“希望杯”数学竞赛系列丛书 主编 周国镇

希望杯

数学能力培训教程

初一

程新林
杨翠芝
等 编著

第2版

掌握美的数学

学会创新思考

登上更高境界

数学能力测评的高水准资料

为千千万万的青少年播种希望

气象出版社
China Meteorological Press

责任编辑：胡育峰

封面设计：博雅思企划

- 圆形，表示广阔的天空。
- 英文hope(希望)形如一只展翅飞翔的鸟。喻义："希望杯"全国数学邀请赛为广大的青少年在科学思维能力上的健康发展开辟了一个广阔的空间，任他们自由翱翔。
- "since 1990"字样表示："希望杯"全国数学邀请赛是从1990年开始创办的。

希望杯

XIWANGBEI 数学能力培训教程·初一（第2版）

SHUXUE NENGLI PEIXUN JIAOCHENG·CHUYI （DI-ER BAN）

ISBN 978-7-5029-4556-5

9 787502 945565 >

定价：15.00元

“希望杯”数学竞赛系列丛书　主编　周国镇

“希望杯”数学能力

培训教程

初　一

（第2版）

程新林　杨翠芝等◎编著

气象出版社
China Meteorological Press

图书在版编目(CIP)数据

“希望杯”数学能力培训教程．初一/程新林，杨翠芝等编著．2版.—北京：气象出版社，2008.10

(“希望杯”数学竞赛系列丛书/周国镇主编)

ISBN 978-7-5029-4556-5

Ⅰ.希… Ⅱ.程… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 116461 号

“Xiwangbei” Shuxue Nengli Peixun Jiaocheng，Chuyi(Di-er Ban)

“希望杯”数学能力培训教程　初一(第2版)

程新林，杨翠芝等　编著

出版发行：气象出版社

地　　址：北京市海淀区中关村南大街46号　　邮政编码：100081

电　　话：总编室：010-68407112；发行部：010-68409199

网　　址：http://cmp.cma.gov.cn　　E-mail：qxcbs@263.net

责任编辑：胡育峰　　终　　审：章澄昌

封面设计：博雅思企划　　版式设计：吴庭芳

责任校对：赵　寒

印　　刷：北京京科印刷有限公司

开　　本：850 mm×1168 mm　1/32　　印　　张：9.375

字　　数：235千字

版　　次：2008年10月第2版　　印　　次：2008年10月第9次印刷

印　　数：1～40000　　定　　价：15.00元

前　　言

这套教程充分注意了新颁布的中小学数学教学大纲，力求充分体现“希望杯”的特色，为广大师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法，以“鼓励学好课本知识，适当拓宽知识面，激发学习数学的兴趣和热情，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。

本教程中所有原始的素材都来源于历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题，这些题目中绝大多数是由“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的专家们命定的，其余则是由全国各地数学命题的研究人员编拟。这些题目，不但贴近现行的中小学数学课本，而且很有启发性、思考性和趣味性，寓科学于趣味之中，寓知识、能力的考查于数学的美育之中。学习和研究这些题目不仅能使学习者对数学课本的理解、掌握和应用能力达到高水平，并且能实实在在地提高科学思维素质，而这种素质对于有效地学习任何知识都是必需的。正因为如此，历届“希望杯”全国数学邀请赛的试题和培训题被多方人士看好：中考、高考命题人员经常从中吸取营养；有远见的数学教师大量地从中选取资料，来充实和丰富教学内容；众多的数学教学和培训机构则用来作为教材的主要内容之一。最有说服力的是千千万万的中小学生，正是通过对“希望杯”试题的学习、研究，提高了水平，大大加强了学数学的兴趣和信心，他们的数学素养明显地不同于没有接触过“希望杯”的学生们。值得一提的是，北大、清华等著名高校以及远赴国外大学的众多学子

中有不少人，在中学时代，都曾有参加过“希望杯”全国数学邀请赛并且获奖的经历。

“希望杯”全国数学邀请赛从1990年开始举办，至今已举办19届。19年来，参赛的初一、初二、高一、高二这四个年级，每个年级的试题、培训题累计近3000个，四个年级的题目则累计近1.2万个，几乎覆盖了中学数学的全部以及中学数学课本以外的很多内容，不仅如此，而且蕴涵了丰富的数学思想和方法。若要将这些题目全部做一遍，对于一位数学教师来说，确也值得和可能，但是对于一位中学生，则难度就很大了。因此如何从中提取最精彩最重要的部分，按数学的系统整理出来，就非常必要。本教程正是做了这样一件事：它从每个年级的近3000多个题目中各精选了四分之一左右，分为若干个专题，对每个专题，给出了相关的必备知识，再详细分析若干个题目，然后安排做少量的题，通过这样一个过程，一个专题就拿下来了。一个个专题，陆续学下来，中学数学的最主要的内容、思想和方法也就能熟悉和掌握，数学功底必然大大地得到加强。

考虑到大部分中小学生只是希望能很好地掌握学校里数学课本上的内容，另一方面又有不少中小学生并不满足于此，他们对课本以外的数学也有强烈的求知欲，所以我们的教程分课本以内的和课本以外的两部分。前者占教程的大部分，后者只占小部分。

《“希望杯”数学能力培训教程》由气象出版社于2005年12月开始出版，此后多次重印，现在为改编后的第2版，包括初一、初二、高一、高二、小学四、五、六年级，共七册。该教程在内容上贴近新的中小学数学教学大纲，更突出对科学思维能力的培养，而且在行文上力求简明易懂。

随着“希望杯”试题的不断更新和学校数学教学的需要，本教程将逐年修订，不断优化，力求将教、学和应试三者融为一体。衷心希望本套教程能引导更多的中小学生走向热爱数学、掌握数学

的成功道路。

教程的作者主要是“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会的成员，有的作者是多年带领学生参加“希望杯”全国数学邀请赛，并对“希望杯”试题深有研究的数学教师。

真诚的欢迎读者指出书中不妥之处。

周国镇

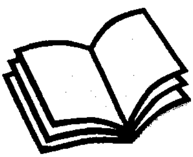
2008 年 9 月 1 日

注：**周国镇**　数学教育专家，《数理天地》杂志社社长兼总编；中国优选法统筹法与经济数学研究会常务理事，数学教育委员会主任；“希望杯”全国数学邀请赛组委会秘书长，命题委员会主任。

目　　录

第一部分

基础篇



第1讲　有理数

一、知识提要

1. 整数和分数统称为有理数.

2. 有理数还可以这样定义：

形如$\dfrac{p}{m}$(其中 m,p 均为整数，且 $m \neq 0$) 的数是有理数.

这种表达形式常被用来证明或判断某个数是不是有理数.

3. 有理数的数系表：

$$
\text{有理数}\begin{cases}
\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\
\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\begin{cases}\text{正有限小数}\\ \text{正无限循环小数}\end{cases}\\ \text{负分数}\begin{cases}\text{负有限小数}\\ \text{负无限循环小数}\end{cases}\end{cases}
\end{cases}
$$

或　有理数 $\begin{cases} \text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases} \\ \text{零} \\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases} \end{cases}$

4. 有理数可以用数轴上的点表示.

5. 零是正数和负数的分界点;零不是正数也不是负数.

6. 如果两个数的和为0,则称这两个数互为相反数.如果两个数的积为1,则称这两个数互为倒数.

7. 有理数的运算法则:

(1) 加法:两数相加,同号的取原来的符号,并把绝对值相加;异号的取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值,绝对值相等时,和为0;一个数与0相加,仍得这个数.

(2) 减法:减去一个数等于加上这个数的相反数.

(3) 乘法:两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘;一个数与0相乘,积为0.

乘方:求n个相同因数a的积的运算称为乘方,记为a^n.

(4) 除法:除以一个数等于乘以这个数的倒数.

8. 有理数的运算律:

加法交换律:$a+b=b+a$;

加法结合律:$(a+b)+c=a+(b+c)$;

乘法交换律:$a\times b=b\times a$;

乘法结合律:$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$;

乘法分配律:$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$.

二、例题

例1　在$(-1)^{2007}$,$|-1|^3$,$-(-1)^{18}$,18这四个有理数中,负

数共有 ( )

(A)1 个. (B)2 个. (C)3 个. (D)4 个.

第 18 届(2007 年)初一第 1 试

分析 通过简单运算即可确定答案.

解 $(-1)^{2007}=-1<0$，$|-1|^3=+1>0$，$-(-1)^{18}=-1<0$，$18>0$，

所以 共有两个负数，故选(B).

例 2 有如下四个命题：

① 有理数的相反数是正数；

② 两个同类项的数字系数是相同的；

③ 两个有理数的和的绝对值大于这两个有理数绝对值的和；

④ 两个负有理数的比值是正数.

其中真命题有 ( )

(A)4 个. (B)3 个. (C)2 个. (D)1 个.

第 11 届(2000 年)初一第 2 试

分析 ① 错误：只有负数的相反数才是正数；② 错误：因为同类项与数字系数无关；③ 显然不成立；④ 正确，应选(D).

例 3 有理数 a 等于它的倒数，有理数 b 等于它的相反数，则 $a^{1998}+b^{1998}$ 等于 ( )

(A)0. (B)1. (C)-1. (D)2.

第 9 届(1998 年)初一第 2 试

解 由 a 等于它的倒数，b 等于它的相反数，

得
$$a=\frac{1}{a},b=-b.$$

所以
$$a^2=1,b=0.$$

因此
$$a^{1998}+b^{1998}=(a^2)^{999}+0^{1998}=1.$$

故选(B).

例 4 $-4\times3^2-(-4\times3)^2$ 等于 ( )

(A)0.　　(B)72.　　(C) -180.　　(D)108.

第 5 届(1994 年) 初一第 1 试

分析　观察法. 由 $-4\times 3^2<0,(-4\times 3)^2>0$,

得　$-4\times 3^2-(-4\times 3)^2<0$,选(C).

例 5　用简便方法计算 $7+97+997+9997+99997=$ ________.

第 10 届(1999 年) 初一培训题

分析　观察所给数的特点发现,它们分别与整十、整百、整千、整万接近,所以将它们表示成两数差的形式,如 $7=10-3$, $97=100-3$, $997=1000-3$,… 然后再计算.

解　$7+97+997+9997+99997$

$$=(10-3)+(100-3)+(1000-3)+(10000-3)+(100000-3)$$

$$=(10+100+1000+10000+100000)-3\times 5$$

$$=111110-15=111095.$$

注:一般地,若所给数字与十、百、千 …… 比较接近时,首先将所给数字表示成十、百、千 …… 与一个较小数字的和(或差),然后再化简求值,这种方法称为凑整法.

例 6　$-117\times\left(\frac{1}{32}-0.125\right)\div(-1.2)\times\left(-1\frac{3}{13}\right)=$ ________.

第 10 届(1999 年) 初一第 1 试

分析　所给式中既有分数又有小数,通常可将小数化成分数进行计算;又因为所给式中只有乘、除(括号内除外) 两种运算,所以,要先把除法运算转化为乘法运算,这样便于约分化简.

解　$-117\times\left(\frac{1}{32}-0.125\right)\div(-1.2)\times\left(-1\frac{3}{13}\right)$

$$=-117\times\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{5}{6}\times\frac{16}{13}$$

$$=-\left(117\times\frac{1}{13}\right)\times\left(\frac{16}{32}-\frac{16}{8}\right)\times\frac{5}{6}$$

$$=-9\times\left(\frac{1}{2}-2\right)\times\frac{5}{6}$$

$$=9\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}.$$

例 7 计算：$\left(-\frac{2}{3}\times2\%\right)^4\times\left(-\frac{3}{4}\times3\%\right)^3\times\left(-\frac{4}{5}\times4\%\right)^2\times\left(-\frac{5}{6}\times5\%\right)\times10^{20}=$ ________.

第 18 届（2007 年）初一第 1 试

分析 注意到 $2\%=\frac{2}{10^2}$，$3\%=\frac{3}{10^2}$，$4\%=\frac{4}{10^2}$，$5\%=\frac{5}{10^2}$，故可将 10^{20} 分为四个因数，分配到四个括号中去.

解 原式 $=\left[\left(-\frac{2}{3}\times2\%\right)^4\times10^8\right]\times\left[\left(-\frac{3}{4}\times3\%\right)^3\times10^6\right]\times\left[\left(-\frac{4}{5}\times4\%\right)^2\times10^4\right]\times\left[\left(-\frac{5}{6}\times5\%\right)\times10^2\right]$

$$=\frac{2^8}{3^4}\times\left(-\frac{3^6}{4^3}\right)\times\frac{4^4}{5^2}\times\left(-\frac{5^2}{6}\right)$$

$$=2^7\times3\times4$$

$$=1536.$$

例 8 $2+(-3)+(-4)+5+6+(-7)+(-8)+9+10+(-11)+(-12)+13+14+15=$ ________.

第 3 届（1992 年）初一第 1 试

分析 观察所求式发现：各数的绝对值逐渐递增，数字前的正负号也有一定规律，从而想到要适当地添加括号，将所求式先分组，再化简计算.

解 原式 $=[2+(-3)]+[(-4)+5]+[6+(-7)]+[(-8)+9]+[10+(-11)]+[(-12)+13]+(14+15)$

$$=-1+1-1+1-1+1+29=29.$$

例 9 $20\div(0.30+0.31+0.32+\cdots+0.69)$ 的值的整数部分是 ( )

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

第 14 届(2003 年)初一培训题

分析 $20\div(0.30+0.31+0.32+\cdots+0.69)$ 的除数部分 $(0.30+0.31+0.32+\cdots+0.69)$ 中,0.31 与 0.69 的和为 1,0.32 与 0.68 的和为 1,…… 一共有 19 对,余下 0.3 和 0.5,所以除数为 19.8,显然,$20\div19.8$ 的值的整数部分是 1,选(A).

例 10 $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{10}\right)$ 等于 ( )

(A)5.5. (B)5.65. (C)6.05. (D)5.85.

第 5 届(1994 年)初一第 1 试

分析 所给式中每个括号内的两个分数的分母均不同,直接算比较繁,若去掉括号,重新组合(加括号),将分母相同的分数相加,运算简便.

解
$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\right)-\frac{1}{10}$$
$$=0.75+5-0.1 \quad \text{(将分数化为小数,计算简便)}$$
$$=5.65.$$

故选(B).

例 11　计算 $(-0.125)^7\times 8^8=$ ________.

第 6 届(1995 年)初一第 1 试

分析　逆用公式“$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$”进行化简. 因为 $0.125=\dfrac{1}{8}$，所以 $0.125\times 8=1$，从而 $(-0.125\times 8)^7=(-1)^7=-1$. 代入求解即可.

解　
$$\begin{aligned}(-0.125)^7\times 8^8&=(-0.125)^7\times 8^7\times 8\\&=(-0.125\times 8)^7\times 8\\&=-8.\end{aligned}$$

例 12

$\left(\dfrac{1}{1998}-1\right)\left(\dfrac{1}{1997}-1\right)\left(\dfrac{1}{1996}-1\right)\cdots\left(\dfrac{1}{1001}-1\right)\left(\dfrac{1}{1000}-1\right)=$ ________.

第 10 届(1999 年)初一第 1 试

解　$\dfrac{1}{1998}-1=-\dfrac{1997}{1998}$，$\dfrac{1}{1997}-1=-\dfrac{1996}{1997}$，$\dfrac{1}{1996}-1=-\dfrac{1995}{1996}$，……，$\dfrac{1}{1001}-1=-\dfrac{1000}{1001}$，$\dfrac{1}{1000}-1=-\dfrac{999}{1000}$.

将这 999 个式子相乘，得

$$\left(\frac{1}{1998}-1\right)\left(\frac{1}{1997}-1\right)\left(\frac{1}{1996}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{1001}-1\right)\left(\frac{1}{1000}-1\right)$$
$$=(-1)^{999}\cdot\frac{999}{1998}=-\frac{1}{2}.$$

例 13

$\dfrac{|1995-1996|+|1996-1998|+|1997-2000|+|1998-2002|}{|1-2|+|2-4|+|3-6|+|4-8|+|5-10|+|6-12|+|7-14|}$

$=$ ________.

第 8 届(1997 年)初一第 1 试

分析　根据绝对值的定义，先去掉绝对值，然后再化简.

解　根据绝对值的定义，若 $a<b$，

则 $$|a-b|=b-a.$$

故 原式 =

$$\frac{(1996-1995)+(1998-1996)+(2000-1997)+(2002-1998)}{(2-1)+(4-2)+(6-3)+(8-4)+(10-5)+(12-6)+(14-7)}$$

$$=\frac{1+2+3+4}{1+2+3+4+5+6+7}=\frac{5}{14}.$$

例 14 $(3^2-2^2)^2+(4^2-3^2)^2+(5^2-4^2)^2+(6^2-5^2)^2$ $=$ ________.

第 4 届(1993 年)初一第 1 试

分析 观察式子的特点发现:所求式中每项的结构相同,均为$[(a+1)^2-a^2]^2$.化简,得$[(a+1-a)(a+1+a)]^2=(2a+1)^2$,由此可简化计算.

解 因为$[(a+1)^2-a^2]^2=(2a+1)^2$,

故
$$\begin{aligned}原式 &= (2\times2+1)^2+(3\times2+1)^2+(4\times2+1)^2+\\&\quad(5\times2+1)^2\\&=5^2+7^2+9^2+11^2\\&=(6-1)^2+(6+1)^2+(10-1)^2+(10+1)^2\\&=2\times(6^2+1)+2\times(10^2+1)\\&=276.\end{aligned}$$

例 15 计算:$2-2^2-2^3-2^4-2^5-2^6-2^7-2^8-2^9+2^{10}$ $=$ ________.

第 10 届(1999 年)初一第 1 试

分析 可直接计算求出结果,也可通过观察式子的特点,注意到 2^{10} 前面为“+”号,提取公因式,再进行计算.

解 原式 $=2^{10}-2^9-2^8-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

$=2^9(2-1)-2^8-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

$=2^9-2^8-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

$=2^8(2-1)-2^7-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2+2$

……