全国高等学校配套教材

供基础、预防、临床、口腔、法医学类专业用

医学物理学学习指导

第2版

主　编　胡新珉

副主编　王　磊

吴　杰

人民卫生出版社

全国高等学校配套教材

供基础、预防、临床、口腔、法医学类专业用

医学物理学学习指导

第 2 版

主　编　胡新珉

副主编　王　磊　吴　杰

编者（以姓氏笔画为序）

王　岚（哈尔滨医科大学）
王章金（华中科技大学）
王　磊（四川大学）
刘筑闻（首都医科大学）
吴　杰（昆明医学院）
李晓原（中山大学）
屈学民（第四军医大学）
胡新珉（四川大学）
盖立平（大连医科大学）
訾　忠（第四军医大学）
符维娟（复旦大学）
曾小青（中南大学）
管靖华（山东大学）
魏　杰（蚌埠医学院）

人民卫生出版社

图书在版编目(CIP)数据

医学物理学学习指导/胡新珉主编.—2版.—北京：人民卫生出版社，2004.10

ISBN 7-117-06437-4

Ⅰ.医… Ⅱ.胡… Ⅲ.医用物理学-医学院校-教学参考资料 Ⅳ.R312

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第096440号

医学物理学学习指导

第 2 版

主　　编：胡 新 珉

出版发行：人民卫生出版社(中继线 67616688)

地　　址：(100078)北京市丰台区方庄芳群园3区3号楼

网　　址：http://www. pmph. com

E - mail：pmph @ pmph. com

印　　刷：北京人卫印刷厂(万通)

经　　销：新华书店

开　　本：787×1092　1/16　　**印张：**13

字　　数：290千字

版　　次：2002年5月第1版　2004年12月第2版第4次印刷

标准书号：ISBN 7-117-06437-4/R·6438

定　　价：17.00元

前　言

《医学物理学》是全国高等医药院校中一门重要的基础理论课程。为了更好地贯彻少而精的原则,让学生能用较少的时间掌握较多的现代医学所需的物理知识,提高学生的自学能力和分析问题、解决问题的能力,我们根据医学物理学课程的基本要求和高等医药院校的实际,编写了《医学物理学学习指导》第2版,与胡新珉主编的全国高等医药院校规划教材《医学物理学》(第六版)配套使用。

本书分章编写,每章均由以下部分组成:本章内容提要;解题指导——典型例题;思考题和习题解答;自我评估题。

"本章内容提要"部分,引导学生复习每章的基本内容;"解题指导——典型例题"部分,则通过典型例题的分析和解算,总结解题的方法,讨论解题技巧,但解题步骤未作统一要求,以便学生根据自己的实际选用;"思考题和习题解答"部分,给出每题的详细参考解答,供学生与自己所作解答对比使用;"自我评估题"部分,只给答案,未给出解算过程,供学生自我评估使用。有人会担心:"既然思考题和习题均给出了详细解答,学生就懒于作习题和思考题了"。这种情况也许会在少数学生身上发生,但要相信绝大多数学生的自觉性,他们是会精心地做每一道思考题和习题的,因为他们深知,学习知识、探求真理的有效途径是自己动手、动脑,实践获真知。

书末附录中,有一些著名物理学家的简介,供学生和教师学习用,我们在学习物理学理论的同时,要追根溯源,学习物理学家"独创"的思维方式和奇特的研究方法。爱因斯坦曾说过:"对真理的追求比真理本身更重要。"

由于编写时间仓促,编者水平有限,书中难免有不妥之处,请读者批评指正。

编　者

2004年4月

目　录

第一章

力学基本定律

一、本章内容提要

1. 位移　质点在一段时间内位置的改变称为在这段时间内的位移；位移是矢量。

2. 速度　质点的位移与所经历的时间的比值；速度是矢量。

3. 加速度　质点的运动速度随时间的变化率，称为质点在时刻 t 的瞬时加速度，简称加速度。

4. 牛顿第一定律　物体（质点）如果不受外力的作用，它将保持原有的静止状态或作匀速直线运动（惯性定律）。

5. 牛顿第二定律　作用在物体上的合外力 $\boldsymbol{F}$ 等于物体动量的时间变化率；即 $\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$。

6. 牛顿第三定律　力总是成对出现的。如果物体 A 以力 $\boldsymbol{F}_A$ 作用在物体 B 上，则物体 B 也必然同时以一个等大反向的力 $\boldsymbol{F}_B$ 作用在物体 A 上，即 $\boldsymbol{F}_A=-\boldsymbol{F}_B$。

7. 量纲　表示物理量如何由基本量组合的式子；量纲可以用来校核等式，也可以定出同一物理量不同单位之间的换算关系。

8. 惯性参考系　适用牛顿运动定律的参考系或牛顿第一定律定义

的参照系;在这个参照系中,一个不受力作用的物体将保持静止或作匀速直线运动。

9. 非惯性系　相对于一个已知惯性系作加速运动的参考系。

10. 功　力在位移方向上的分量与该位移大小的乘积,$\mathrm{d}A=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

11. 动能　物体因运动而具有的作功本领,可表示为$\frac{1}{2}mv^2$。

12. 动能定理　质点的动能增量等于合外力对它所作的功。

13. 保守力　力对物体所作的功与物体运动的路径无关,仅由运动物体的始末位置所决定,这样的力叫做保守力。

14. 势能　保守力作功与路径无关,只取决于物体间的始末位置,由相对位置决定的函数称为势能函数。

15. 功能原理　机械能的增量等于外力与非保守内力所作功的代数和。

16. 机械能守恒定律　如果外力和非保守内力作功之和为零,物体系的机械能保持不变。

17. 对称性与对称操作　如果进行一次变动或操作后事物完全复原,则称该事物对所经历的变动或操作具有对称性,而该操作就称为对称操作。

18. 冲量　$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$,表示力在时间 $\mathrm{d}t$ 内的累积量。

19. 动量定理　物体所受合外力的冲量等于物体动量的改变。

20. 动量守恒定律　当系统所受的合外力为零时,系统的总动量保持不变。

21. 碰撞　指两个物体在运动过程中相互靠近,或发生接触时,在相对较短时间内发生强烈相互作用的过程。

22. 弹性碰撞　在碰撞前后两物体总动能没有损失的碰撞。

23. 完全非弹性碰撞　两物体在碰撞后不分开的碰撞。

24. 刚体　如物体在任何力的作用下不改变其形状和大小,就可以把它视为刚体。

25. 定轴转动　转动物体各质元的圆心都在一条固定不动的直线上。

26. 角加速度　单位时间内的角速度的改变量。

27. 转动惯量　刚体转动惯性的量度。$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int r^2\rho\mathrm{d}V$。

28. 转动定律　转动物体的角加速度与作用的力矩成正比,与物体的转动惯量成反比。

29. 角动量　$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$

30. 角动量守恒定律　封闭系统中的内力矩不改变系统的总角动量。

31. 旋进　自转轴以角速度 Ω 绕竖直轴转动的现象。

二、解题指导——典型例题

【例 1-1】　一质点沿半径为 R 的圆周按 $S=v_0t-\frac{1}{2}\mathrm{b}t^2$ 的规律运动,式中 v_0,b 都是正常数。试求:

(1)t 时刻质点加速度的大小;(2)t 为何值时加速度的大小等于 b;(3)当加速度的大

小为b时,质点已沿圆周运行了多少圈?

解:(1)根据题意,质点做圆周运动的速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=v_0-\mathrm{b}t$$

其加速度的切向分量和法向分量在自然坐标系中分别为

$$a_{\tau}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{b}$$

$$a_n=\frac{v^2}{\mathrm{R}}=\frac{(v_0-\mathrm{b}t)^2}{\mathrm{R}}$$

故加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_N^2+a_{\tau}^2}=\frac{\sqrt{\mathrm{R}^2\mathrm{b}^2+(v_0-\mathrm{b}t)^4}}{R}$$

(2)要使加速度的大小为b,即

$$\frac{\sqrt{\mathrm{R}^2\mathrm{b}^2+(v_0-\mathrm{b}t)^4}}{\mathrm{R}}=\mathrm{b}$$

由上式解得

$$t=\frac{v_0}{\mathrm{b}}$$

(3)质点在时间t内运动的位移大小为

$$S=v_0t-\frac{1}{2}\mathrm{b}t^2=\frac{v_0^2}{2\mathrm{b}}$$

质点在时间t内,沿圆周运行的圈数n为

$$n=\frac{S}{2\pi\mathrm{R}}=\frac{v_0^2}{4\pi\mathrm{R}\mathrm{b}}$$

答:t时刻质点加速度的大小为$\frac{\sqrt{\mathrm{R}^2\mathrm{b}^2+(v_0-\mathrm{b}t)^4}}{R}$;$t=\frac{v_0}{b}$时加速度的大小等于$b$;当角速度的大小为$b$时,质点已沿圆周运行了$\frac{v_0^2}{4\pi\mathrm{R}\mathrm{b}}$。本题属运动学的问题,即通过运动学方程,利用求导得到速度和加速度。

【例1-2】 有一架飞机由A向东飞到B处,然后又向西飞回到A处,飞机相对空气以不变的速率v'飞行,空气相对地面的速率为u,A到B的距离为l。在下列三种情况下,试求飞机飞行一个来回所需的时间。

(1)空气相对地面静止;

(2)空气的速度向东;

(3)空气的速度向北。

解:(1)由速度变换定理,则飞机相对地面往返飞行的速度大小均为v',飞机飞一个来回所需的时间为

$$t_1=t_{AB}+t_{BA}=\frac{l}{v'}+\frac{l}{v'}=\frac{2l}{v'}$$

(2)由速度变换定理,飞机相对地面由 A 向东飞到 B 的速度大小为

$$v_{AB}=v'+u$$

飞机相对地面由 B 向西飞到 A 的速度大小为

$$v_{BA}=v'-u$$

飞机飞一个来回所需的时间为

$$t_2=t_{AB}+t_{BA}=\frac{l}{v'+u}+\frac{l}{v'-u}=\frac{2l}{v'[1-(u/v')^2]}=\frac{t_1}{1-(u/v')^2}$$

(3)当空气的速度 u 向北时,飞机相对地面的飞行速度 v 及飞机相对空气的速度 v' 与 u 间,由相对运动关系有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

因此,飞机相对于地面的飞行速度的大小为

$$v=\sqrt{v'^2-u^2}$$

飞机飞一个来回所需的时间为

$$t_3=t_{AB}+t_{BA}=\frac{2l}{v}=\frac{2l}{\sqrt{v'^2-u^2}}=\frac{t_1}{\sqrt{1-(u/v')^2}}$$

答:(1)空气相对地面静止时,飞机飞行一个来回所需的时间为$\frac{2l}{v'}$;(2)空气的速度向东时,飞机飞行一个来回所需的时间为$\frac{t_1}{1-(u/v')^2}$;(3)空气的速度向北时,飞机飞行一个来回所需的时间为$\frac{t_1}{\sqrt{1-(u/v')^2}}$。求解相对运动问题时,应注意三个问题:一是运动物体,二是选取绝对参照系,三是选取相对参照系。在本题中,飞机为运动物体,选取地面为绝对参照系,空气相对于地面的运动,选取与空气固定的坐标系为相对参照系。明确这三者之间的关系,即可由速度变换关系,方便的求解。

【例 1-3】 如图 1-1 所示,一根均匀的轻质细绳,一端拴一质量为 m 的小球,在竖直平面内,绕定点 O 做半径为 R 的圆周运动。已知 $t=0$ 时,小球在最低点以初速度 v_0 运动,如图所示。试求:(a)小球速率与位置的关系;(b)小球在任一点所受绳子的张力与速率的关系。

解:(a)小球在任一点 B 的受力如图所示,取自然坐标系

$$切向:-mg\sin\theta=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$法向:T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{R} \qquad (2)$$

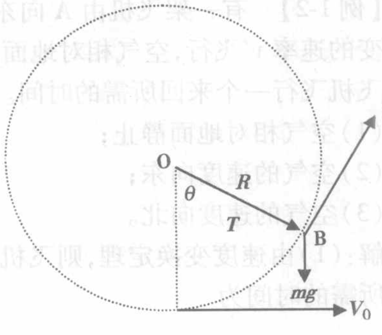

图 1-1 例 1-3 图

由式(1)

$$-g\sin\theta=\frac{v}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

即

$$v\mathrm{d}v = -Rg\ \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{3}$$

对式(3)积分,并由已知条件 $\theta = 0°$时,$v = v_0$ 得

$$v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos\theta) \tag{4}$$

(b)由式(4)得

$$g\ \cos\theta = g + \frac{v^2 - v_0^2}{2R}$$

代入式(2)得

$$T = mg + \frac{m(3v^2 - v_0^2)}{2R}$$

答:(a)小球速率与位置的关系是 $v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos\theta)$;(b)小球在任一点所受绳子的张力与速率的关系是 $T = mg + \dfrac{m(3v^2 - v_0^2)}{2R}$。本题在于加强对牛顿运动定律瞬时性的理解。解题时为了方便,有时需做变量带换,如$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{v}{R}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$等。

【例1-4】 如图1-2(a)所示,一质量为2kg的物体以3.0m·s^{-1}的初速率从斜面上A点滑下,物体与斜面之间的摩擦力为6.2N。物体到B点时,开始压缩弹簧,当弹簧被压缩了0.2m后,物体停止运动,然后又被弹送回去。已知斜面的倾角为30°,AB间距离为5.0m,弹簧一端固定在斜面上,处于自然长度时,其另一端位于B点,弹簧的质量不计。试求弹簧的劲度系数和物体被弹回后所能达到的最大高度(g取10m·s^{-2})。

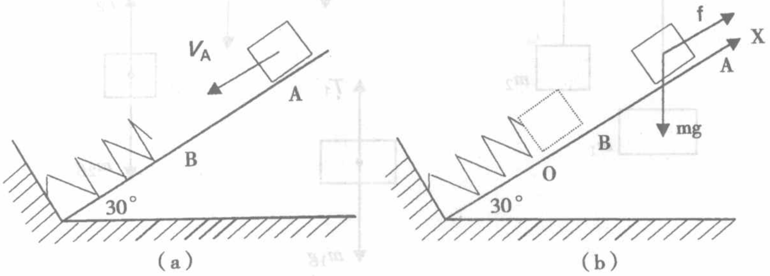

图1-2 例1-4图

解:物体受力如图(b)所示。选择O点为重力势能零点,选择B点为弹力势能零点。物体由点A运动到点O,由功能原理,有

$$-fx_A = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 - mgx_A\sin\theta$$

由此可得弹簧的劲度系数为

$$\begin{aligned} k &= \frac{mv_A^2 + 2mgx_A\sin\theta - 2fx_A}{x_B^2} \\ &= \frac{2\times 3.0^2 + 2\times 2\times 10\times 5.2\times\sin 30° - 2\times 6.2\times 5.2}{0.2^2} \\ &= 1.438\times 10^3 (N/m) \end{aligned}$$

当物体被弹回时,设物体到达最大高度的坐标为 x,则物体由点O运动至最高点,由

功能原理,得

$$-fx = mgx\sin\theta - \frac{1}{2}kx_B^2$$

解得

$$x = \frac{kx_B^2}{2(mg\sin\theta + f)} = \frac{1.4\times10^3\times0.2^2}{2\times(2\times10\times\frac{1}{2}+6.2)} = 1.728(\text{m})$$

物体被弹回的最大高度为

$$h_m = x\sin\theta = 0.86(\text{m})$$

答:弹簧的劲度系数和物体被弹回后所能达到的最大高度 $h_m = x\sin\theta = 0.86(\text{m})$。由于本题不涉及时间,故可利用动能定理或功能原理求解。物体所受的4个力,支持力不做功,重力和弹性力是保守力,势能零点可依题意灵活选取。

【例1-5】 如图1-3所示,一轻绳跨过一轴承光滑的定滑轮,绳的两端分别悬有质量为 m_1 和 m_2 的物体($m_1 < m_2$)。滑轮可视为均匀圆盘,质量为 m,半径为 r。绳与滑轮无相对滑动。试求物体的加速度、滑轮的角加速度和绳中的张力。

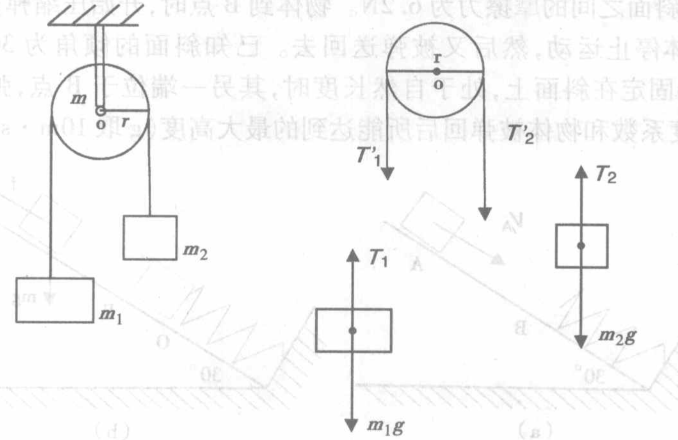

图1-3 例1-5图

解:根据题意,滑轮的质量不能忽略,必须考虑滑轮绕定轴的转动。分别取滑轮、m_1 和 m_2 为研究对象,它们的受力如图所示。因 $m_2 > m_1$,m_1 的加速度 a_1 方向向上,m_2 的加速度 a_2 方向向下,且 $a_1 = a_2 = a$。设滑轮的角加速度为 β,对 m_1 和 m_2 应用牛顿第二定律,对滑轮应用转动定律,可列出下列方程

$$T_1 - m_1g = m_1a$$

$$m_2g - T_2 = m_2a$$

$$T'_2r - T'_1r = J\beta$$

由于绳和滑轮无相对滑动,故轮边缘上质点的切向加速度和 m_1、m_2 的加速度大小相等。它们与角加速度 β 的关系是

$$a = r\beta$$

又 $T_1' = T_1, T_2' = T_2$，$J = \frac{1}{2}mr^2$，将四个方程联立求解，得

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

$$\beta = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m)r}$$

$$T_1 = \frac{m_1(2m_2 + \frac{1}{2}m)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

$$T_2 = \frac{m_2(2m_1 + \frac{1}{2}m)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

答：物体的加速度$\frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$，滑轮的角加速度$\frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m)r}$和绳中的张力 $T_1 = \frac{m_1(2m_2 + \frac{1}{2}m)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$，$T_2 = \frac{m_2(2m_1 + \frac{1}{2}m)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$。当滑轮的质量不能忽略时，对滑轮的转动应用转动定律。

【例1-6】 如图1-4所示，质量为 M、长为 l 的均匀细直棒，可绕棒的一端且垂直于棒的水平轴 O 无摩擦的转动，棒原来静止在平衡位置上。现有一质量为 m 的弹性小球飞来，正好在棒的下端与棒垂直相撞。相撞后，使棒从平衡位置摆动到 $\theta = 30°$ 的最高处，如图所示。(1)设碰撞为完全弹性碰撞，计算小球碰前 v_0 的大小；(2)相撞时，小球受到多大的冲量。

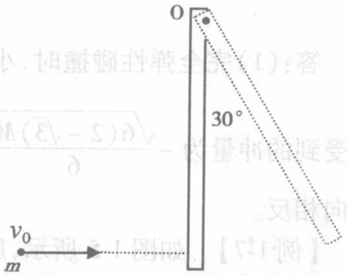

图1-4 例1-6图

解：小球碰前的速度为 v_0，棒经小球碰撞后得到的角速度为 ω，碰后小球的速度变为 v。按题意，小球和棒做完全弹性碰撞，所以，碰撞过程遵从角动量守恒定律和机械能守恒定律，可列方程如下：

$$mv_0 l = J\omega + mvl \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

碰撞后，棒从竖直位置上摆到最大角度 $\theta = 30°$，按机械能守恒定律可列式：

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}Mgl(1 - \cos 30°) \tag{3}$$

由(3)式得

$$\omega = \left[\frac{Mgl}{J}(1 - \cos 30°)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{3g}{l}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

由(1)式得

$$v = v_0 - \frac{J\omega}{ml}$$

由(2)式得

$$v^2=v_0^2-\frac{J}{m}\omega^2$$

所以

$$\left(v_0-\frac{J\omega}{ml}\right)^2=v_0^2-\frac{J}{m}\omega^2$$

求得

$$v_0=\frac{l\omega}{2}\left(1+\frac{J}{ml^2}\right)=\frac{l}{2}\left(1+\frac{1}{3}\frac{M}{m}\right)\omega=\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}}{12}\frac{3m+M}{m}\sqrt{gl}$$

相碰时小球受到的冲量为

$$\int F\mathrm{d}t=\Delta mv=mv-mv_0$$

由(1)式求得

$$\int F\mathrm{d}t=mv-mv_0=-\frac{J\omega}{l}=-\frac{1}{3}Ml\omega$$

$$=-\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}M}{6}\sqrt{gl}$$

答:(1)完全弹性碰撞时,小球碰前的速度为$\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}}{12}\frac{3m+M}{m}\sqrt{gl}$;(2)相撞时,小球受到的冲量为$-\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}M}{6}\sqrt{gl}$。负号表明小球所受冲量的方向与小球碰前的速度方向相反。

【例1-7】 如图1-5所示,质量分别为m_1,m_2的两木块与劲度系数为k的弹簧相连,静止地放在光滑地面上,质量为m的子弹以水平初速v_0射入木块m_1,设子弹射入过程的时间极短,试求(1)弹簧的最大压缩长度;(2)木块m_2相对地面的最大速度和最小速度。

图1-5 例1-7图

解:在m和m_2相碰过程中动量守恒。碰撞后,由$(m+m_1)$,m_2和弹簧组成的系统机械能守恒、动量守恒。系统的总机械能和总动量就是碰撞后$(m+m_1)$的初始动能和初始动量。

最大压缩时,$(m+m_1)$与m_2的速度相同,相应的弹性势能与动能之和等于总机械能,相应的动量等于总动量,可以求得最大压缩比。

系统的弹性势能为零时,m_2与$(m+m_1)$具有最大动能,即m_2具有最大或最小速度,相应的总机械能和总动量仍不变,由此可以求得最大速度和最小速度。

选择质心参照系,利用质心参照系中,碰撞后的机械能守恒及总动量为零来求解。在质心系中,最大压缩相应为零,而m_2具有最大、最小速度时弹性势能为零。

取地面参照系,m与m_1碰撞前、后动量守恒

$$mv_0=(m+m_1)v_{10} \tag{1}$$

取$(m+m_1)$与m_2组成的物体系,碰撞后物体系的机械能守恒、动量守恒,总机械能为碰撞后$(m+m_1)$的初始动能,为$\frac{1}{2}(m+m_1)v_{10}^2$,总动量为$mv_0=(m+m_1)v_{10}$。

当弹簧达到最大压缩长度 x 时，$(m+m_1)$ 与 m_2 的速度相同，设 v，由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}(m+m_1)v_{10}^2=\frac{1}{2}(m+m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}kx^2 \tag{2}$$

由动量守恒得

$$mv_0=(m+m_1+m_2)v \tag{3}$$

(1)、(2)、(3)连立，可得

$$x=mv_0\sqrt{\frac{m_2}{(m+m_1)(m+m_1+m_2)k}}$$

弹性势能为零时，设 $(m+m_1)$ 和 m_2 的速度分别为 v_1 和 v_2，则 v_2 将是 m_2 的最大或最小速度。

$$\frac{1}{2}(m+m_1+m_2)v_{10}^2=\frac{1}{2}(m+m_1)v_1^2+\frac{1}{2}m_2x_2^2 \tag{4}$$

由动量守恒

$$mv_0=(m+m_1)v_1+m_2v_2 \tag{5}$$

(1)、(4)、(5)连立，可得

$$v_2=\begin{cases}0\\ \dfrac{2mv_0}{m+m_1+m_2}\end{cases}$$

这就是最小速度和最大速度。

答：(1)弹簧的最大压缩长度为 $x=mv_0\sqrt{\dfrac{m_2}{(m+m_1)(m+m_1+m_2)k}}$；(2)木块 m_2 相对地面的最大速度为 $\dfrac{2mv_0}{m+m_1+m_2}$，最小速度为0。在碰撞前后，系统的动量、机械能均守恒。

【例1-8】 如图1-6所示，一根质量为 m，长为 $2l$ 的均匀细棒，可以在竖直平面内绕通过其中心的光滑水平轴oo’转动。开始时细棒静止在水平位置，如图所示。一质量为 m_1 的小球，以速度 u 垂直落到棒的端点，小球与棒做完全弹性碰撞。试求碰撞后，小球的回跳速率 v 以及棒的角速率 ω 各为多少。

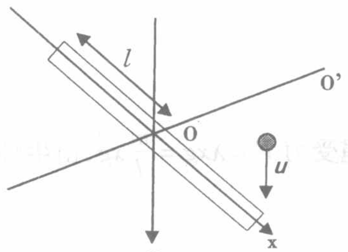

图1-6 例1-8图

解：将棒和小球视为一研究系统。系统所受的外力有：小球的重力 m_1g，棒的重力 mg。碰撞力矩远大于小球所受重力矩，所以小球重力对轴力矩可忽略。

根据以上分析，可以认为系统满足角动量守恒条件。因为碰撞前棒处于静止状态，所以碰前系统的角动量大小为 m_1ul，碰后，小球以速率 v 回跳，其角动量大小为 m_1vl；棒获角速度 ω，棒的角动量是 $\frac{1}{12}m(2l)^2\omega^2=\frac{1}{3}ml^2\omega^2$。所以，碰后系统的角动量是 $lm_1v+\frac{1}{3}ml^2\omega^2$。由于角动量守恒，故有

$$lm_1u = lm_1v + \frac{1}{3}ml^2\omega \tag{1}$$

取碰前小球运动的方向为正，即 $u>0$，那么，碰后小球回跳，v 与 u 的方向相反，故 $v<0$。又因为是完全弹性碰撞，碰撞前后系统的动能守恒，即

$$\frac{1}{2}m_1u^2 = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 \tag{2}$$

将式(1)和式(2)联立，解得

$$v = \frac{3m_1 - m}{3m_1 + m}u;\ \omega = \frac{6m_1u}{(3m_1 + m)l}$$

答：碰撞后，小球的回跳速率为 $\frac{3m_1 - m}{3m_1 + m}u$，棒的角速率为 $\frac{6m_1u}{(3m_1 + m)l}$。小球与刚体相碰，系统的动量不守恒，而系统的角动量守恒。

【例 1-9】 如图 1-7 所示，在水平桌面上有一孔，绳子的一部分放在桌面下，另一部分经孔下垂。设不可伸长，均匀柔软，全长为 l，下垂长度为 x_0，从静止开始下落。设摩擦可忽略。试求下落过程中，绳子速度随下落长度变化的规律。

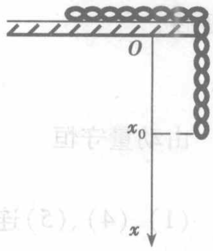

图 1-7 例 1-9 图

解：解法一 取绳与地球组成的物体系。取 x 坐标竖直向下，原点 O 在桌面上，规定该处的重力势能 $E_p=0$。设绳子的线密度为 λ，总质量为 $m=\lambda l$。

当绳下端在 x_0 处开始下落时，动能为零，重力势能为

$$-\int_0^{x_0} mg\cdot dx = -\int_0^{x_0}\lambda xg dx = -\frac{\lambda}{2}gx_0^2$$

当绳下端落到任意处 x 时，$E_k = \frac{1}{2}mv^2$，$E_p = -\lambda x\cdot\frac{x}{2}g = -\frac{\lambda}{2}gx^2$

下落过程中，物体系机械能守恒，故

$$-\frac{1}{2}gx_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}gx^2$$

所以 v 与 x 的变化规律为

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(x^2 - x_0^2)}$$

解法二 当绳下端在任意位置 x 处时，在竖直方向绳受力 $F=\lambda xg = \frac{m}{l}xg$，由牛顿第二定律

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{m}{l}gx$$

利用 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$，把上式改写成

$$vdv = \frac{g}{l}xdx$$

积分得

$$v^2 = \frac{g}{l}x^2 + C$$

当 $x = x_0$ 时，$v = 0$，故可得

$$C = -\frac{g}{l}x_0^2$$

代入得

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}(x^2 - x_0^2)}$$

答：子速度随下落长度变化的规律为 $v = \sqrt{\frac{g}{l}(x^2 - x_0^2)}$。以绳子和地球为物体系，系统所受的唯一的外力为桌面所施加的支持力，在绳子运动过程中，支持力不作功，故系统的机械能守恒。据此可直接解出速度与绳下端位置间的关系，也可根据牛顿第二定律通过积分运算直接求解。

三、思考题和习题解答

1-1　回答下列问题

(1)位移和路程有何区别？

(2)速度和速率有何区别？

(3)瞬时速度和平均速度的区别和联系是什么？

(4)物体能否有一个不变的速率而仍有一变化的速度？

(5)速度为零的时刻，加速度是否一定为零？加速度为零的时刻，速度是否一定为零？

(6)当物体具有大小、方向不变的加速度时，物体的速度方向能否有改变？

答：

(1)两者概念不同。由初始位置引向终点位置的有向线段，称为位移。路程是质点沿轨迹运动所经路径的长度。前者为矢量，后者为标量。

(2)速度是位移对时间的一阶导数，速率是路程对时间的一阶导数。前者为矢量，后者为标量。

(3)当 $\Delta t \to 0$ 时，平均速度的极限叫做质点在 t 时刻的瞬时速度。

$$\boldsymbol{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\boldsymbol{V}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

(4)可以。速度为一矢量，不论大小(速率)和方向哪一个变化，速度都不为恒量。匀速率圆周运动，速率不变，但运动方向在变，故速度在变。

(5)不一定，因为加速度是速度对时间的一阶导数，速度为零的时刻，加速度可以不为零，如自由落体运动，初速为零，加速度为重力加速度 g。

(6)可以，如斜抛运动，物体的加速度始终为 g，但物体的运动速度不同时刻不一样。

1-2　回答下列问题

(1)物体受到几个力的作用,是否一定产生加速度?

(2)物体速度很大,所受到的合外力是否也很大?

(3)物体的运动方向和合外力方向是否一定相同?

(4)物体运动的速率不变,所受合外力是否为零?

答:

(1)不一定,物体虽受几个力作用,但这几个力的合力为零,则该物体的加速度为零。

(2)不一定,物体的速度与物体所受合外力没有关系,如一个作高速匀速直线运动的物体,速度很大,但所受的合外力为零。

(3)不一定,物体的加速度方向与合外力方向一致,运动方向与合外力方向没有关系,如一物体作匀速率圆周运动,物体所受的合外力方向指向圆心,但运动方向沿圆的轨迹的切线方向。

(4)不一定,如匀速率圆周运动,速率不变,但合外力不为零。

1-3 炮弹以一定的仰角射出,它的轨迹是一条抛物线。设当它到达最高点时,不料发生爆炸,分裂成质量相等的两块碎片,其中一块在爆炸的影响下沿着原来的轨迹返回到出发点。问:

(1)另一块碎片将沿怎样的方向飞出去?能否达到预定的地点?

(2)到达地面时两者的速率是否相同?

(3)两者能否同时到达地面?

答:

(1)另一块将继续沿抛物线运动。不能达到预定的地点,因水平方向的分速度比爆炸前大,故着落点较预定的地点远。

(2)不相同。

(3)能同时到达地面。

1-4 根据动量原理可知 力在时间过程中的累积效应,引起动量的改变。根据功能原理可知:力的空间累积引起动能的改变。

(1)如果物体受合外力作用了一段时间(即受到合外力的冲量作用),动量发生了改变,那么,是否一定会引起物体动能的改变?

(2)如果物体受合外力作用,并且在力作用的方向上有了位移(即合外力对物体作了功),使物体的动能发生了变化,是否一定会引起物体动量的改变?

答:

(1)不一定,如合外力与物体的运动方向始终相互垂直,合外力的冲量不为零,但不对物体作功,所以动能保持不变,如做匀速率圆周运动的物体就是这样。

(2)一定,因物体所受合外力不为零,且力对物体作功的同时,一定就有时间的积累,则引起物体动量的改变。

1-5 一质点做半径为 R 的圆周运动,其速率 $v = b - ct$,b、c 均为正的常量,试求:

(1)任意时刻质点的加速度的大小和方向;

(2)速度为零时质点绕圆周运动了多少圈?