模糊集理论
及其电力行业应用

张铁岩 孙秋野 著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

模糊集理论及其电力行业应用

张铁岩　孙秋野　著

机械工业出版社

本书在介绍模糊集的基本原理的基础上，立足于电力工程实际应用，重点对当前比较流行的经典模糊集算法进行较为详尽的解读。同时，根据工程应用的实际特点及程序实现中需要注意的问题提供取自于实际工程的典型案例进行详尽的解释，力求使读者通过阅读本书能够获得一条由模糊集原理到实际电力工业应用的捷径，而这正是当前各类书籍所没有涉足的领域。

本书第1、2章系统介绍了模糊集的基本理论及其在电力系统中的应用情况；第3章重点讨论了模糊集在电力电缆绝缘监测中的应用情况；第4章重点讨论了模糊集在负荷建模中的应用情况；第5章重点讨论了模糊集在电力系统潮流计算中的应用情况。

本书力求清晰准确，以其成功的工程项目为实例，旨在给读者提供一个具体形象的该方法的应用模型，等于架设起了一座沟通模糊集理论与工程应用的桥梁。本书可以作为高等院校的高年级本科生和研究生教材或毕业设计及课题研究的辅助读物，也可以作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

模糊集理论及其电力行业应用/张铁岩，孙秋野著. —北京：机械工业出版社，2009.1

ISBN 978-7-111-25240-5

Ⅰ. 模…　Ⅱ. ①张…②孙…　Ⅲ. 模糊集理论-应用-电力行业　Ⅳ. F407.61

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第153950号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：张俊红　责任编辑：刘星宁　责任校对：申春香
封面设计：马精明　责任印制：洪汉军
北京汇林印务有限公司印刷
2009年1月第1版第1次印刷
184mm×260mm · 15.75印张 · 388千字
0001-3500册
标准书号：ISBN 978-7-111-25240-5
定价：36.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话：（010）68326294
购书热线电话：（010）88379639　88379641　88379643
编辑热线电话：（010）88379768

序

电力是人类社会活动中应用范围最广、对人们生活质量影响最大的能源。随着我国国民经济的持续发展，高度的社会信息化和生产自动化都在不断加深人们对电力的依赖性，这也促使电力行业加大对电力系统可靠性的管理力度，力求为用户提供更加充裕、持续、安全可靠的电力供应。

电力系统中，人们对于实际现象、信息甚至数据的认识往往是不精确的、模糊的。用确定性数据进行电力系统计算和分析，只能给出特定数据下的代表性情况，而无法得到一般性的结论。

对于电力系统而言，随着处理过程的进行，如果其不确定性程度减少了，实际上就是过滤掉了其中的一部分不确定性知识，这种情况下，丢失了部分信息，但是有助于对目标问题有更明确的认识；反之，为了达到高的适应性能力，往往需要在系统中保留原本的不确定性信息，也就是通过降低系统的确定性来提高系统的适应性。总之，无论是希望保留系统的不确定性，还是希望降低系统的不确定性，都需要对系统的不确定性程度进行度量。

模糊集理论作为不确定信息处理中的重要方法，在很多领域都起到了重要的作用，在电力领域也不例外。但遗憾的是，由于模糊集理论需要应用者具有较艰深的数学基础，从而严重影响了其在电力系统中的广泛应用。

本书正是针对这一状况，将模糊集原理与实际的电力系统工程应用相结合，力求理论研究来源于工程难题，然后以工程实际说明理论价值。近10年来，本书作者张铁岩教授、孙秋野博士和课题组合作者们在模糊集基础理论以及电力系统应用方面进行了一系列深入的研究，并取得了良好的研究成果。这些成果分别发表在中国电机工程学报、自动化学报、系统仿真学报、中国工程科学等权威刊物上，并申请了多项国家发明专利。本书涵盖了作者近10年的研究成果，将模糊集理论与电力系统工程应用进行了较好的结合，并在电力电缆绝缘监测、电力负荷建模、输配电网潮流计算等电力系统的前沿热点研究领域中提供了工程实例，是将模糊集与电力系统有机结合的一本好书。

Automatica 副主编

IEEE Trans. SMC Part B 副主编

IEEE Trans. FS 副主编

教育部长江学者特聘教授

张化光

前言

模糊数学是1965年由美国控制论专家扎德（L. A. Zadeh）首先提出来的，它是研究模糊领域中事物数学化的一门边缘学科，现已成为数学的一个重要分支。

数学起源于对实际问题的描述，实践是数学的源泉。而人类实践的范围是广阔的，用数学的观点可以把实践中所遇到的现象大致分为确定现象、随机现象和模糊现象三类。为解决和描述确定现象，逐步发展起来的数学工具有几何、代数、数学分析、微分方程等，习惯上称其为“经典数学”；为解决和描述随机现象，逐渐发展起来的数学工具有概率论和数理统计，习惯上称其为“统计数学”。而人们在实践中往往会发现有一条不相容原理——当一个系统的复杂性增加时，人们使它精解化的能力将减小，在达到一定阈值以上时，复杂性与精确性互相排斥，与复杂性紧紧相伴的就是模糊性。而模糊数学就是研究和处理模糊现象的一种新的数学方法。

“数学”与“模糊”本来是互相对立的词，扎德把两者统一在一起，既不是让数学变成模模糊糊的东西，也不是让数学放弃它的严密性去迁就模糊性，而是要让数学进入模糊现象这个禁区。但是，也不能把“模糊”一词看成纯粹消极的贬义词，过分的精确反倒模糊，适当的模糊反倒精确，模糊的手段常常可以达到精确的目的。模糊数学的一个重要特点，就是要使数学回过头来吸取人脑识别和判决的模糊特点，使之运用于计算机，使部分自然语言能够作为算法语言直接进入程序，使人能以简易的程序调动机器完成更复杂的任务，从而大大提高机器的灵活性，形成一种新的更加灵活而简捷的处理手段与方法。

考虑到当前模糊集发展得如火如荼，而对于实际工程人员和大中专院校的本科生和研究生来说，如何在较短的时间内将其应用于实际工程还是一个难题。当前，普遍的情况是介绍模糊集理论的书仅仅是介绍理论本身，主要内容都是深入的理论基础、相关的证明推导和最新的研究成果，而并不涉及到算法的计算机语言实现问题。但是，对于大多数关心模糊集发展的人来说，他们并不是模糊集领域的专家，也不需要对于模糊集有多么重大的创造性工作，他们关心的并不是枯燥的理论推导，而是如何将这些先进的理论应用到自己的实际研究工作中去，更好地为应用服务。因此，对于这些人来说，模糊集如何应用计算机语言实现远比算法是从何而来更有实际价值。

遗憾的是，目前还没有一本将模糊集与电力系统最新应用有效结合的专著。本书正是针对当前这一状况，将模糊集原理与实际的电力系统工程应用相结合，力求理论研究来源于工程难题，然后以工程实际说明理论价值。

本书立足于在较短的篇幅内提炼模糊集算法的精髓，使读者能够将更多的注意力用于应用本身，力争使读者能够在最短的时间内完成从对于模糊集不了解到能够完成初步的程序设计，并进而能够进行工程应用的三级跳。并提供一条切实可行的将模糊集理论转化为程序的实现方案。本书以其成功的工程项目为实例，旨在给读者提供一个具体形象的该方法的应用模型，等于架设起了一座沟通模糊集理论与工程应用的桥梁。

本书可以作为大中专院校的本科生和研究生教材或毕业设计及课题研究的辅助读物，也

可以作为工程技术人员的参考书。

本书由张铁岩和孙秋野著。在本书的编写过程中，得到了王志强博士、黎明副教授、冯健教授、季策副教授、李爱平副教授、闫世杰副教授、王占山副教授、王迎春博士的大力支持，同时渠丰沛、刘国威、葛辉、杨伟志、杨东升、杨珺、王智良、刘金海、刘秀翀、刘鑫蕊、罗艳红、梁绵鑫、赵琰、马铁东、魏庆来、张锐等也参加了本书部分内容编写和提供素材。全书由张铁岩、孙秋野统稿。另外，作者在编写本书的过程中参考了不少专家和学者的著作、学术论文和经验总结等，在此对他们表示最诚挚的谢意！

限于作者的理论水平和实际开发经验，书中难免存在一些不足之处或者错误，恳请广大读者批评指正。

作　者

目录

第1章　模糊集理论概述

模糊数学是1965年由美国控制论专家扎德（L. A. Zadeh）首先提出来的，它是研究模糊领域中事物数学化的一门边缘学科，现已成为数学的一个重要分支。

数学起源于对实际问题的描述，实践是数学的源泉。而人类实践的范围是广阔的，用数学的观点可以把实践中所遇到的现象大致分为确定现象、随机现象和模糊现象三类。为解决和描述确定现象，逐步发展起来的数学工具有几何、代数、数学分析、微分方程等，习惯上称其为“经典数学”；为解决和描述随机现象，逐渐发展起来的数学工具有概率论和数理统计，习惯上称其为“统计数学”。而人们在实践中往往会发现有一条不相容原理——当一个系统的复杂性增加时，人们使它精解化的能力将减小，在达到一定阈值以上时，复杂性与精确性互相排斥，与复杂性紧紧相伴的就是模糊性。而模糊数学就是研究和处理模糊现象的一种新的数学方法。

“数学”与“模糊”本来是互相对立的词，扎德把两者统一在一起，既不是让数学变成模模糊糊的东西，也不是让数学放弃它的严密性去迁就模糊性，而是要让数学进入模糊现象这个禁区。但是，也不能把“模糊”一词看成纯粹消极的贬义词，过分的精确反倒模糊，适当的模糊反倒精确，模糊的手段常常可以达到精确的目的。模糊数学的一个重要特点，就是要使数学回过头来吸取人脑识别和判决的模糊特点，使之运用于计算机，使部分自然语言能够作为算法语言直接进入程序，使人能以简易的程序调动机器完成更复杂的任务，从而大大提高机器的活性，形成一种新的更加灵活而简捷的处理手段与方法。

概率论和数理统计的产生，把数学的应用范围从必然现象领域扩大到偶然现象领域，弥补了经典数学的不足。模糊数学的产生，把数学的应用范围从精确现象领域扩大到模糊现象领域，弥补了经典数学和统计数学的不足。概率论和数理统计研究和处理随机性，模糊数学研究和处理模糊性，两者都属于不确定数学，它们之间有深刻的联系，但又有着本质的不同。模糊数学把传统数学从“二值逻辑”的基础扩展到连续值上来，更具有深远的意义。

经典集合论是经典数学的基础，它是以逻辑真值为$\{0,1\}$的数理逻辑为基础的。但随着系统的模糊性、不确定性、含糊性等复杂因素的增加，描述系统行为的精确性和有效性就随之下降，一旦超过某一阈值，其精确性和有效性将互相排斥，此时传统的集合论就显得软弱无力了。而模糊集正是处理模糊概念的有力工具。模糊集是模糊数学的基础，它是以逻辑真值为$[0,1]$的模糊逻辑为基础的，是对经典集合的开拓。模糊数学产生后，客观事物的确定性与不确定性在量方面的表现可作如下划分：

$$\text{量}\begin{cases}\text{确定性—}\ \leftarrow\text{经典数学}\\ \text{不确定性—}\begin{cases}\text{模糊性—模糊数学}\\ \text{随机性—统计数学}\end{cases}\end{cases}$$

本章主要介绍经典集合及其运算、模糊集合及其运算、隶属函数、模糊矩阵与模糊关系、模糊向量、模糊逻辑与模糊推理的基本内容，这些内容是研究模糊集应用的基础。

1.1 模糊集的产生与发展

“模糊”两字译自英文“Fuzzy”一词，该词除有模糊意思外，还有“不分明”等含意。有人主张音义兼顾而译为“乏晰”等。在此将Fuzzy译为模糊，或直接采用原文。

随着科学研究的不断深入，研究的对象越来越复杂，要求对系统的控制精度越来越高，而复杂的系统是难以精确化的，这样复杂性与精确性就形成了十分尖锐的矛盾。科技工作者在实践中总结出了“不兼容原理”，即当一个系统复杂性增大时，使它精确化的能力将减小，在达到一定阈值（即限度）之上时，复杂性和精确性将相互排斥。这一原理指出，高精度与高复杂性是不兼容的。

美国加利福尼亚大学扎德（L. A. Zadeh）教授仔细地研究了这个问题，他发现古典集合论中的集合概念必须进行推广，这样有利于用数学模型来描述某些现象中的模糊性。1965年，Zadeh教授发表了《模糊集合论》论文，提出用“隶属函数”这个概念来描述现象差异的中间过渡，从而突破了古典集合论中属于或不属于的绝对关系。Zadeh教授这一开创性的工作，标志着数学的一个新的分支——模糊数学的诞生。

控制论创始人维纳（Norbef Wiener）在谈及人胜过任何最完善的机器时说：“人具有运用模糊概念的能力”。人脑能对模糊事物进行识别和判决，但计算机对模糊现象识别能力较差，为提高计算机识别模糊现象的能力，就需要把人们常用的模糊语言设计成机器能接受的指令和程序，以便机器能像人脑那样简洁灵活地做出相应判断，从而提高自动识别和控制模糊现象的效率，这就推动数学家深入研究模糊数学。

模糊数学是研究和处理模糊现象的，所研究的事物的概念本身是模糊的，即一个对象是否符合这个概念难以确定，由于概念外延的模糊而造成的不确定性称为模糊性（Fuzziness）。在[0,1]上取值的隶属函数就描述了这种模糊性。

1.2 模糊集合论

提起数学来，人们自然会联想到“精确”两字，精确数学是建立在集合论的基础上，在康托尔（G. Cantor）创立的经典集合论中，经典集合所表达概念的内涵和外延都必须是明确的，一事物要么属于某集合，要么不属于某集合，两者必居其一，绝不允许模棱两可！但在人们的思维中，有许多没有明确外延的概念，即模糊概念。语言上有许多模糊概念的词，例如以人的年龄为论域，那么“年青”、“中年”、“老年”都没有明确的外延；或者以人的身高为论域，那么“高个子”、“中等个子”、“矮个子”也没有明确的外延。所以，诸如此类的概念都是模糊概念。

模糊概念不能用经典集合加以描述，这是因为不能绝对地区别“属于”或“不属于”，就是说论域上的元素符合概念的程度不是绝对的0或1，而是介于0和1之间的一个实数。Zadeh教授以精确数学集合论为基础，提出用“模糊集合”作为表现模糊事物的数学模型。并在“模糊集合”上逐步建立运算、变换规律，开展有关的理论研究。Zadeh教授认为，指明各个元素的隶属集合，就等于指定了一个集合。当集合中某一元素的隶属度介于0和1之间时，该集合就是模糊集合。

1.2.1 模糊子集的定义及表示

集合论是现代数学的基础。在经典数学的普通集合论中，一个元素是否属于集合 A 是明确的，即

$$u \in A \quad \text{或} \quad u \notin A$$

两者必属其一，且只属其一，它的逻辑基础是二值逻辑。

除了普通集合（亦称论域）的子集外，还有另外一种子集，它们没有明确的“边界”，称其为“模糊子集”，并用下面带波浪的大字母（如$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$等）来表示。为了表示某一元素与模糊子集的关系，扎德提出了“隶属度”的概念，即是说，对于论域的每一个元素 u_i 在闭区间［0,1］中给它一对应的数字指标，用以表明 u_i 对于模糊子集$\underset{\sim}{A}$的隶属程度，并用$\mu_{\underset{\sim}{A}}$（u_i）或$\mu_i\ \underset{\sim}{A}$表示，称为元素 u_i 对模糊子集$\underset{\sim}{A}$的隶属度。

定义：给定论域 U，所谓指定了 U 上的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，是指对任意 $u \in U$，都有一个隶属度$\mu(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$与之相对应。称$\mu$为$\underset{\sim}{A}$的隶属函数，记作

$$\mu = \underset{\sim}{A}(u) \quad \text{或} \quad \mu\ \underset{\sim}{A}(u)$$

显然，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 值愈大，表示 u 对$\underset{\sim}{A}$隶属程度愈高。$\mu_{\underset{\sim}{A}}=1$ 时，表示 u 肯定属于$\underset{\sim}{A}$；$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=0$ 时，表示 u 肯定不属于$\underset{\sim}{A}$。Zadeh 建议将模糊子集表示为

$$\underset{\sim}{A} = \mu_1 \underset{\sim}{A}/U_1 + \mu_2 A/U_2 + \cdots + \mu_m A/U_m$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mu_i A/U_i \qquad (U_i \in \mu)$$

式中，U 为论域；这里的“+”号并无求和之意。当 U 中的元素为无穷不可数时，则可记为

$$\underset{\sim}{A} = \int_{U} \underset{\sim}{A}(u)/u \qquad (u \in U)$$

同样，这里的积分号也无求积分之意。显然，模糊子集$\underset{\sim}{A}$完全可以由其隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 来描述，因此也可以用模糊向量（即隶属度向量）来表示

$$\underset{\sim}{A} = \{\mu_1 \underset{\sim}{A}, \mu_2 \underset{\sim}{A}, \cdots, \mu_m \underset{\sim}{A}\}$$

当一个子集的隶属度只取 0 或 1 时，则子集就退化成普通子集，普通子集的隶属函数称为特征函数，用 $C_A(u)$ 表示，即

$$C_A(u) = \begin{cases} 1(u \in U) \\ 0(u \overline{\in} U) \end{cases}$$

注意模糊子集是通过隶属函数来下定义的，它本身没有明确的范围，若一定要问其图像，需要选取门槛值 λ。λ 是介于 0、1 之间的一个实数，当 $\mu_A(u) \leqslant \lambda$ 时，便算作 $u \in \underset{\sim}{A}$，否则，便算作 $u \overline{\in} A$，这样得到一个普通子集，记作

$$A_\lambda = \{u \in U, \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \leqslant \lambda\}$$

式中，A_λ 为 A 的 λ 图像，λ 为置信水平。

当 λ 从 1 下降到 0 时，A_λ逐渐扩张，象征$\underset{\sim}{A}$是一个具有游动边界的集合。

模糊集合有以下几种表达方法：

1. U 为有限集时的表示方法

当 U 为有限集$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$时，通常有以下 3 种表示方法。

(1) Zadeh 表示法

$$\underset{\sim}{A}=\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1}+\frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2}+\cdots+\frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}$$

式中，$\underset{\sim}{A}(u_i)/u_i$并不表示“分数”，而是表示论域 U 中的元素 u_i与其隶属度$\underset{\sim}{A}(u_i)$ 之间的对应关系，$i=1, 2, \cdots, n$；“+”也不表示“求和”，而是表示模糊集合在论域 U 上的整体。

(2) 序偶表示法

将论域中的元素 u_i与其隶属度$\underset{\sim}{A}(u_i)$ 构成序偶来表示，即

$$\underset{\sim}{A}=\{(u_1,\underset{\sim}{A}(u_1)),(u_2,\underset{\sim}{A}(u_2)),\cdots,(u_n,\underset{\sim}{A}(u_n))\}$$

此种方法隶属度为 0 的项可不写入。

(3) 向量表示法

$$\underset{\sim}{A}=\{\underset{\sim}{A}(u_1),\underset{\sim}{A}(u_2),\cdots,\underset{\sim}{A}(u_n)\}$$

在向量表示法中，隶属度为 0 的项不能省略。有时也将上述 3 种方法结合起来表示为

$$\underset{\sim}{A}=\left(\frac{\underset{\sim}{A}(u_1)}{u_1},\frac{\underset{\sim}{A}(u_2)}{u_2},\cdots,\frac{\underset{\sim}{A}(u_n)}{u_n}\right)$$

2. U 为有限连续域时的表示方法

当 U 为有限连续域时，Zadeh 给出如下记法：

$$\underset{\sim}{A}=\int_U\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}{u}$$

同样，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)/u$ 并不表示“分数”而表示论域 U 上的元素 u 与隶属度$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 之间的对应关系；“$\int$”既不表示“积分”，也不表示“求和”记号，而是表示论域 U 上的元素 u 与隶属度$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 对应关系的一个总括。

［例 1.1］ 以年龄作论域，取 $U=[0,200]$，Zadeh 给出了“年老”$\underset{\sim}{O}$与“年青”$\underset{\sim}{Y}$两个模糊集合的隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(u)=\begin{cases}0 & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50<u\leqslant 200\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(u)=\begin{cases}1 & 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 25<u\leqslant 200\end{cases}$$

采用 Zadeh 表示法，“年老”$\underset{\sim}{O}$与“年青”$\underset{\sim}{Y}$两个模糊集合可写为

$$\underset{\sim}{O}=\int_{0\leqslant u\leqslant 50}\frac{0}{u}+\int_{50<u\leqslant 200}\frac{\left[1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{u}=\int_{50<u\leqslant 200}\frac{\left[1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{u}$$

$$\underset{\sim}{Y}=\int_{0\leqslant u\leqslant 25}\frac{1}{u}+\int_{25<u\leqslant 200}\frac{\left[1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{u}$$

1.2.2 模糊子集的运算

以经典集合的基本运算为基础，对模糊集合的基本运算另作定义，下面给出定义及其运算性质。

1. 模糊子集的包含和相等关系

设$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$为论域 U 上的两个模糊子集，对于 U 中的每一个元素 u，都有 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$，则称$\underset{\sim}{A}$包含$\underset{\sim}{B}$，记作$\underset{\sim}{A} \supseteq \underset{\sim}{B}$。

如果$\underset{\sim}{A} \supseteq \underset{\sim}{B}$，且$\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$，则说$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$相等，记作$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$。因为模糊集合的特征是它的隶属函数，所以两个模糊子集相等也可以用隶属函数来定义。如对所有元素，都有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$$

2. 模糊子集的并、交、补运算

设$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$为论域 U 上的两个模糊子集，规定$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{A}^c$的隶属函数分别为$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}$、$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}$、$\mu_{\underset{\sim}{A}^c}$，并且对于每一个元素 u，都有

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(u) \triangleq \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(u) \triangleq \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}^c}(u) \triangleq 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

上述三式分别为$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$并集、交集和$\underset{\sim}{A}$的补集。式中，“$\vee$”表示取大运算；“$\wedge$”表示取小运算，称其为 Zadeh 算子。因此，两个模糊子集的并、交运算可写成

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(u) = \max[\mu_{\underset{\sim}{A}}(u), \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)]$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(u) = \min[\mu_{\underset{\sim}{A}}(u), \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)]$$

模糊集合的并、交运算可以推广到任意个模糊集合。

3. 模糊子集的代数运算

代数积：称$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}$为模糊集合$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$的代数积。$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}$的隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}}$为

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}} = \mu_{\underset{\sim}{A}} \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}$$

代数和：称$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}$为模糊集合$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$的代数和。$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}$的隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}}$为

$$\mu_{\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}} = \begin{cases} \mu_A + \mu_B & \mu_A + \mu_B \leqslant 1 \\ 1 & \mu_A + \mu_B \geqslant 1 \end{cases}$$

环和：称$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}$为模糊集合$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$的环和。$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}$的隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}} = \mu_{\underset{\sim}{A}} + \mu_{\underset{\sim}{B}} - \mu_{\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}}$$

模糊集合的运算基本性质与经典集合是相同的，但须指出，模糊集合不再满足互补律，其原因是模糊子集$\underset{\sim}{A}$没有明确的边界，$\underset{\sim}{A}^c$也无明确的边界。正是这一点，使模糊集合比经典集合更能客观地反映实际情况，因为在实际问题中存在着许多模棱两可的情形。

1.2.3 模糊数学的研究内容

模糊子集是通过隶属函数来定义的，如果约定：当 u 对于$\underset{\sim}{A}$的隶属度达到或超过 λ 就算

做$\underset{\sim}{A}$的成员，那么模糊子集$\underset{\sim}{A}$就变成了经典子集 A_λ。例如，“高个子”是一个模糊集合，而“身高 1.75m 以上的人”却是一个经典集合。

模糊数学决不是把数学变成模模糊糊的东西，它也具有数学的共性：条理分明、一丝不苟。即使描述模糊概念（或现象），也会描述得清清楚楚。由 Zadeh 教授创立的模糊数学是继经典数学、统计数学之后数学的一个新发展。统计数学将数学的应用范围从必然现象领域扩大到偶然现象领域，模糊数学则把数学的应用范围从精确现象领域扩大到模糊现象领域。

模糊数学的研究内容主要有以下三个方面：

第一，研究模糊数学的理论，以及它和精确数学、随机数学的关系。

1. 模糊子集的定义及表示

设给定论域 U，U 到 $[0,1]$ 的任意映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1]$$

$$u \to \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$$

确定 U 的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}$成为模糊子集的隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 称为 u 对于$\underset{\sim}{A}$的隶属度。隶属度也可记为$\underset{\sim}{A}(u)$。在不混淆的情况下，模糊子集也称模糊集合。

论域 U 上的模糊子集$\underset{\sim}{A}$有隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 来表征，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 取值范围为闭区间$[0, 1]$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 的大小反映了对于模糊从属程度。$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 的值接近于1，表示 u 从属于$\underset{\sim}{A}$的程度很高；$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 的直接近于0，表示 u 从属于$\underset{\sim}{A}$的程度很低。可见，模糊子集完全由隶属函数所描述。

当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 的值域 $= \{0,1\}$ 时，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 蜕化成一个经典子集的特征函数，模糊子集$\underset{\sim}{A}$便蜕化成一个经典子集。由此不难看出，经典集合是模糊集合的特殊形态，模糊集合是经典集合概念的推广。

2. 模糊子集的运算

模糊子集的运算包括如 1.2.2 节所述的包含和相等运算，并、交和非运算以及代数运算。

第二，研究模糊语言学和模糊逻辑。

在应用模糊集合论对模糊命题进行模糊推理时，应用模糊关系表示模糊条件句，将推理的判断过程转化为对隶属度的合成及演算过程。

设 A 和 B 分别为 X 和 Y 上的模糊集，它们的隶属函数分别为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 和 $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，单词 a 和 b 分别用 X 和 Y 上的子集 A、B 描述，模糊推理句“$(a) \to (b)$”可表示为从 X 到 Y 的一个模糊关系，它是 $X \times Y$ 的一个模糊子集，记为 $\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{B}$。当把隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$、$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ 及 $\mu_{\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{B}}(x,y)$ 分别记为$\underset{\sim}{A}(x)$、$\underset{\sim}{B}(x)$ 及$(\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{B})(x,y)$ 时，则有

$$(\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{B})(x,y) \triangleq [\underset{\sim}{A}(x) \wedge \underset{\sim}{B}(y)] \vee [1 - \underset{\sim}{A}(x)]$$

上述思想即为 Zadeh 提出的近似推理中的假言推理方法，其推理规则为

$$\begin{array}{ll} \text{大前提} & \underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{B} \\ \text{小前提} & \underset{\sim}{A}_1 \\ \hline \text{结　论} & \underset{\sim}{B}_1 = \underset{\sim}{A}_1 \circ (\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{B}) \end{array}$$

其中，运算符号“$\circ$”仍表示模糊关系的合成。

上述推理过程可理解为一个模糊变换器，当输入一个模糊子集$\underset{\sim}{A}_1$经过模糊变换器$\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$时，输出$\underset{\sim}{A}_1\circ(\underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B})$，如图 1-1 所示。

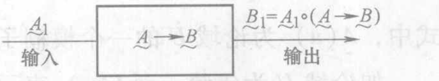

图 1-1　模糊变换器

第三，研究模糊数学的应用。

模糊数学是一门新兴学科，它已初步应用于模糊控制、模糊识别、模糊聚类分析、模糊决策、模糊评判、系统理论、信息检索、医学、生物学等各个方面。在气象、结构力学、控制、心理学等方面已有具体的研究成果。然而模糊数学最重要的应用领域是计算机智能，不少人认为，它与新一代计算机的研制有密切的联系。目前，世界上的发达国家正在积极研究、试制智能化的模糊计算机。1986 年，日本山川烈博士首次试制成功模糊推理机，它的推理速度是1000 万次/s。1988 年，我国汪培庄教授指导的几位博士也研制成功一台模糊推理机——分立元器件样机，它的推理速度为 1500 万次/s。这表明我国在突破模糊信息处理难关方面迈出了重要的一步。

特别值得一提的是，20 世纪 90 年代以来，空调器、电冰箱、洗衣机、洗碗机等家用电器中已广泛采用了模糊控制技术。我国于 20 世纪 90 年代初在杭州生产了第一台模糊控制洗衣机。由此看来，模糊数学已逐步进入普通老百姓的家庭了。

1.3　模糊逻辑与模糊推理

人类自然语言具有模糊性，能正确地进行识别和判断。计算机对模糊性却缺乏识别和判断能力，为了实现用自然语言跟计算机进行直接对话，就必须把人类的语言和思维过程提炼成数学模型，才能给计算机输入指令，建立合适的模糊数学模型，这是运用数学方法的关键。

1.3.1　模糊语言

把具有模糊概念的语言称为模糊语言。众所周知，任何一种语言都是以一定的符号来代表一定的意思，这种符号被称为文字，简称为“字”。语言中“字”和“义”的对应关系称为语义。当以颜色为语言主题时，即论域 U 为颜色，而表示颜色的这一类单词就构成一个集合 T。语义通过从 T 到 U 的对应关系 N 来表达，通常 N 是一个模糊关系，对任意固定的 $a\in T$，记

$$N(a,u)=\mu_A(u)$$

它是一个模糊子集，也可记为$\underset{\sim}{A}(u)$。单词 a 对应于 U 的这个模糊子集，用与 a 相对应的大写字母 A 表示这个集合。当$\underset{\sim}{A}=A$ 时，则集合为普通集合，单词 a 的意义是明确的，否则称为模糊的。$\underset{\sim}{N}$是集合 T 对论域 U 的模糊关系，设$\mu_{\underset{\sim}{N}}$: $T\times U\to[0,1]$ 为$\underset{\sim}{N}(a,u)$ 的隶属函数，它具有两个变量，其中 $a\in T$，$u\in U$。$\mu_{\underset{\sim}{N}}(a,u)$ 表示属于 T 的单词 a 与属于 U 的对象 u 之间关系的程度。

在自然语言中，有一些词可以表达语气的肯定程度，如“非常”、“很”、“极”等；也有一类词，如“大概”、“近似于”等，置于某个词前面，使该词意义变为模糊；还有一些

词，如“偏向”、“倾向于”等可使词义由模糊变为肯定。

下面着重介绍一下语气算子。语气算子可定义为

$$(H_\lambda \underset{\sim}{A})(u) \underline{\Delta} [\underset{\sim}{A}(u)]^\lambda$$

式中，$\underset{\sim}{A}(u)$ 为论域$\dot{U}$的一个模糊子集；H_λ为语气算子，λ为一正实数。

如论域U为年龄，而$\underset{\sim}{A}(u)$表示单词［老］，那么随着λ取不同值，就可以表示出“年老”的程度。当$\lambda>1$时，H_λ称为集中化算子，它能加强语气的肯定程度。不妨称$H_{\frac{5}{4}}$为“相当”，H_2为“很”，H_4为“极”，则

$$[相当老](u)=(H_{\frac{5}{4}}\underset{\sim}{A})(u)=[\underset{\sim}{A}(u)]^{\frac{5}{4}}=\begin{cases}0 & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-2} & 50<u\leqslant 200\end{cases}$$

当$\lambda<1$时，H_λ称为散漫化算子，它可以适当地减弱语气的肯定程度。如可称$H_{\frac{1}{4}}$为“微”，$H_{\frac{1}{2}}$为“略”，$H_{\frac{3}{4}}$为“比较”。

除上面介绍的语气算子外，还有模糊化、规定化、美化、比喻、联想等算子，在此就不一一介绍了。

自然语言中的一些词可以数量化，如大、小、长、短、高、矮等，以及加上语言算子派生出来的词汇，如很大、略小、极长、倾向短、不高也不矮等，都称为语言值，它们都是以实数域或其子集为论域的词汇。此外，如可能、很可能、不大可能等也都是语言值。

如果在论域$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$上定义［大］、［小］的语言值，则它们分别为

$$[大]=0.2/4+0.4/5+0.6/6+0.8/7+1/8+1/9+1/10$$

$$[小]=1/1+0.8/2+0.6/3+0.4/4+0.2/5$$

那么根据前面介绍的语言算子，则有

$$[不大也不小]=[大]^c\wedge[小]^c=0.2/2+0.4/3+0.6/4+0.6/5+0.4/6+0.2/7$$

$$[很小]=H_2[小]=1/1+0.64/2+0.36/3+0.16/4+0.04/5$$

上面对模糊语言做了初步介绍，目前模糊语言方面的研究还很不成熟，语言学家正在进行深入的研究。

1.3.2 模糊命题与模糊逻辑

1. 模糊命题

人们把具有模糊概念的陈述句称为模糊命题，一个模糊命题一般用英文字母上面或下面加波浪“～”来表示。

模糊命题比二值逻辑中的命题更能符合人脑的思维，它是普通命题的推广，反映了真或假的程度。因此，仿照模糊集合中的隶属函数的形式，可将模糊命题的真值推广到［0,1］区间上用连续值进行描述。

模糊命题$\underset{\sim}{P}$的真值记作

$$V(\underset{\sim}{P})=x \qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

显然，当$x=1$时，表示$\underset{\sim}{P}$完全真；$x=0$时，表示$\underset{\sim}{P}$完全假；介于0、1之间时，表征$\underset{\sim}{P}$真的程度。x越接近于1，表明真的程度越大；x越接近于0，表明真的程度越小，即假的程度越大。

2. 模糊逻辑

通常将研究模糊命题的逻辑称为连续值逻辑，也称模糊逻辑。它是二值逻辑的推广，是对经典的二值逻辑的模糊化，是建立在模糊集合和二值逻辑概念基础上的，可以把它视为一类特殊的多值逻辑。一个公式的值，可在模糊逻辑中取［0,1］区间中的任何值，其数值表示这个模糊命题真的程度。

一般情况下，对于一个合适的给定模糊逻辑函数式，可以通过等价变换使其成为析取范式（又称逻辑并标准形）或合取范式（又称逻辑交标准形），或是析取范式和合取范式的组合。

一般析取标准形可简记为

$$F = \sum_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

合取标准形可简记为

$$F = \prod_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

式中，x_{ij}为模糊变量，称其为“字”，“字”的析取式 $x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{ip}$叫子句；“字”的合取式 $x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_p$叫字组。由此不难看出，析取标准形为“积之和”型；而合取标准形为“和之积”型。

对于同一模糊逻辑函数，两种范式之间是对偶的。可以自行验证，在此不再赘述。

1.3.3 模糊推理

1. 判断与推理

判断与推理是思维形式的一种，判断是概念与概念的联合，而推理则是判断与判断的联合。

直言判断句的句型为“u 是 a”，是表示论域中的任何一个特定对象，称 u 为语言变元；a 为表示概念的一个词或词组。这种判断句记作（a）。如果 a 的外延是清晰的，则 a 所对应的集合为普通集合，a 称（a）是普通的判断句。

如果 $u \in A$，称“u 是 a”的判断为真，把 A 称为（a）的真域；如果 $u \notin A$，称“u 是 a”的判断为假。不难看出（a）对 u 真$\Leftrightarrow u \in A$，当“u 是 a”的判断没有绝对的真假时，将 u 对$\underset{\sim}{A}$的隶属度定义为（a）对 u 的真值。“若 u 是 a，则 u 是 b”型的判断句称为推理句，简记为“$(a) \rightarrow (b)$”。

2. 模糊推理句

模糊推理句与模糊判断句一样，不能给出绝对的真与不真，只能给出真的程度。类似于普通推理句，模糊推理句真值定义为

“$(a) \rightarrow (b)$”对 u 的真值$\triangleq ((a) \rightarrow (b))(u) \triangleq (A-B)^c(u) = (1-\underset{\sim}{A}(u) \wedge (1-\underset{\sim}{B}(u))$

由于有$\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}^c$，故可得

$$(\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B})^c = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}^c) = \underset{\sim}{A}^c \cup \underset{\sim}{B}$$

于是有$((a) \rightarrow (b))(u) = (1-A(u)) \vee \underset{\sim}{B}(u)$。

3. 模糊推理过程