数学

配人教A版

必修2

主　编：泓　翰

副主编：张吉国

高中新课标

GAO ZHONG XIN KE BIAO

学案与测评

课时1+3

WUHAN UNIVERSITY PRESS

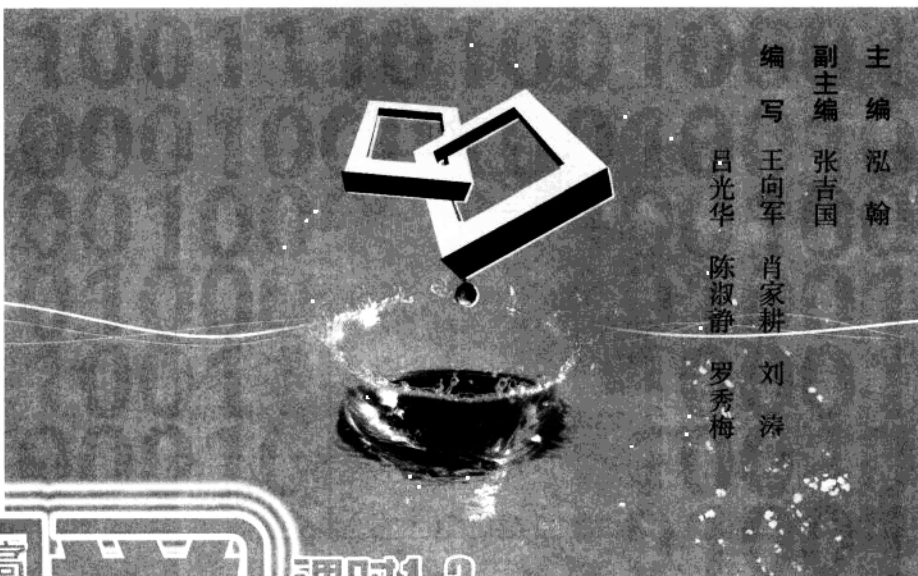
武汉大学出版社

泓翰编撰

数学

配人教A版

必修2



主　编　泓　翰

副主编　张吉国

编　写　王向军　肖家耕　刘　涛　吕光华　陈淑静　罗秀梅

高中新课标 GAO ZHONG XIN KE BIAO

课时1+3

学案与测评

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

学案与测评：人教 A 版. 数学. 2：必修/泓翰主编. —武汉：武汉大学出版社，2008.7

ISBN 978-7-307-06342-6

Ⅰ. 学… Ⅱ. 泓… Ⅲ. 数学课—高中—习题 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 105056 号

责任编辑：瞿嵘　左权

出版发行：武汉大学出版社(430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)

印刷：山东鸿杰印务集团有限公司

开本：880mm×1230mm 1/16　印张：7.5　字数：330 千字

版次：2008 年 7 月第 1 版　2008 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06342-6/G·1167　定价：19.50 元

www.honghanbook.com

Instruction [使用说明]

《学案与测评》是高中同步教学辅导用书，它以国家教育部新课程改革精神为指导，按照教育教学规律，科学地将教学与学习过程划分为课前、课中、课后三个阶段，并根据每个阶段的不同特点，确定浏览、研读、尝试、检测、评价等不同学习方式。本书循序渐进的合理设计，科学严谨的规范操作，将会确保广大学子在体味成长快乐的同时，享受成绩飞升的喜悦！

同步到课时，精确到课堂。
关怀到细节，服务到全程！

使用阶段	栏目名称		使用建议	使用效果
 课前	基础探究		课前预习	掌握本课时基础知识
 课中	互动学案	重点突破	课堂及时巩固	掌握重、难点知识
		范例点评	课堂梳理题型及方法	掌握各类题型的解题方法
		举一反三	课堂及时训练	熟练运用各类题型的解题方法
 课后	同步测评		实战练兵，自我检测	夯实基础，查缺补漏
	小结复习		自我梳理	掌握本章重、难点知识 构建完整的知识框架
	单元测试		正规测试	加强实战演练，提高应试技巧

泓翰编撰

www.honghanbook.com

高中新课标学案与测评[编委会]

xue an yu ce ping

泓翰编撰

www.honghanbook.com

Contents【目录】

高中新课标学案与测评

第一章　空间几何体

第二章　点、直线、平面之间的位置关系

第三章　直线与方程

泓翰编撰

第四章　圆与方程

第一章

空间几何体

第1课时　空间几何体的结构

基础探究

1. 棱柱的定义：

有两个面________，其余各面都是________，并且每相邻两个四边形的公共边都________，由这些面所围成的多面体叫棱柱．棱柱中，________________的面叫棱柱的底面，简称底；其余各面叫棱柱的侧面；________________叫棱柱的侧棱；________________叫棱柱的顶点．

2. 棱锥的定义：

有一个面是________，其余各面都是________，由这些面所围成的多面体叫棱锥．棱锥也有底面、侧面、顶点、侧棱．

3. 棱台的定义：

用一个________________平面去截________，________与________之间的部分叫棱台．棱台有上、下底面，也有侧面、侧棱、顶点．

4. 圆柱、圆锥、圆台、球的定义：

分别以________、________、________、________所在的直线为旋转轴，其余各边（或半圆）旋转形成的面所围成的旋转体分别叫圆柱、圆锥、圆台和球．圆柱、圆锥、圆台有轴、底面、侧面和母线，球有球心、半径、直径．

互动学案

重点突破

1. 棱柱有两个本质特征：

（1）有两个面互相平行；

（2）其余各面每相邻两面的公共边都互相平行．

2. 棱锥有两个本质特征：

（1）有一个面是多边形；

（2）其余各面是有一个公共顶点的三角形．

3. 圆柱、圆锥、圆台可以看作是分别以矩形的一边、直角三角形的一直角边、直角梯形垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，其余各边旋转而成的曲面所围成的几何体．其轴截面分别是矩形、等腰三角形、等腰梯形，这些轴截面集中反映了旋转体的各主要元素，处理旋转体的有关问题一般要作出轴截面．

4. 棱台和圆台分别是由棱锥和圆锥分别被平行于底面的截面截去的，判断一个几何体是否是台体，可看它是否由锥体所截成．

5. 球可类比平面中圆的定义，球可看作空间中到定点的距离等于定长的点的集合．

范例点评

题型一　多面体的认识

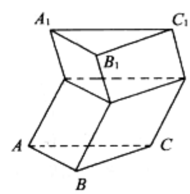
【例1】 下列命题中不正确的是　　（　　）

A. 棱柱的侧面一定是平行四边形

B. 有两个面平行，其余各面都是平行四边形的几何体叫棱柱

C. 棱锥的各侧面一定有一个公共点

D. 棱台各侧棱的延长线交于一点



分析　由棱柱的定义知，棱柱各侧面一定为平行四边形，故A正确．如图，面ABC//面$A_1B_1C_1$，但图中的几何体每相邻两个四边形的公共边并不互相平行，故不是棱柱，故B不正确．棱锥是有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，即必须有一个公共顶点的几何体，故C正确．棱台是用一个平行于底面的平面去截棱锥而得到的，其各侧棱的延长线必交于一点，故D是正确的．

答案　B

举一反三

1. 下列命题中：

① 用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面和截面之间的部分叫棱台；

② 棱台的各侧棱延长后一定相交于一点；

③ 棱锥中只有两个面平行；

④ 棱锥的各个面都是三角形．

正确命题的序号是________________．

题型二　旋转体的认识

【例2】 下列命题中的真命题是　　（　　）

A. 以直角三角形的一直角边为轴旋转所得的旋转体是圆锥

B. 以直角梯形的一腰为轴旋转所得的旋转体是圆台

C. 圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆

D. 圆锥的侧面展开图为扇形，这个扇形所在圆的半径等于圆锥底面圆的半径

分析　以直角梯形垂直于底的腰为轴旋转所得的旋转体是圆台，所以B不对；圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆面而不是圆，所以C不对；圆锥的侧面展开图为扇形，这个扇形所在圆的半径等于圆锥的母线长，所以D不对.

答案　A

举一反三

2. 下列命题中　　　　（　　）

①以矩形的一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的曲面所围成的几何体是圆柱；

②以直角三角形的一条边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的曲面围成的几何体叫圆锥；

③以等腰三角形的底边上的高所在直线为旋转轴，其余各边旋转形成的曲面围成的几何体叫圆锥；

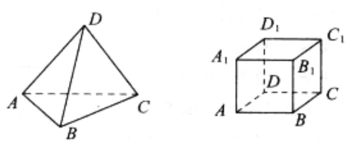
④圆台可看作直角梯形以其垂直于底边的腰所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的曲面围成的几何体；

⑤半圆绕其直径所在直线旋转一周形成球.

正确命题序号是________.

题型三　画几何体的平面展开图

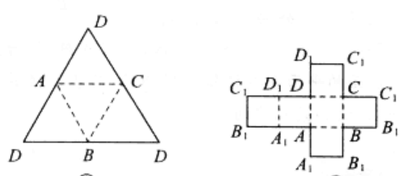
【例3】　请画出下面正四面体和正方体的展开图.



①　　②

分析　将立体图形沿着某些棱剪开，然后铺在平面上.

解　展开图如下图所示：

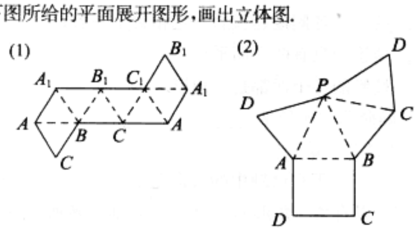


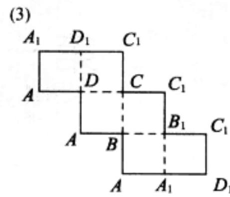
①　　②

点评　立体图形的展开或平面图形的折叠是我们培养空间立体感的较好方法，希望同学们注意这方面的练习.

举一反三

3. 根据下图所给的平面展开图形，画出立体图.



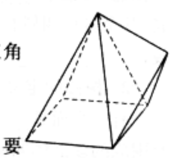


误区警示

牢记各几何体的概念和结构特征，判断时要紧扣定义.

【案例分析】　判断正误：

有一个面是多边形，其余各面都是三角形的几何体是棱锥.



错解　正确.

正解　如图所示的几何体符合题目要求，但不是棱锥，所以错误.

同步测评

基础巩固

1. 一个三棱锥，如果它的底面是直角三角形，那么它的三个侧面　　　　（　　）

A. 至多只能有一个是直角三角形

B. 至多只能有两个是直角三角形

C. 可能都是直角三角形

D. 必然都是非直角三角形

2. 下列说法正确的是　　　　（　　）

A. 以矩形的一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的曲面所围成的几何体是圆柱

B. 圆柱的母线长与底面圆的周长相等

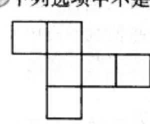
C. 圆柱侧面展开图不一定是矩形

D. 矩形的一边为旋转轴，其余的边都是圆柱的母线

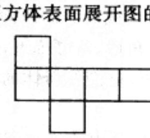
3. 球面被经过球心的平面截得的圆称为球的大圆，那么这样的大圆有　　　　（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 无数个

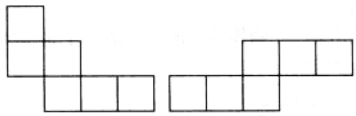
4. 下列选项中不是正方体表面展开图的是　　　　（　　）



A.

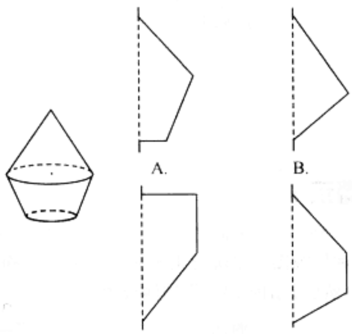


B.



C.　　　　　　　　D.

⑤下图是由选项中的哪个图形旋转得到的　　（　　）



A.　B.　C.　D.

⑥ 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点. 那么，正方体中过 P、Q、R 的截面图形是　　（　　）

A. 三角形　　B. 四边形

C. 五边形　　D. 六边形

⑦关于棱锥、棱台的下列叙述：

① 四棱锥的四个侧面都可以是直角三角形；

② 侧面都是全等的等腰三角形的棱锥是正棱锥；

③ 三棱锥的四个面可能都是直角三角形；

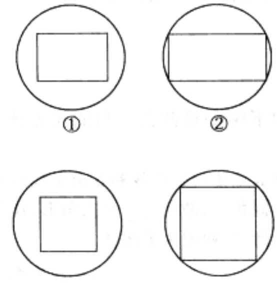
④ 有两个面互相平行，其余各面都是梯形的多面体是棱台；

⑤ 上、下底面都是正方形的棱台是正棱台.

其中正确的结论是________(填序号).

能力提高

⑧一个正方体内接于一个球，过球心作一截面，则截面的可能图形为下图中的　　（　　）

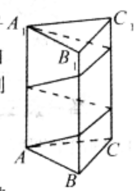


①　②　③　④

A. ①②　　B. ②④

C. ①②③　　D. ②③④

⑨(2006·江西)如图，已知正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为1，高为8，一质点自 A 点出发，沿着三棱柱的侧面绕行两周到达 A_1 点的最短路线的长为________.



拓展延伸

⑩ 以一个直角三角形的一边为旋转轴，旋转这个三角形能得到怎样的几何体？若为简单几何体，请说明其构成.

第 2 课时　空间几何体的三视图

基础探究

1. 投影及中心投影、平行投影的定义：

由于光的照射，在不透明物体后面的屏幕上可以留下这个物体的影子，这种现象叫投影. 其中把________叫投影线. 把留下物体影子的________叫投影面. 把光________形成的投影叫中心投影；把________形成的投影叫平行投影；在平行投影中，________形成的投影叫正投影，否则叫斜投影.

2. 三视图的定义：

几何体的三视图指的是正视图、侧视图和俯视图. 正视图是指光线从几何体的________得到的投影图；侧视图是指光线从几何体的________得到的投影图；俯视图是指光线从几何体的________得到的投影图.

互动学案

重点突破

三视图的正视图、侧视图、俯视图分别是从几何体的正前方、正左方、正上方观察几何体画出的轮廓线. 画几何体的三视图的要求是正视图、俯视图"长对正"；正视图、侧视图"高平齐"；俯视图、侧视图"宽相等"，前后对应.

由三视图想象几何体时也要根据"长对正，宽相等，高平

齐”的基本特征.想象视图中每部分对应的实物部分的形象时,特别要注意几何体中与投影面垂直或平行的线及面的位置.

对于简单几何体的组合体,首先要分清它是由哪些简单几何体组成的,然后再画出它的三视图.

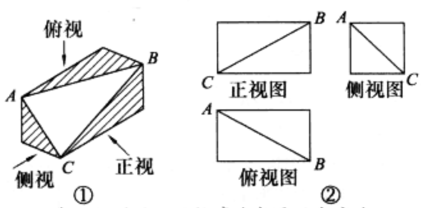
范例点评

题型一 画几何体的三视图

【例1】 如下图①是截去一角的长方体,画出它的三视图.

分析 根据长方体的轮廓线和各面交线画出三视图.

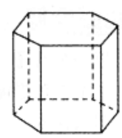
解 长方体截角后,截面是一个三角形,在每个视图中反映为不同的三角形.三视图为下图②.



点评 在画视图时可见轮廓线都要画成实线.

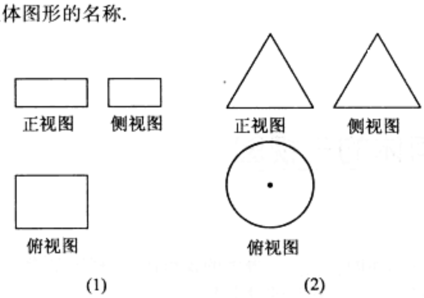
举一反三

1. 画出如图所示几何体的三视图.



题型二 由三视图判断几何体的形状

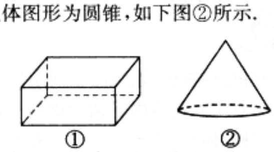
【例2】 下图所示的是一些立体图形的三视图,请说出这些立体图形的名称.



分析 由三视图的特征,结合柱、台、球的三视图逆推.

解 (1) 该立体图形为长方体,如下图①所示.

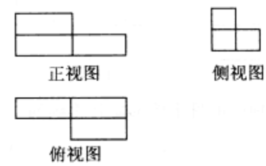
(2) 该立体图形为圆锥,如下图②所示.



点评 想象力的培养与多观察实物相结合是解决此类题目的关键.

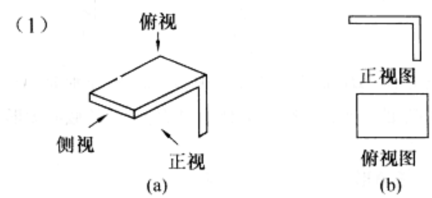
举一反三

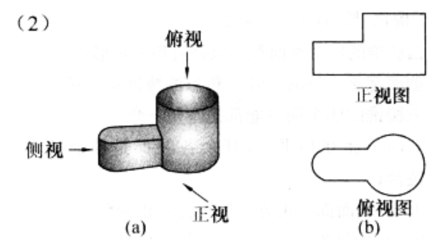
2. 根据下图所给出的一个物体的三视图,试画出它的形状.



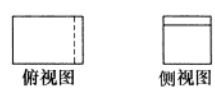
误区警示

【案例分析】 在下面各图中,图(b)是图(a)中实物画出的正视图和俯视图.你认为正确吗?如果不正确,请找出错误并改正,然后分别画出它们的侧视图.

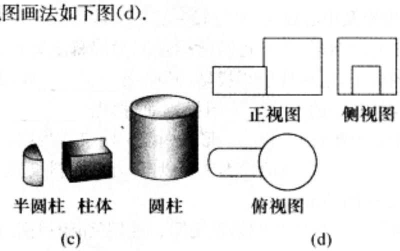




解 (1)(a)是由两个长方体组合而成的,正视图正确,俯视图错误,俯视图应该画出不可见轮廓线(用虚线表示),侧视图轮廓是一个矩形,有一条可视的交线(用实线表示),正确画法如上右图.



(2)图(a)的组合体可以看作是下图(c)中几何体的组合,正视图与俯视图中都应画出中间的柱体与圆柱体相交接的部位,正确的三视图画法如下图(d).



同步测评

基础巩固

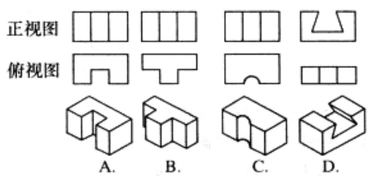
①一个圆柱三视图中一定没有的图形为（　　）

A. 正方形　　B. 长方形
C. 三角形　　D. 圆

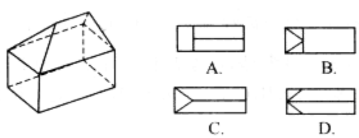
②球的三种视图中都是圆，其大小（　　）

A. 相同
B. 不同
C. 可能相同也可能不同
D. 以上都不对

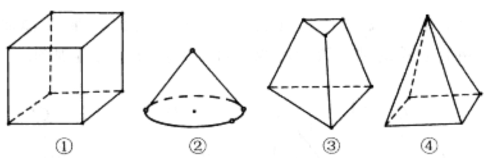
③如下图，下列物体的正视图和俯视图中有错误的一项是（　　）



④如下左图所示的是一个几何体，在选项中是该几何体俯视图的是（　　）

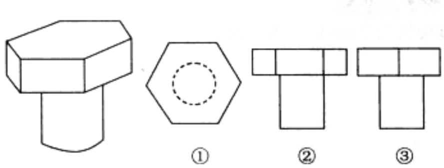


⑤下列几何体各自的三视图中，有且仅有两个视图相同的是（　　）

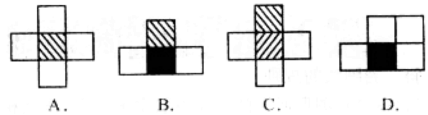


A. ①，②　　B. ①，③
C. ①，④　　D. ②，④

⑥在下图给出的几何体及三视图中，按正视图、侧视图、俯视图顺序为________.



⑦如果用□表示1个立方体，用▨表示两个立方体叠加，用■表示三个立方体叠加，那么图中有7个立方体叠成的几何体，从正前方观察，可画出的平面图形是（　　）



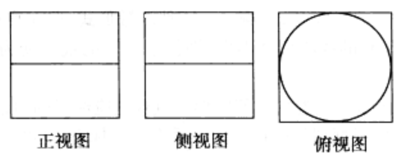
⑧给出下列命题：

① 如果一个几何体的三视图是完全相同的，则这个几何体是正方体；
② 如果一个几何体的正视图和俯视图都是矩形，则这个几何体是长方体；
③ 如果一个几何体的三视图都是矩形，则这个几何体是长方体；
④ 如果一个几何体的正视图和俯视图都是等腰梯形，则这个几何体是圆台.

其中正确命题的个数是（　　）

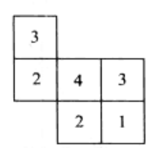
A. 0个　　B. 1个
C. 2个　　D. 3个

⑨将给出的三视图还原成实物图.



拓展延伸

⑩如图是由几个小立方块所搭几何体的俯视图，小正方形中的数字表示在该位置上的小立方块的个数，请画出这个几何体的正视图、俯视图.



第3课时　空间几何体的直观图

基础探究

斜二测画法的规则：

(1)在已知图形所在的空间中取水平平面，作互相垂直的轴 Ox、Oy，再作 Oz 轴，使 $\angle xOz=90°$，且 $\angle yOz=90°$. 画直观图时，把 Ox、Oy、Oz 画成对应轴 $O'x'$、$O'y'$、$O'z'$，使 $\angle x'O'y'$ = ________°(或________°)，$\angle x'O'z'$ = ________°. $x'O'y'$ 所确定平面表示水平平面.

(2)已知图形中，平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于________、________或________的线段.

(3)已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中________，平行于 y 轴的线段，长度________.

互动学案

重点突破

1. 用斜二测画法画空间图形的直观图时，要紧紧地把握住一斜——在已知图形中垂直于 x 轴的线段，在直观图中与 x 轴成45°或135°角；二测——两种度量形式，即在直观图中，平行于 x 轴的线段长度不变，平行于 y 轴的线段变为原长度的一半.

2. 画水平放置的几何图形的直观图应注意的问题：

(1)要根据图形的特点选取适当的坐标系，这样可以简化作图步骤.

(2)平行于 y 轴的线段画直观图时，一定要画成原来长度的一半.

(3)对于图形中与坐标轴都不平行的线段可通过确定端点的办法来解决，即过端点作坐标轴的平行线段.

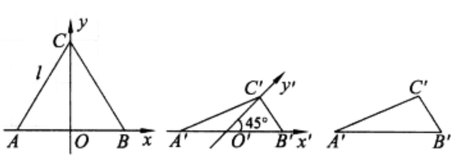
范例点评

题型一　画平面图形的直观图

【例1】 画水平放置的正三角形的直观图.

分析　正确选取 AB 所在的直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，关键是利用斜二测画法的规则来画.

解　画法如下图，按如下步骤完成：



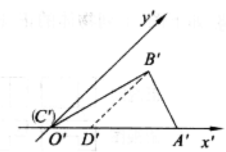
(1) 在已知的正三角形 ABC 中，取 AB 所在的直线为 x 轴，取对称轴 CO 为 y 轴. 画对应的 x'轴、y'轴，使 $\angle x'Oy'=45°$.

(2) 在 x'轴上取 $O'A'=OA$，$O'B'=OB$，在 y'轴上取 $O'C'=\frac{1}{2}OC$.

(3) 连结 $A'C'$、$B'C'$，所得三角形 $A'B'C'$ 就是正三角形 ABC 的直观图.

举一反三

1. 如下图，$\triangle A'B'C'$ 是水平放置的平面图形的斜二测直观图，将其恢复成原图形.



题型二　画立体图形的直观图

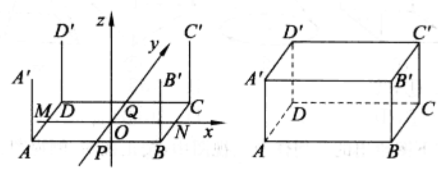
【例2】 用斜二测画法画长、宽、高分别为4 cm、3 cm、2 cm的长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的直观图.

解　(1)画轴. 如下图，画 x 轴、y 轴、z 轴，三轴相交于点 O，使 $\angle xOy=45°$，$\angle xOz=90°$.

(2)画底面. 以点 O 为中点，在 x 轴上取线段 MN，使 $MN=4$ cm；在 y 轴上取线段 PQ，使 $PQ=\frac{3}{2}$ cm. 分别过点 M 和 N 作 y 轴的平行线，过点 P 和 Q 作 x 轴的平行线，设它们的交点分别为 A、B、C、D，四边形 $ABCD$ 就是长方体的底面 $ABCD$.

(3)画侧棱. 过 A、B、C、D 各点分别作 z 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取 2 cm 长的线段 AA'，BB'，CC'，DD'.

(4)成图. 顺次连结 A'、B'、C'、D'，并加以整理(去掉辅助线，将它遮挡的部分改为虚线)，就得到长方体的直观图.

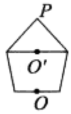


举一反三

2. 画棱长为2 cm的正方体的直观图.

题型三 斜二测画法与三视图的综合问题

【例 3】 如下图,已知几何体的三视图,用斜二测画法画出它的直观图.


正视图


侧视图


俯视图

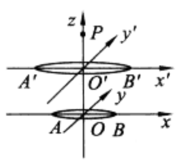
分析 由几何体的三视图知道,这个几何体是一个简单组合体,它的下部是一个圆台,上部是一个圆锥,并且圆锥的底面与圆台的上底面重合.我们可以先画出下部的圆台,再画出上部的圆锥.

解 (1)画轴. 如下图①,画 x 轴、y 轴、z 轴,使$\angle xOy=45°$,$\angle xOz=90°$.

(2)画圆台的两底面. 利用斜二测画法,画出底面$\odot O$,在 z 轴上截取OO',使OO'等于三视图中相应高度,过O'作Ox的平行线$O'x'$,Oy的平行线$O'y'$,利用$O'x$与$O'y$画出上底面$\odot O'$(与画$\odot O$一样).

(3)画圆锥的顶点. 在Oz上截取点P,使PO'等于三视图中相应的高度.

(4)成图. 连结PA'、PB'、$A'A$、$B'B$,整理得到三视图表示的几何体的直观图,如下图②.


①

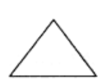

②

举一反三

3. 已知几何体的三视图如下 ,用斜二测画法,画出它的直观图.


正视图

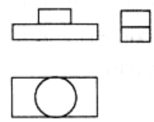

侧视图

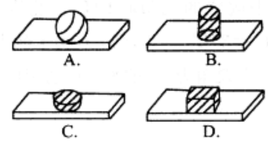

俯视图

误区警示

本节常见的思维误区是:空间想象力差,思维不够全面,画出的直观图无立体感.

【案例分析】 如图,甲为直观图的三视图,它对应的直观图是图乙中的 ( )


甲


乙

错解一 A.

错解二 B.

分析 在错解一中,只片面根据俯视图中的图形,就想到了球,思维不够全面.在错解二中,考虑到了三视图所确定的几何体的大体轮廓,但忽略了侧视图中所暗示的上下两个几何体宽度应相等的隐含条件.

正解 C.

点评 在根据物体的三视图确定其直观图时,既要学会从三视图中几何体的轮廓线推测其几何体的大体形状,又要注意线的上下、左右对齐等细节问题,才能避免错误.

同步测评

基础巩固

1. 一个正方形利用平行投影后得到的图形是 ( )

A. 正方形　　B. 正方形或矩形

C. 正方形或矩形或线段　　D. 以上都不对

2. 利用斜二侧画法得到:

① 三角形的直观图是三角形;

② 平行四边形的直观图是平行四边形;

③ 正方形的直观图是正方形;

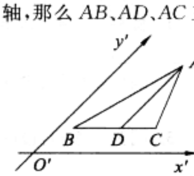
④ 菱形的直观图是菱形.

以上结论正确的是 ( )

A. ①②　　B. ①

C. ③④　　D. ①②③④

3. 如图所示的水平放置的三角形的直观图,D是$\triangle ABC$中BC边的中点,$AD/\!/y'$轴,$BC/\!/x'$轴,那么AB、AD、AC三条线段中 ( )



A. $AB>AD>AC$

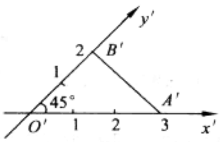
B. $AC>AD>AB$

C. $AB=AC>AD$

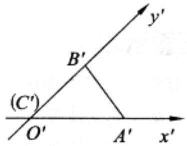
D. $AB>AC>AD$

4. 如图所示的直观图,其平面图形的面积为 ( )

A. 3　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. 6　　D. $3\sqrt{2}$



（第 4 题图）

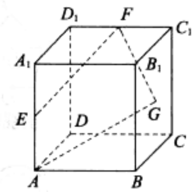


（第 5 题图）

5 水平放置的△ABC的斜二测直观图如上图所示，已知$A'C'=3$，$B'C'=2$，则AB边上的中线的实际长度为____.

6 画一个锐角为45°的平行四边形的直观图.

9 如图，正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，E、F分别是AA_1、D_1C_1的中点，G是正方形BCC_1B_1的中心，画出空间四边形$AEFG$在该正方体的面CDD_1C_1上投影的图形.



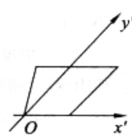
能力提高

7 已知△ABC的平面直观图△$A'B'C'$是边长为a的正三角形，那么△ABC的面积为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$　　D. $\sqrt{6}a^2$

8 右图所示为一平面图形的直观图，则此平面图形可能是下列选项中的（　　）

A.　B.　C.　D.



拓展延伸

10 圆柱、圆锥和圆台的底面都是圆. 用斜二测画法画底面半径为1 cm，高为3 cm的圆锥的直观图.

第4课时　柱体、锥体、台体的表面积与体积

基础探究

1. 棱柱、棱锥、棱台的表面积就是侧面与底面面积的________.

2. 圆柱表面积：设底面半径为r，母线长为l，则$S=$________.

3. 圆锥表面积：设底面半径为r，母线长为l，则$S=$________.

4. 圆台表面积：设上、下底面半径分别为r'，r，母线长为l，则$S=$________.

5. 柱体体积：设底面面积为S，高为h，则$V=$________.

6. 锥体体积：设底面面积为S，高为h，则$V=$________.

7. 台体体积：设上、下两底面积分别为S'、S，高为h，则$V=$________.

互动学案

重点突破

1. 求棱柱、棱锥、棱台的表面积即是求各个面的面积的和.

2. 圆柱、圆锥、圆台的侧面积分别是它们侧面展开图的面积. 因此，弄清侧面展开图的形状及侧面展开图中各线段与原旋转体的关系是掌握它们的侧面积公式及解有关问题的关键.

3. 计算柱体、锥体和台体体积的关键是根据条件找出相应的底面面积和高，要充分运用多面体的有关截面或旋转体的轴截面将空间问题转化为平面问题.

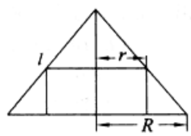
范例点评

题型一　旋转体的表面积与体积

【例 1】 圆锥的高和底面半径相等，它的一个内接圆柱的高和圆柱底面半径也相等. 求圆柱表面积与圆锥表面积之比.

分析　这是一个圆锥和圆柱组合体，画出其轴截面，利用相似三角形求各元素之间的关系，再由公式可得.

解　如下图，设圆柱和圆锥的底面半径分别是 r、R，则有 $\frac{r}{R}=\frac{R-r}{R}$，即 $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$，



$\therefore R=2r, l=\sqrt{2}R$，

$\therefore \frac{S_{圆柱表}}{S_{圆锥表}}=\frac{2\pi r^2+2\pi r^2}{\pi R\cdot\sqrt{2}R+\pi R^2}$

$=\frac{4\pi r^2}{(\sqrt{2}+1)\pi R^2}=\frac{4r^2}{(\sqrt{2}+1)4r^2}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$

举一反三

1. 已知一个圆台轴截面的面积是 F，母线与底面的夹角是 $30°$，求圆台的侧面积.

题型二　多面体的表面积与体积

【例 2】 已知一个铜质的五棱柱的底面积为 $16\ cm^2$，高为 4 cm，将它熔化后铸成一个正方体的铜块，求铸成的铜块的棱长.（不计损耗）

分析　五棱柱的体积与正方体的体积相等.

解　∵五棱柱的体积与正方体的体积相等，

$\therefore V_{五棱柱}=Sh=16\times4=64(cm^3)$.

设正方体的棱长为 a，$V_{正方体}=a^3$，则 $a^3=64$，$\therefore a=4(cm)$.

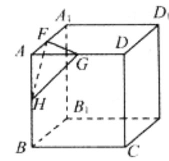
答：故铸成的铜块的棱长为 4 cm.

点评　将一个几何体铸成另一个几何体，它们的体积相等，由体积不变来解决问题.

举一反三

2. 已知四棱锥底面正方形的边长为 4 cm，高与斜高的夹角为 $30°$，求四棱锥的侧面积和表面积.

3. 如图，是一个正方体，H、G、F 分别是棱 AB、AD、AA_1 的中点. 现在沿△GHF 所在平面锯掉正方体的一个角，问锯掉的这块的体积是原正方体体积的几分之几？

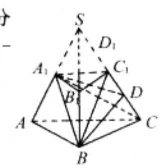


误区警示

【案例分析】 三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1:AB=1:2$，D 是 C_1C 的中点，求截面 A_1BD 把棱台分成上、下两部分的体积比.

易错分析　不能完全掌握棱台的结构特征，如"上、下底面是相似的多边形"这一隐含条件不知. 对几何体体积的求法不灵活，割补法是很重要的求体积的方法.

正解　如图，连结 A_1C、BC_1，此棱台分成四个三棱锥 $A_1-BB_1C_1$、A_1-BC_1D、A_1-BCD、A_1-ABC.



∵D 为 CC_1 中点，$\therefore S_{\triangle BDC_1}=S_{\triangle BDC}$，

$\therefore V_{A_1-BDC_1}=V_{A_1-BDC}$，

而 $\frac{V_{A_1-BB_1C_1}}{V_{A_1-BCC_1}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BB_1C_1}\cdot h'}{\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCC_1}\cdot h'}=\frac{S_{\triangle BB_1C_1}}{S_{\triangle BCC_1}}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore V_{A_1-BB_1C_1}=V_{A_1-BDC_1}=V_{A_1-BDC}$.

又 $\frac{V_{A_1-BB_1C_1}}{V_{A_1-ABC}}=\frac{V_{B-A_1B_1C_1}}{V_{A_1-ABC}}=\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{A_1B_1^2}{AB^2}=\frac{1}{4}$.

设 $V_{A_1-BB_1C_1}=V$，则截面上方几何体体积为 $V_上=V_{A_1-BB_1C_1}+V_{A_1-BDC_1}=2V$，

截面下方几何体体积为 $V_下=V_{A_1-BDC}+V_{A_1-ABC}=V+4V=5V$，

∴截面 A_1BD 把棱台分成上、下两部分的体积比为 $2:5$.

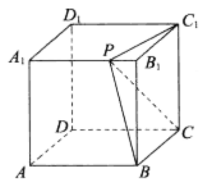
同步测评

基础巩固

① 长方体中过一个顶点的三条棱长之比是 $1:2:3$，对角线的长是 $2\sqrt{14}$，则这个长方体的体积是（　　）

A. 6　　B. 12　　C. 24　　D. 48

2. 如图，在棱长为 4 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是 A_1B_1 上一点，且 $PB_1=\frac{1}{4}A_1B_1$，则多面体 P-BCC_1B_1 的体积为 （　　）



A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{16}{3}$

C. 4

D. 16

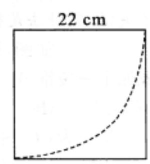
3. 若圆锥的侧面展开图是圆心角为 $120°$、半径为 l 的扇形，则这个圆锥的表面积与侧面积的比是 （　　）

A. 3∶2　　B. 2∶1
C. 4∶3　　D. 5∶3

4. 若圆台的高是 3，一个底面半径是另一个底面半径的 2 倍，母线与下底面所成的角是 $45°$，则这个圆台的侧面积是 （　　）

A. 27π　　B. $27\sqrt{2}\pi$
C. $9\sqrt{2}\pi$　　D. $36\sqrt{2}\pi$

5. 如图，一块正方形薄铁片的边长为 22 cm，以它的一个顶点为圆心，一边长为半径画弧，沿弧剪下一个扇形，用这块扇形铁板围成一个圆锥筒，它的侧面积、体积分别为 （　　）



A. $12\pi\ \text{cm}^2$，$\frac{1}{24}\pi\ \text{cm}^3$

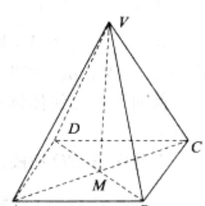
B. $121\pi\ \text{cm}^2$，$\frac{1}{24}\sqrt{363}\pi\ \text{cm}^3$

C. $12\pi\ \text{cm}^2$，$\frac{121}{24}\pi\ \text{cm}^3$

D. $121\pi\ \text{cm}^2$，$\frac{1\,331\pi}{24}\sqrt{15}\ \text{cm}^3$

6. (2006・上海春)正四棱锥底面边长为 4，侧棱长为 3，则其体积为________.

7. 如图，棱锥的底 $ABCD$ 是一个矩形，AC 与 BD 交于 M，VM 是棱锥的高，侧棱都相等，且 $VM\perp AC$，$VM\perp BD$，若 $VM=4$ cm，$AB=4$ cm，$VC=5$ cm，求棱锥的全面积及体积.



能力提高

8. 棱长为 a 的正方体中，连结相邻面的中心，以这些线段为棱构成的八面体的体积为 （　　）

A. $\frac{a^3}{3}$　　B. $\frac{a^3}{4}$　　C. $\frac{a^3}{6}$　　D. $\frac{a^3}{12}$

9. 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积是 V，P、Q 分别是侧棱 AA_1、CC_1 上的点，且 $PA=QC_1$，则四棱锥 $B-APQC$ 的体积是 （　　）

A. $\frac{1}{6}V$　　B. $\frac{1}{4}V$　　C. $\frac{1}{3}V$　　D. $\frac{1}{2}V$

拓展延伸

10. 如图，正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 a，连结 $A'C'$，$A'D$，$A'B$，BD，BC'，$C'D$，得到一个三棱锥. 求：

(1)三棱锥 $A'-BC'D$ 的表面积与正方体表面积的比值；

(2)三棱锥 $A'-BC'D$ 的体积.