华东师范大学第二附属中学

数学 高中上册

MATHEMATICS

陈双双 刘初喜 等 编

华东师范大学出版社

华东师范大学第二附属中学

数学 高中上册

数学 高中下册

物理 高中上册

物理 高中下册

化学 高中上册

化学 高中下册

ISBN 978-7-5617-6334-6

9 787561 763346 >

定价：18.00 元

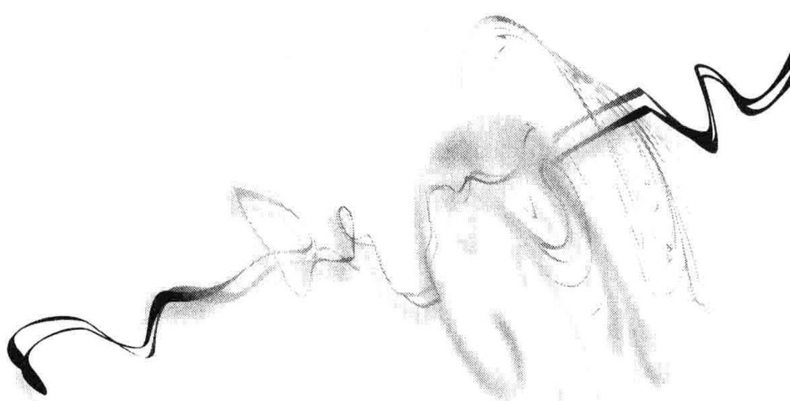
www.ecnupress.com.cn

华东师范大学第二附属中学

数学 高中上册

MATHEMATICS

陈双双 刘初喜 王　平 刘招川
杨汉昌 郑跃星 施洪亮 甄德文 编



华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学. 高中上册（华东师大二附中）/陈双双、刘初喜等编. —上海：华东师范大学出版社，2008
ISBN 978-7-5617-6334-6

Ⅰ. 华… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 132864 号

数学. 高中上册（华东师范大学二附中）

编　　者　陈双双　刘初喜等
项目编辑　应向阳
审读编辑　徐　金
装帧设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537（兼传真）
门市（邮购）电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　11.875
字　　数　343 千字
版　　次　2009 年 1 月第一版
印　　次　2009 年 1 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-6334-6/G·3678
定　　价　18.00 元

出 版 人　朱杰人

前 言

亲爱的同学,你一定喜欢数学,而且希望自己能够学好高中数学吧? 那么,就请你选择这套教材吧!

我们华东师范大学第二附属中学使用的《高中数学》教材,以本校的数学教学校本纲要为基础,经过数学教研组教师多年教学的积累,根据新课标的要求,又结合教育部直属重点中学学生的具体情况,编成上、下两册正式出版。

本教材有以下几个方面的显著特点:

(1) 知识结构完整充实

依据课程标准的要求,按照高中生的认知规律和发展需求,我们精心选择教材内容,对使用不同版本教材的全国各地学生可根据各自需要选择相关章节学习。其中一些章节的知识虽然高考不作要求,但却是优秀学生今后参加著名高校的自主招生考试所必须掌握的。

(2) 思想方法揭示本质

高中数学不是数学的全部,它却涵盖了数学中最基本的内容。我们认为,学习数学最重要的是学习数学的思想方法和本质内涵,学习人类优秀的数学文化精髓,学会用数学的眼光认识世界、用数学的方法改变世界。因此,我们通过数学内容的呈现,也通过“大家谈”、“自己想”和“自己找”等栏目,尽可能地揭示其中蕴含的数学的本质

特征和思想方法，以使同学们体验数学与自然、数学与社会的和谐关系，领会数学的精神实质和文化价值，感受数学的魅力和学习的快乐。

(3) 发展为本便于自学

本着“以学生发展为本”的理念，以培养学生自主学习能力为出发点，我们在知识点的引入，知识内容的拓展等方面都力求详细完整；“自己想”中的问题设计，更能加深同学们对数学知识的理解；而“自己练”则能起到及时巩固所学知识、加强数学思维训练的作用；“自己学”是为学有余力的同学准备的，以达到提高数学素养的目的。

同学们，相信本教材会对你们的数学学习提供很大的帮助。在使用中若发现错误和不妥之处，欢迎你们提出宝贵意见和建议，以使本教材日臻完善，谢谢！

编者

2008.10

目录

第一章
集合与命题
(Sets and Propositions)

我们知道,事物既有个性,也有共性.当我们研究一个具体问题时,常把讨论对象限制在一定的整体范围内,以便于讨论其共同性质;而对整体来说,每个对象又有着其各自的特点.这就是集合与其元素之间的基本关系.

集合概念及其基本理论,称为集合论,是近、现代数学的基本语言和重要基础.一方面,许多重要的数学分支都建立在集合理论的基础上;另一方面,集合论及其思想,在越来越广泛的领域中得到应用.

数学中的命题比比皆是,而连接相关命题之间的链条就是逻辑推理.逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科.学习数学,需要全面地理解概念,正确地进行表述、推理和判断,这就离不开对逻辑知识的掌握和运用.更广泛地说,在日常的学习、工作和生活中,基本的逻辑知识也是认识问题、研究问题不可或缺的工具,是人们文化素养的组成部分.

在高中数学里,集合的初步知识和命题等相关知识,与其他内容有着密切联系,是学习、掌握和使用数学语言的基础.基于上述原因,我们把"集合与命题"安排在高中数学的起始阶段.

1.1 集合及其表示法
(Sets and Their Expressions)

在现实生活和数学中,我们经常要把一些确定的对象作为一个整体来考察研究.例如:

(1) 某校高一(1)班的全体学生;

(2) 中国运动员在历届夏、冬季奥运会上取得的所有金牌；

(3) 1～100 之间的所有质数；

(4) 不等式 $2x-3>0$ 的解的全体；

(5) 所有的平行四边形；

(6) 平面上到两个定点的距离相等的点的全体.

我们把能够确切指定的不同对象组成的整体叫做**集合**，简称**集**(set). 集合中的各个对象叫做这个**集合的元素**(element).

对于一个给定的集合，其中的元素是确定的，也是各不相同的，而且各元素地位相等，与顺序无关.

我们把含有有限个元素的集合称为**有限集**(finite set)，含有无限个元素的集合称为**无限集**(infinite set).

为了研究的需要，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**(empty set)，记作$\varnothing$. 例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合就是空集.

集合通常用大写的英文字母表示，如 A, B, C, …，元素通常用小写的英文字母表示，如 a, b, c, ….

如果 a 是集合 A 的元素，就记作 $a \in A$，读作"a **属于**(belong to)A"；

如果 a 不是集合 A 的元素，就记作 $a \notin A$，读作"a **不属于**(not belong to)A".

数的集合简称数集，常用的数集我们一般用特定的字母表示：

全体自然数组成的集合，即**自然数集**(natural numbers set)，记作 $\mathbf{N}$；不包括零的自然数组成的集合，记作 $\mathbf{N}^*$；全体整数组成的集合，即**整数集**(set of integer)，记作 $\mathbf{Z}$；全体有理数组成的集合，即**有理数集**(rational numbers set)，记作 $\mathbf{Q}$；全体实数组成的集合，即**实数集**(set of real numbers)，记作 $\mathbf{R}$.

我们还把正整数集、负整数集、正有理数集、负有理数集、正实数集、负实数集分别表示为 $\mathbf{Z}^+$、$\mathbf{Z}^-$、$\mathbf{Q}^+$、$\mathbf{Q}^-$、$\mathbf{R}^+$、$\mathbf{R}^-$.

集合的表示方法通常有两种，即列举法和描述法：

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法称为**列举法**. 如：$\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\{x^2, 3x-2, x+7y^3, x^2-4y^2\}$.

在大括号内先写出此集合中元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线后面写上集合中的元素的公共属性，即 $A=\{x \mid x \text{满足性质} P\}$，这种表示集合的方法称为**描述法**. 如：不等式 $2x-3>0$ 的解集可表示为 $\{x \mid 2x-3>0\}$，函数 $y=x+1$ 的图象上的点组成的集合可表示为 $\{(x, y) \mid y=x+1\}$.

例 1 用适当的方法表示下列集合：

(1) 30 的所有正因数组成的集合 A；

(2) 被 5 除余 3 的自然数全体组成的集合 B；

(3) 二次函数 $y=x^2+2x-3$ 的图象上的所有点组成的集合 C.

解 (1) 用列举法表示：$A=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

(2) 用描述法表示：$B=\{x \mid x=5n+3, n \in \mathbf{N}\}$.

(3) 用描述法表示：$C=\{(x, y) \mid y=x^2+2x-3\}$.

例 2 A 是由一切能表示成两个整数的平方之差的全体整数组成的集合，试证明：

(1) 任意奇数都是 A 的元素；

(2) 偶数 $4k-2$ $(k \in \mathbf{Z})$ 不属于 A.

证明 设 $A=\{x \mid x=a^2-b^2, a, b \in \mathbf{Z}\}$.

(1) 设任意奇数 $x=2k+1, k \in \mathbf{Z}$，则

$$x=k^2+2k+1-k^2=(k+1)^2-k^2 \in A.$$

(2) 反证：假设任意偶数 $x=4k-2$ $(k \in \mathbf{Z})$ 属于 A，则设 $x=a^2-b^2$, $a, b \in \mathbf{Z}$. 于是有

$$2(2k-1)=(a+b)(a-b),$$

在上式中，等号右边的 $a+b$ 与 $a-b$ 同奇同偶，则 x 或为奇数，或为 4 的整数倍；而等号左边是 2 与一个奇数的积，则 x 不能被 4 整除，由此产生矛盾.

所以，原假设不成立，即“偶数 $4k-2$ $(k \in \mathbf{Z})$ 不属于 A”得证.

例 3 若集合 $A=\{x \mid ax^2-2x-1=0, x \in \mathbf{R}\}$ 中至多有一个元素，求实数 a 的取值范围.

解 当 $a=0$ 时，方程只有一个根 $-\frac{1}{2}$，则 $a=0$ 符合题意；

当 $a\neq 0$ 时，关于 x 的方程 $ax^2-2x-1=0$ 是一元二次方程，由于集合 A 中至多有一个元素，则一元二次方程 $ax^2-2x-1=0$ 有两个相等的实数根或没有实数根，所以 $\Delta=4+4a\leqslant 0$，解得 $a\leqslant -1$.

综上所得，实数 a 的取值范围是 $\{a \mid a=0 \text{ 或 } a\leqslant -1\}$.

课堂活动

1. 集合中的元素有什么特性？集合的表示法是如何体现这些性质的？

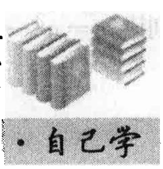
2. 用列举法和描述法表示集合有什么区别？各有什么优势与不足？

3. 通过实例分别选择自然语言、集合语言(列举法或描述法)表述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用，体验用集合思想去观察和思考问题的乐趣.

课堂活动

1. 区分 $\varnothing$，$\{\varnothing\}$，$\{0\}$，0 等符号的含义.
2. 集合 $\{1, 2\}$ 与集合 $\{(1, 2)\}$ 有什么区别？
3. 能否将“身材高大的人”组成一个集合？

课外活动



集合论简介

集合论是德国著名数学家康托尔(G. Cantor，1845—1918)于 19 世纪末创立的.

17 世纪数学中出现了一门新的分支——微积分. 在之后的一至二百年中，这一崭新的学科获得了飞速发展并结出了丰硕的成果. 其推进速度之快使人来不及检查和巩固它的理论基础. 19 世纪初，由于微积分理论的发展不够严格，数学急需重建其理论基础. 因此康托尔开始探讨前人从未碰过的实数点集，这是集合论研究的开端. 1874 年，康托尔发表了关于集合论的第一篇论文《关于全体实代数数的一个性质》，提出了

“集合”的概念，这标志着集合论的诞生.

集合论提出伊始，曾遭到许多数学家的激烈反对. 由于受外界刺激和某些身体因素的影响，康托尔于1884年得了精神分裂症，几次陷于精神崩溃. 然而集合论前后经历二十余年，最终获得了世界公认. 到20世纪初，集合论已得到数学家们的赞同. 数学家们为一切数学成果都可建立在集合论基础上的前景而陶醉. 他们乐观地认为从算术公理系统出发，借助集合论的概念，便可以建造起整个数学的大厦. 在1900年第二次国际数学大会上，著名法国数学家庞加莱(Poincaré, 1854—1912)就曾兴高采烈地宣布“……数学已被算术化了. 今天，我们可以说绝对的严格已经达到了.”

然而这种自得的情绪并没能持续多久. 不久，集合论是有漏洞的消息迅速传遍了数学界. 1902年，英国数学家和哲学家罗素(Russell, 1872—1970)提出了著名的“罗素悖论”，使得绝对严密的数学陷入了自相矛盾之中，这就是数学史上的第三次数学危机.

危机产生后，众多数学家投入到解决危机的工作中去. 1908年，德国数学家策梅罗(Zermelo, 1871—1953)发表了论文《集合论基础研究》，提出了公理化集合论，后经德国数学家弗伦克尔改进形成无矛盾的集合论公理系统，简称ZF公理系统. 原本直观的集合概念被建立在严格的公理基础之上，从而避免了悖论的出现，这就是集合论发展的第二个阶段：公理化集合论. 与此相对应，在1908年以前由康托尔创立的集合论被称为朴素集合论，公理化集合论是对朴素集合论的严格处理，它保留了朴素集合论的有价值的成果并消除了其可能存在的悖论，因而较圆满地解决了第三次数学危机.

公理化集合论的建立，标志着著名德国数学家希尔伯特(Hilbert, 1862—1943)所表述的一种激情的胜利，他大声疾呼：没有人能把我们从康托尔为我们创造的乐园中赶出去. 从康托尔提出集合论至今，时间已经过去了一百多年，数学又发生了极其巨大的变化，包括对上述经典集合论作出进一步发展的模糊集合论的出现等等，而这一切都是与康托尔的开拓性工作分不开的. 当现在回头去看康托尔的贡献时，我们仍然可以引用当时一些著名数学家对他的集合论的评价作为我们的总结.

希尔伯特称康托尔的集合论是“数学精神最令人惊羡的花朵，人类理智活动最漂亮的成果”. 罗素把康托尔的工作描述为“可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”. 前苏联著名的数学家科尔莫戈洛夫(Kolmogorov, 1903—1987)说，“康托尔的不朽功绩，在于他敢向无穷大冒险迈进.”还有如：“它是对无限最深刻的洞察，它是数学天才的最优秀作品，是人类纯智力活动的最高成就之一.”“康托尔的无穷集合论是过去两千五百年中对数学的最令人不安的独创性贡献之一.”等等.

课外活动

· 自己找

借助图书馆或网络查阅有关集合论创始人康托尔的生平简介等资料，了解其创立集合论的艰辛历程，进一步体验和学习数学家追求真理的不懈精神.

习题练习

· 自己练

1. 用描述法表示下列集合：

(1) $\{1, 4, 7, 10, 13\}$；

(2) $\{-2, -4, -6, -8, -10\}$；

(3) $\{1, 5, 25, 125, 625\}$；

(4) $\left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{3}{10}, \pm\frac{4}{17}, \cdots\right\}$.

2. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x$ 是 15 的正约数$\}$；

(2) $\{(x, y) \mid x \in \{1, 2\}, y \in \{1, 2\}\}$；

(3) $\left\{(x, y) \middle| \begin{cases} x+y=-2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}\right\}$；

(4) $\{(x, y) \mid y = x^2 - 1, |x| \leqslant 2, x \in \mathbf{Z}\}$.

3. 关于 x 的方程 $ax+b=0$，当 a, b 满足条件________时，解集是有限集；当 a, b 满足条件________时，解集是无限集.

4. 已知集合 $\{2a, a^2-2a\}$ 为数集，求 a 的取值范围.

5. 把可以表示成两个整数的平方之和的全体整数记作集合 M，试证明集合 M 的任意两个元素的乘积仍属于 M.

6. 已知 $M = \left\{a \middle| \frac{6}{5-a} \in \mathbf{N} 且 a \in \mathbf{Z}\right\}$，求集合 M.

7. 已知集合 $A=\{x \mid (m-1)x^2-2x+1=0\}$ 中至多含有一个元素,求实数 m 的取值范围.

8. 设 $A=\{x \mid x^2+(b+2)x+b+1=0,\ b \in \mathbf{R}\}$,求 A 中所有元素之和.

9. 设 $A=\{x \mid x=m^2-n^2,\ m,\ n \in \mathbf{Z}\}$,问 8、9、10 与集合 A 有什么关系? 并证明你的结论.

10. 设集合 $S=\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3\}$,在 S 上定义运算为: $a_i \oplus a_j = a_k$,其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数,i、$j=0,\ 1,\ 2,\ 3$,则求满足关系式 $(x \oplus x) \oplus a_2 = a_0$ 的 $x(x \in S)$ 的个数.

11. 设集合 $A=\{-3,\ -1,\ 2,\ 7\}$,集合 $B=\{x \mid f(x)>0\}$,在下列条件下,是否存在函数 $f(x)$,使得集合 A 中恰有一个元素不是 B 的元素?

(1) $f(x)$为一次函数;

(2) $f(x)$为二次函数.

12. 已知实数集 A 满足: 若 $x \in A$,则$\dfrac{1+x}{1-x} \in A$.

(1) 求证: 当 $2 \in A$ 时,A 中还有 3 个元素;

(2) 试找寻一个实数 a,使得 $a \in A$, 并由此求出相应的集合 A;

(3) 由上述研究过程,你能得出什么结论?

1.2 集合之间的关系
(Relations of Sets)

考察下列集合:

$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $C=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$, $D=\{x \mid x$ 是四边形$\}$, $E=\{x \mid x$ 是多边形$\}$.

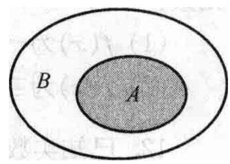
容易发现,集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素,集合 D 中的任何一个元素都是集合 E 的元素,而集合 B 中的元素 3 和 4 不是集合 A 的元素,集合 C 中的元素与集合 A 的元素完全相同.

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 是集合 B 的**子集**(subset)，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读作"A 包含于(be contained in) B"或"B 包含(contain) A".

我们规定，空集包含于任何一个集合，即空集是任何集合的子集.

对于两个集合 A 与 B，如果有 $A \subseteq B$，且 $B \supseteq A$，那么叫做集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$，读作"集合 A 等于集合 B". 如对于集合 $A = \{x \mid x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$ 与 $B = \{x \mid x = 2k-1, k \in \mathbf{Z}\}$，则有 $A = B$.

对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么称集合 A 是集合 B 的**真子集**(proper subset)，记作 $A \subsetneqq B$ 或 $B \supsetneqq A$ 读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A".



用平面区域来表示集合之间关系的方法叫做集合的**图示法**，所用的图叫做**文氏图**(Venn diagram)，右图表示 $A \subseteq B$.

例 1 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集和真子集.

解 集合的所有子集为 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$，除了 $\{a, b, c\}$，其余七个子集均为集合 $\{a, b, c\}$ 的真子集.

例 2 设集合 $A = \{a, a^2, ab\}$, $B = \{1, a, b\}$, $A = B$，求实数 a, b 的值.

解 由于 $A = B$，则

(1) 若 $a^2 = b$, $ab = 1$，则 $a^3 = 1$，即 $a = b = 1$，与集合中元素的互异性矛盾；

(2) 若 $a^2 = 1$, $ab = b$，则由集合中元素的互异性可得 $a = -1$, $b = 0$.

例 3 已知 $S = \{x \mid x = 14m + 36n, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}$, $T = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$，求证: $S = T$.

解 (1) 任意 $x \in S$，则存在 $m, n \in \mathbf{Z}$，使得 $x = 14m + 36n = 2(7m + 18n)$，令 $7m + 18n = k$，由于 $m, n \in \mathbf{Z}$，所以 $k = 7m + 18n \in \mathbf{Z}$，则 $x = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$，即 $x \in T$，因此 $S \subseteq T$；

(2) 反之，任意 $x \in T$，则存在 $k \in \mathbf{Z}$，使得 $x = 2k$，要使得 $x = 2k$