高等学校工程专科成人教育教材

高等数学

（下册）

同济大学 西北工业大学等六所院校 合编

主编 张永曙 刘浩荣

高等教育出版社

高等学校工程专科成人教育教材

高等数学

下册

同济大学　西北工业大学等六所院校　合编

主编　张永曙　刘浩荣

编者　刘浩荣　袁美月
王作英　吴　群
苏金熙　徐　敏
张永曙　倚朝晖

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　下册/张永曙,刘浩荣主编;同济大学等六所院校编. - 北京:高等教育出版社,1998(2002 重印)
ISBN 7-04-006738-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.①张…②刘…③同…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 16407 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010 - 64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	国防工业出版社印刷厂

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	1998 年 11 月第 1 版
印　　张	15.875	印　　次	2002 年 8 月第 4 次印刷
字　　数	410 000	定　　价	16.80 元

内 容 提 要

本书是根据高等学校工程专科成人教育的教学要求，在基础理论教学中“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，参照普通高等院校成人教育研究会数学学科委员会 1993 年修订的“成人高等教育工科类各专业专科高等数学课程教学基本要求”编写的. 全书分上、下两册. 下册内容是“向量代数与空间解析几何”，“多元函数微积分”，“无穷级数”和“微分方程”.

本书融教材与学习指导书为一体，便于函授、自学，可作为成人高等教育工科类专科函授教材，也可作为职教、夜大、电大、业余大学专科及专科自学考试的教材或参考书.

目 录

第四篇 向量代数与空间解析几何

第五篇 多元函数微分学

第六篇 多元函数积分学

第七篇 无穷级数

第八篇 常微分方程

第四篇 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，我们曾利用平面直角坐标系，把平面上的点与一对有序数组对应起来，从而就把平面上的几何图形与代数方程对应起来，这样就使我们能够用代数方法来研究几何问题.空间解析几何也是用类似的方法来讨论空间几何图形的问题.

本篇的内容也是学习多元函数微积分学必不可少的知识，并且这些知识在物理、力学等学科中常常要用到.

第十一章 向量代数

在这一章里，我们首先建立空间直角坐标系，再介绍向量的概念及向量的一些代数运算规律.

§11.1 空间直角坐标系

为了用代数方法研究几何问题，需要在空间几何图形与数之间建立起某种联系.类似于平面解析几何，可通过建立空间直角坐标系来建立这种联系.

一、空间直角坐标系

任取空间一点 O，以点 O 为原点作三条两两互相垂直的数

轴，并且这三条数轴具有相同的长度单位. 分别把它们叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**. 它们的正向排列次序符合右手规则，即用右手握住 z 轴，拇指所指方向为 z 轴正向，其余四指所指的方向为由 x 轴正向到 y 轴正向的转动方向（图 11-1）. 这样的三条数轴就构成了一个**空间直角坐标系**. 由于这个坐标系的三条坐标轴的排列符合右手规则，因此又把它叫做**右手直角坐标系**. 点 O 叫做**坐标原点**（简称**原点**）. 通常将 x 轴和 y 轴安排在水平面位置，而 z 轴则在铅直方向上.

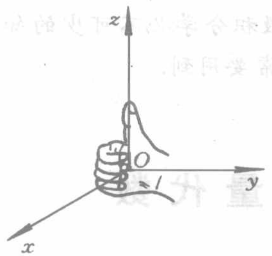

图 11-1

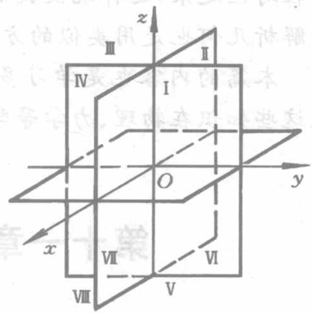

图 11-2

在空间直角坐标系中，由每两条坐标轴所决定的平面叫做**坐标面**. 由 x 轴和 y 轴所确定的平面叫做 Oxy 面，由 y 轴和 z 轴所确定的平面叫做 Oyz 面，由 z 轴和 x 轴所确定的平面叫做 Ozx 面. 这三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**. 以 x 轴正半轴、y 轴正半轴、z 轴正半轴为棱的那个卦限叫做第Ⅰ卦限，在 Oxy 面上方的其它三个卦限按逆时针方向（从 z 轴正向向下看）依次叫做第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限；在 Oxy 面下方与第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限相对的是第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限（图 11-2）.

在空间直角坐标系中，我们就可以建立空间的点与有序数组之间的对应关系. 设点 M 为空间中任意一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，且与这三个坐标轴的交点分别为

P、Q 和 R(图 11-3). 设点 P、Q 和 R 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x、y 和 z. 这样对于空间中的点 M,就有唯一确定的一组有序数 x、y 和 z 与之对应;另一方面,对于一组有序数 x、y 和 z,在 x 轴上设坐标为 x 的点是 P,在 y 轴上设坐标为 y 的点是 Q,在 z 轴上设坐标为 z 的点是 R. 分别过点 P、Q 和 R 作与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的三个平面,这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x、y 和 z 唯一确定的点.

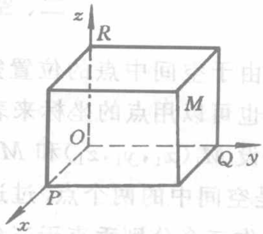

图 11-3

综上所述,我们就建立起空间中的点 M 与有序数组 x、y 和 z 之间的相互对应关系. 这种对应关系是由空间中的点与有序数组相互唯一确定的,我们把这种对应关系叫做一一对应关系,把有序数组 x、y 和 z 叫做点 M 的**坐标**,记作(x,y,z),并把 x、y 和 z 依次叫做点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**. 点 M 的坐标有时也记作 $M(x,y,z)$.

由点的坐标概念,我们可以得出原点 O 的坐标为$(0,0,0)$. 在坐标轴和坐标面上的点的坐标也各有特征. 比如,x 轴上点的坐标可写成$(x,0,0)$,y 轴和 z 轴上点的坐标可写成$(0,y,0)$和$(0,0,z)$;Oxy 面上点的坐标可写成$(x,y,0)$,Oyz 面和 Ozx 面上点的坐标可写成$(0,y,z)$和$(x,0,z)$. 另外,根据卦限的规定,在八个卦限中任一点的坐标的符号如下:

卦限 / 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

二、空间两点间的距离

由于空间中点的位置完全可由其坐标所确定，从而两点间的距离也可以用点的坐标来表示.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间中的两个点. 过这两个点各自作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这样的六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 11-4).

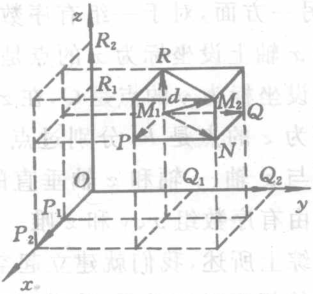

图 11-4

因为 $\triangle M_1NM_2$ 是直角三角形，根据勾股定理可推得

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

而 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形，即有

$$|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2,$$

所以

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2.\end{aligned}$$

由于

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|, |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|, |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以点 M_1 与点 M_2 间的距离

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{11.1}$$

这就是空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离公式.

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

[例 11.1] 在 x 轴上，求与点 $A(2,3,1)$ 和点 $B(1,-3,4)$ 等距离的点.

[解] 设在 x 轴上所求的点为 $M(x,0,0)$. 根据题意有

$$|MA| = |MB|.$$

由公式(11.1)得

$$\sqrt{(2-x)^2+(3-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{(1-x)^2+(-3-0)^2+(4-0)^2}.$$

两边平方后，解得 $x=-6$. 于是所求的点是 $M(-6,0,0)$.

[例 11.2] 设 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$ 和 $C(2,4,3)$，试证 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

[证] $|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$,

$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98},$$

$$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7.$$

由于 $|AB|=|AC|$，且满足勾股关系

$$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2,$$

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

习 题 11-1

1. 指出下列各点在哪个坐标轴或坐标面上？

$A(1,2,0)$； $B(0,-2,0)$； $C(0,1,7)$；

$D(0,0,1)$； $E(3,0,0)$； $F(2,0,1)$.

2. 求点 $M(2,-3,1)$ 分别关于 Oyz 面、x 轴和原点的对称点.

3. 求点 $M_1(1,3,5)$ 到点 $M_2(-3,1,7)$ 之间的距离.

4. 求点 $M(3,2,-4)$ 到各坐标面的距离.

5. 求点 $M(1,6,8)$ 到各坐标轴之间的距离.

6. 在 z 轴上，求与点 $(1,-2,2)$ 和点 $(2,-4,-1)$ 等距离的点.

7. 在 Oyz 面上，求与点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.