 到 100 的自然数中，求能被 3 整除，或能被 5 整除的自然数的个数.

分析　若设 $A = \{$能被 3 整除且小于 100 的自然数$\}$，$B = \{$能被 5 整除且小于 100 的自然数$\}$. 本题的要求是求出 $N(A \cup B)$.

略解　由公式(1)$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$　$N(A)=33, N(B)=20, N(A\cap B)=6$,

$\therefore N(A\cup B)=33+20-6=47$(个).

例 12　用 1,2,3,4,5,6 这六个数字组成无重复数字的六位数,其中 2 不在百位,4 不在个位的有多少个?

分析　若设 $A=\{2$ 在百位上的六位数$\}$,$B=\{4$ 在个位的六位数$\}$,依题意求 $N(\overline{A}\cap\overline{B})$,由于 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$,因此只需求出 $N(\overline{A\cup B})$ 即可.

略解　若 2 在百位,则 $N(A)=P_5^5$(个),若 4 在个位,则 $N(B)=P_5^5$(个),而 2 既在百位且 4 在个位则 $N(A\cap B)=P_4^4$(个),那么

$N(A\cup B)=P_5^5+P_5^5-P_4^4=2P_5^5-P_4^4$

$N(\overline{A\cup B})=P_6^6-(2P_5^5-P_4^4)=504$(个)

例 13　当 k 为何实数值时

$$y(x)=\sqrt{(k+1)x^2+kx+k}+x.$$

在实数范围内不表示为函数.

分析　若设能使 $y(x)$ 在实数范围内表示为函数的 k 的集合为 M,根据补集的意义,使 $y(x)$ 不表示函数的 k 的集合为 $\overline{M}$,用补集观点处理非集合的问题,正是体现了"正难则反"的原则.

解　设若 $y(x)$ 表示实变数函数,则当且仅当 $(k+1)x^2+kx+k\geqslant 0$,在实数集内恒成立,则:

$$\begin{cases}k+1>0\\ \Delta=k^2-4k(k+1)\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow k\geqslant 0$$

$\because M=\{k|k\geqslant 0\}$,　$\therefore \overline{M}=\{k|k<0\}$.

故当 $k<0$ 时,$y(x)$ 不能表示为实变数函数

练　习　一

1. 已知 $f(x)=x^2+ax+b, a,b\in R, A=\{x|x=f(x)\}, B=\{x|x=f[f(x)](x\in R)\}$.

(1) 若 $a=1, b=2$,求 $A\cup B, A\cap B$;

(2) 若 $A=\{-1,3\}$,求 B;

(3) 若 $A=\{a\}$，求 a 的值．

2. 已知点集 $M=\{(x,y)\,|\,|x|<a,|y|<a,a>0\}$，$N=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$，问 a 为何值时，(1)$M\cap N=N$；(2)$M\cap N=M$？

3. 已知 $A=\{x\,|\,x^2+ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\,|\,\log_2(x^2+5x+8)=1\}$，$C=\{x\,|\,x^2-2x-8=0\}$，且有 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

4. 设集合 $A=\{(x,y)\,|\,y\geqslant 0$ 且 $y\leqslant\sqrt{3}x+\sqrt{3}$，$y\leqslant-\sqrt{3}x+\sqrt{3}\}$，$B=\{(x,y)\,|\,3x^2+3y^2-2\sqrt{3}y\leqslant 2\}$，(1) 用图表示出集合$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$；(2) 在$(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$中，求：$\sqrt{3}x+y$ 的最大值和最小值.

5. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$，(1) 当为何值时，$(A\cup B)\cap C$ 是两个元素的集合；(2) 当 a 为何值时，$(A\cup B)\cap C$ 是三个元素的集合.

6. 设 $A=\{(x,y)\,|\,y^2-x-1=0\}$，$B=\{(x,y)\,|\,4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\,|\,y=kx+b\}$ 是平面 xoy 上的三个点的集合，试问是否存在自然数 k,b，使得$(A\cup B)\cap C=\varnothing$？并说明理由.

7. 考察满足如下条件(C)的函数 $f(x)$. (C)：当 $|x_1|\leqslant 1$，$|x_2|\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 满足 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$，设这样的函数集合为 M，试问：(1)$f(x)=x^2+2x+3$ 是否属于 M？(2)$f(x)=\sqrt{|x|}$ 是否属于 M？

8. 方程 $x^2-ax+b=0$ 的两根为 α,β；方程 $x^2-bx+c=0$ 的两根为 γ,δ，且 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 互不相等，设 $M=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，作集合 $S=\{x\,|\,x=u+v,u,v\in M,u\neq v\}$，$P=\{x\,|\,x=uv,u,v\in M,u\neq v\}$. 若已知 $S=\{5,7,8,9,10,12\}$，$P=\{6,10,14,15,21,35\}$. 求 a、b、c 的值.

二、函数及函数思想

函数是中学，特别是高中数学的中心课题，也是高中数学的主线.运用函数的思想，可以把许多数学问题统一起来.方程、不等式、数列以及三角等内容归于函数，甚至在解析几何中把曲线的方程视为隐函数，使几何与代数有机地联系起来.就立体几何而言，涉及体积面积的计算及角、距离等问题，尤其最值问题，都是建立目标函数后，而得到完满解决的.更重要的是，中学生由于受到"建立函数关系"的训练，而促使他们把自然规律转化为函数的能力的提高.伟大数学家 Felix · Klein 认为："一般受教育者在数学课上应该学会的重要事情是用变量和函数去思考."

用变量和函数去思考，就是从问题中发现自变量或变化的因素，以及与已知量、未知量之间的内在联系，使所研究的问题转化为函数的问题.也就是构造一个函数，运用函数的性质使问题得到解决.从而产生的"构造函数的方法"，解决方程、不等式、数列以及几何中的许多典型问题，这就是函数思想的核心.

例1 求函数

$$y=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{(|x-2|-3)\lg(40+3x-x^2)}$$

的定义域.

解 由已知，函数的定义域是不等式组

$$\begin{cases} x^2-4x+3\geqslant 0 & ① \\ |x-2|-3\neq 0 & ② \\ 40+3x-x^2>0 \text{ 且 } 40+3x-x^2\neq 1 & ③ \end{cases}$$

的解集.由①：$x^2-4x+3\geqslant 0\Rightarrow x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3$；由②：$|x-2|-3\neq 0\Rightarrow x-2\neq 3$ 或 $x-2\neq -3\Rightarrow x\neq 5$ 或 $x\neq -1$；由③：$x^2+3x-40$