GAODENGDAISHU
JIANMINGJIAOCHENG

数学加油站

高等代数简明教程

卢占化　贾　周　卢建立　编

电子科技大学出版社

数学加油站

高等代数简明教程

卢占化　贾　周　卢建立　编

电子科技大学出版社

高等代数简明教程

卢占化　贾　周　卢建立　编

出　　版:电子科技大学出版社(成都建设北路二段四号)
责任编辑:周清芳
发　　行:电子科技大学出版社
印　　刷:北京市朝教印刷厂
开　　本:850mm×1168mm　1/32　印张:8　字数:172 千字
版　　次:1994 年 7 月第一版
印　　次:2005 年 10 月第二次印刷
书　　号:ISBN 7-81043-067-X/O·5
定　　价:20.00 元

前　言

高等代数是数学专业的一门重要基础课,其中线性代数部分是理工科大学学生的必修内容。随着计算机的日益普及,这门课程的地位和作用显得更为重要。

本书是作者多年来教学经验的总结,是在数学系数学专业、计算机专业学生所用的高等代数,线性代数讲稿的基础上修改而成的。在编写过程中力求做到通俗易懂、简明扼要,对于显而易见或者证明过程较繁的结论略而不证,这样做便于学生把更多的精力集中到弄清基本概念,掌握基本方法上;也利于稳步提高学生的推理能力。对于学生在学习中易混淆的概念以及在解题中易出现的错误,本书给予特别重视。

在内容处理上本书有下列特点:在第五章,讲过 n 维向量的内积及正交矩阵后接着介绍施密特正交化方法和实对称矩阵的对角化;在第六章,主要介绍用配方法化二次型为标准形,把用初等变换化二次型为标准形的方法安排在习题中。

标有“ * ”号的章节、例题为选讲内容;标有“ * ”号的习题为选做题。

本书作线性代数教材使用时可以讲第二至七章。作高等代数教材使用时可以讲第一至七章,第八章是选学内容。

卢建立同志负责第一、八章的编写及本书习题的整理,贾周同

志负责第二、三、四章的编写，卢占化同志负责第五、六、七章的编写。参加编写的还有：吕云生（驻马店教育学院）。

在编写过程中曾得到兄弟院校有关同志的支持与帮助，在此表示感谢。

限于编者的水平。书中定有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　一元多项式

§1.1　数　　域

一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

有没有解？如何解？这类问题与我们所考虑的数集的范围有关。把 $x^2-2=0$ 作为有理系数的方程，在有理数范围内讨论没有根，但在实数范围内讨论就有根。$x^2+1=0$ 在实数范围内没有根，但在复数范围内就有根。另外在解线性方程组、求矩阵的特征值中也有类似的情况。因此，我们有必要引入数域的概念。

定义 1　设 P 是由一些复数组成的集合，如果满足下列两个条件，则称 P 是一个数域，

1)0 和 1 都在 P 中；

2)P 中任意两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍在 P 中。

例如，有理数集合、实数集合、复数集合都是数域，它们分别称为有理数域 Q，实数域 R，复数域 C。而整数集不是数域。但还有其他一些数域，比如，由所有形如

$$a+b\sqrt{2},a,b\text{ 为有理数}$$

的数组成的集合是一个数域，记作 $Q(\sqrt{2})$。

可以证明，有理数域是最小的数域，即任何一个数域都包含全体有理数。

§1.2 一元多项式及整除性

一般的一元 n 次方程是

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_o = 0 \qquad (2)$$

(2)式的左端是多项式。因此研究这类方程的理论和解法与研究多项式有密切的联系。关于多项式的一些结论在进一步学习代数和其它学科时也会经常遇到。多项式理论中的一些论证和思考问题的方法对于进一步学习也有启发作用。

学习本章我们应该掌握的主要方法是:求多项式的最大公因式,求有理根的方法。

一、多项式的概念、运算

定义 2 设 P 是一个数域,x 是一个文字(或变量),形式表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_o \qquad (3)$$

其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 全是数域 P 中的数,n 是非负整数,称为数域 P 上的一元多项式。通常记为 $f(x)$, $g(x)\cdots$ 或 $f, g, \cdots$。

在(3)中 a_kx^k 称为第 k 次项,a_k 称为第 k 次项的系数($k=0,1,2,\cdots,n$).

例 在

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 5x$$

$$h(x) = x^3 + x^2 + x + x^{-1}$$

$$m(x) = x^2 + 2$$

中,$f(x)$,$g(x)$分别看作有理数域,复数域上的多项式;$h(x)$不是多项式;$m(x)$是整系数多项式。

定义 3　如果数域 P 上的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同次项的系数都相等,我们称这两个多项式相等,记为

$$f(x) = g(x)$$

在一个多项式里,可以任意添上或去掉一些系数为零的项,并约定 $1 \cdot x^i = x^i$。

例如　$f(x) = 2x^2 + 3x + 2$

可以写成 $f(x) = 0x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

定义 4　在多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

中,如果 $a_n \neq 0$,则称 n 为多项式 $f(x)$ 的次数,$a_n x^n$ 称为 $f(x)$ 的首项,多项式 $f(x)$ 的次数表示为次 $f(x)$,或 $a(f(x))$.

注:多项式的次数与多项式的相等是推理论证中常遇到的两个概念。

系数全为零的多项式称为零多项式,记为 0. 零多项式是唯一无法确定次数的多项式。零多项式与零次多项式是两个不同的对象应注意区别。

下面引入多项式的加法与乘法的一般表达式,并讨论这些运算与次数的关系。

对于具体多项式的加法和乘法我们已经熟悉。为了讨论多项式的一般性质,我们有必要给出多项式运算的一般表达式。

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_o$$

是数域 P 上两个多项式，并假定 $m\leqslant n$。$a_n\neq 0, b_m\neq 0.$

$f(x)\pm g(x)$ 可以表达为（严格地说是定义为）：

$$f(x)\pm g(x)=(a_n\pm b_n)x^n\pm\cdots\pm(a_m\pm b_m)x^m+\cdots$$
$$\pm(a_1\pm b_1)x+(a_o\pm b_o)$$

其中 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$。

$f(x)g(x)$ 可以表达为

$$f(x)\cdot g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}$$
$$+\cdots+(a_1b_o+a_0b_1)x+a_0b_0$$

其中 $f(x)\cdot g(x)$ 的第 k 次项的系数为

$$a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_1b_{k-1}+a_0b_k$$

不难验证多项式的加法和乘法满足以下算律：

1° 加法交换律：

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

2° 加法结合律：

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$$

3° 乘法交换律：

$$f(x)g(x)=g(x)f(x)$$

4° 乘法结合律：

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$$

5° 乘法对加法的分配律：

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$$

前面我们介绍了多项式的相等、次数、加法与乘法，我们有必要了解一下运算与次数的关系

定理 1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 P 上两个多项式，并且 $f(x)\neq$

$0, g(x) \neq 0$，则

(1) 当 $f(x)+g(x) \neq 0$ 时

次 $(f(x)+g(x)) \leqslant max$ (次 $f(x)$，次 $g(x)$)

(2) $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ 且

$$次(f(x)g(x)) = 次 f(x) + 次 g(x)$$

证　略

推论 1　$f(x)g(x)=0$ 充要条件是 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$。

推论 2　若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且 $f(x) \neq 0$，则

$$g(x)=h(x)$$

证　由 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 可得：$f(x)(g(x)-h(x))=0$。但 $f(x) \neq 0$，所以由推论 1 知必有 $g(x)-h(x)=0$ 从而 $g(x)=h(x)$

推论 2 说明多项式乘法满足消去律。

数域 P 上（习惯说法）的全体多项式记为这 $P[x]$。称为一元多项式环。

二、带余除法、整除性

受整数（因数、整除问题）的启发，我们在多项式中讨论类似的整除性问题。在正整数中，我们曾用小数除大数，在多项式中，我们可以考虑用较低次数的多项式去除较高次数的多项式。

例如：设

$$f(x)=3x^3+4x^2-5x+6$$

$$g(x)=x^2-3x+1$$

用 $g(x)$ 除 $f(x)$：

$$
\begin{array}{r}
3x+13 \\
x^2-3x+1 \overline{\big)\, 3x^3+4x^2-5x+6} \\
\underline{3x^3-9x^2+3x \quad} \\
13x^2-8x+6 \\
\underline{13x^2-39x+13} \\
31x-7
\end{array}
$$

记 $q(x)=3x+13, r(x)=31x-7$

则有 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$

其中次 $r(x)<$ 次 $g(x)$

一般地我们有

定理2 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $P[x]$ 中的任意两个多项式，其中 $g(x)\neq 0$，那么在 $P[x]$ 中可以找到多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \tag{4}$$

这里 $r(x)=0$ 或者次 $r(x)<$ 次 $g(x)$。并且满足(4)式的 $q(x)$ 和 $r(x)$ 是唯一的。

证 存在性（略）

唯一性 设存在 $q_1(x), r_1(x); q_2(x), r_2(x)$ 均满足(4)式则有

$$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$$

$$r_1(x)=0 \text{ 或次 } r_1(x)<\text{次 } g(x)$$

$$f(x)=g(x)q_2(x)+r_2(x)$$

$$r_2(x)=0 \text{ 或次 } r_2(x)<\text{次 } g(x)$$

从而 $g(x)q_1(x)+r_1(x)=g(x)q_2(x)+r_2(x)$

得 $r_1(x)-r_2(x)=g(x)(q_2(x)-q_1(x))$

若 $r_1(x)-r_2(x)\neq 0$，于是次 $(r_1(x)-r_2(x))<$ 次 $g(x)$。

这与次 $g(x)(q_2(x)-q_1(x))\geqslant$ 次 $g(x)$ 矛盾。因此必有 $r_1(x)=$

$r_2(x)$和$q_1(x)=q_2(x)$(因$g(x)\neq 0$)　▍

我们把按定理 2 确定$g(x)$和$r(x)$的方法叫带余除法，其中$q(x)$称为商式，$r(x)$称为余式。

例 1　对于上例中的$f(x)$，$g(x)$，求出$f(x)$除$g(x)$所得的商式和余式

解　因为

$$g(x)=0\cdot f(x)+g(x)$$

次$g(x)<$次$f(x)$，商式为 0，余式为$g(x)$。

和整数一样，一般情况下用非零多项式$g(x)$去除$f(x)$时，余数未必为零，因此我们引入下面的概念

定义 5　**设$f(x)$，$g(x)$是$P[x]$中两个多项式，如果存在$q(x)\in P[x]$使得**

$$f(x)=g(x)q(x)$$

则称$g(x)$整除(或除尽)$f(x)$。或$f(x)$能被$g(x)$整除，当$g(x)$整除$f(x)$时，称$g(x)$是$f(x)$的一个因式，$f(x)$是$g(x)$的一个倍式，记为"$g(x)\mid f(x)$。"

如果$g(x)$不整除$f(x)$，记为"$g(x)\nmid f(x)$".

注意：在定义 5 中我们没有假定$g(x)\neq 0$，这是与定理 2 所不同的，关于$g(x)$整除$f(x)$的判定有：

定理 3　**设$f(x)$，$g(x)\neq 0$，是$P[x]$中的两个多项式，则$g(x)\mid f(x)$充分必要条件是$g(x)$除$f(x)$的余式为零。**

证　充分性，由定理 2 即得。

必要性，若$g(x)\mid f(x)$则

$$f(x)=q(x)g(x)=q(x)g(x)+0$$

从而$r(x)=0$　▍

多项式的整除有下列一些基本性质

1° $f(x)\mid 0, f(x)\in P[x]$;

2° $c\mid f(x), 0\neq c, f(x)\in P[x]$;

3° $f(x)\mid f(x), f(x)\in P[x]$;

4° 如果 $g(x)\mid f(x), f(x)\mid g(x)$,则存在非零常数 $c\neq 0$ 使 $f(x)=cg(x)$;

5° 如果 $g(x)\mid f(x), f(x)\mid h(x)$,则 $g(x)\mid h(x)$;

6° 如果 $g(x)\mid f_1(x), g(x)\mid f_2(x)$,则对任意多项式 $u(x), v(x)$有

$$g(x)\mid(u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x))。$$

证 只证4°,其余各条证明留给读者。

由于 $g(x)\mid f(x), f(x)\mid g(x)$,当 $f(x)=g(x)=0$ 时,结论显然成立;当 $f(x), g(x)$ 全不为零时,由定义5存在
$q_1(x), q_2(x)$ 使

$$f(x)=q_1(x)g(x), g(x)=q_2(x)f(x)$$

从而 $f(x)=q_1(x)q_2(x)f(x)$。比较等式两端次数可得
次$(q_1(x)q_2(x))=0$. 因此 $q_1(x), q_2(x)$ 均为0次多项式即非零常数。

注意:性质5°和性质6°可推广到多个多项式的情形。

我们把 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 看作是数域 P 上的函数,那么 $f(x)$ 在 c 点的函数值可表示为

$$f(c)=a_nc^n+\cdots+a_1c+a_0。$$

当 $f(c)=0$ 时,称 c 是 $f(x)$ 的一个根。

作为带余除法的特殊情形,我们给出下面的余数定理。

定理4 多项式 $f(x)$ 被 $x-c$ 除所得的余数等于 $f(x)$ 在 $x=c$

处的值$f(c)$。

证　设$f(x)=(x-c)q(x)+r$,其中 r 为常数。从而$f(c)=(c-c)q(c)+r$,即 $r=f(c)$　▌

推论　**$(x-c)$是$f(x)$的因式当且仅当$f(c)=0$,即 c 为$f(x)$的根。**

下面我们给出求 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得的商式及余数的方法——综合除法。这种方法也可用于处理某些多项式的因式分解和验证 c 是否$f(x)$的根。

设　$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq0,n>0)$

　　$g(x)=x-c$

由定理 2 一定存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ 及余数 r 使得

$$f(x)=(x-c)q(x)+r$$

不妨设 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$

比较同次项的系数得

$$\begin{cases}b_{n-1}=a_n\\ b_{n-2}-cb_{n-1}=a_{n-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_0-cb_1=a_1\\ r-cb_0=a_0\end{cases}\qquad \text{从而}\begin{cases}b_{n-1}=a_n\\ b_{n-2}=a_{n-1}+cb_{n-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_0=a_1+cb_1\\ r=a_0+cb_0\end{cases}$$

由 a_n 出发逐次确定出 $b_{n-1},b_{n-2},\cdots,b_0,r$ 的过程用下面的简式表示为