

高等学校工程专科成人教育教材

高等 数学

(下册)

同济大学 西北工业大学等六所院校 合编

主编 张永曙 刘浩荣

高等教育出版社

013
312-下

高等学校工程专科成人教育教材

高等数学

下册

同济大学 西北工业大学等六所院校 合编

主编 张永曙 刘浩荣

编者 刘浩荣 袁美月

王作英 吴 群

苏金熙 徐 敏

张永曙 倚朝晖

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 下册/张永曙,刘浩荣主编;同济大学等六
所院校编. —北京:高等教育出版社,1998(2002 重印)

ISBN 7-04-006738-2

I. 高… II. ①张…②刘…③同… III. 高等数学
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 16407 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	国防工业出版社印刷厂		
开 本	850×1168 1/32	版 次	1998 年 11 月第 1 版
印 张	15.875	印 次	2002 年 8 月第 4 次印刷
字 数	410 000	定 价	16.80 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

本书是根据高等学校工程专科成人教育的教学要求,在基础理论教学中“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,参照普通高等院校成人教育研究会数学学科委员会 1993 年修订的“成人高等教育工科类各专业专科高等数学课程教学基本要求”编写的.全书分上、下两册.下册内容是“向量代数与空间解析几何”,“多元函数微积分”,“无穷级数”和“微分方程”.

本书融教材与学习指导书为一体,便于函授、自学,可作为成人高等教育工科类专科函授教材,也可作为职教、夜大、电大、业余大学专科及专科自学考试教材或参考书.

目 录

第四篇 向量代数与空间解析几何

第十一章 向量代数	1
§ 11.1 空间直角坐标系	1
一、空间直角坐标系	1
二、空间两点间的距离	4
习题 11-1	5
§ 11.2 向量及其线性运算	6
一、向量的概念	6
二、向量的线性运算	7
习题 11-2	13
§ 11.3 向量的坐标	14
一、向量在数轴上的投影	14
二、向量的坐标	16
三、向量线性运算的坐标表示式	18
四、向量的模及方向余弦的坐标表示式	18
习题 11-3	20
§ 11.4 向量的数量积和向量积	21
一、向量的数量积	21
二、向量的向量积	25
习题 11-4	29
学习指导(十一)	30
复习练习题(十一)	34
第十二章 空间解析几何	37
§ 12.1 平面及其方程	37
一、平面的点法式方程	37

二、平面的一般式方程	39
三、两平面的夹角及平行与垂直的条件	41
习题 12-1	43
§ 12.2 空间直线及其方程	44
一、空间直线的点向式方程和参数式方程	45
二、空间直线的一般式方程	46
三、空间两直线的夹角及平行与垂直的条件	48
四、空间直线与平面的夹角及平行与垂直的条件	49
习题 12-2	51
§ 12.3 曲面及其方程	52
一、曲面的方程的概念	52
二、柱面及其方程	54
三、旋转曲面及其方程	57
习题 12-3	59
§ 12.4 空间曲线及其方程	60
一、空间曲线的一般方程	60
二、空间曲线的参数方程	62
三、空间曲线在坐标面上的投影	63
习题 12-4	65
§ 12.5 二次曲面简介	66
一、椭球面	66
二、抛物面	68
三、双曲面	70
习题 12-5	72
学习指导(十二)	73
复习练习题(十二)	79
测验作业题(六)	81

第五篇 多元函数微分学

第十三章 多元函数及其微分法	82
§ 13.1 多元函数的基本概念	82
一、多元函数的概念	82

二、二元函数的极限	90
三、二元函数的连续性	94
习题 13-1	97
§ 13.2 偏导数	99
一、偏导数的定义及其求法	99
二、二元函数 $f(x, y)$ 的偏导数的几何意义	104
三、高阶偏导数	105
四、混合偏导数与求导次序无关的条件	107
习题 13-2	108
§ 13.3 全微分及其应用	110
一、全微分的概念	110
二、函数可微的条件	113
三、全微分在近似计算中的应用	116
习题 13-3	118
§ 13.4 多元复合函数的求导方法	119
一、多元复合函数的全导数	120
二、多元复合函数的偏导数——链式法则	121
三、全微分形式的不变性	125
四、多元复合函数的高阶偏导数举例	127
习题 13-4	131
§ 13.5 隐函数的一阶导数或偏导数公式	133
一、由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数	
$y = y(x)$ 的导数公式	133
二、由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的	
偏导数公式	135
习题 13-5	138
学习指导(十三)	139
复习练习题(十三)	153
第十四章 偏导数的应用	158
§ 14.1 偏导数在几何中的应用	158
一、空间曲线的切线方程和法平面方程	158
二、空间曲面的切平面方程和法线方程	161

习题 14-1	166
§ 14.2 二元函数的极值	167
一、二元函数极值的概念	167
二、二元函数极值的求法	169
习题 14-2	172
§ 14.3 函数的最大值与最小值, 条件极值与拉格朗日乘法	173
一、函数的最大值与最小值	174
二、函数的条件极值与拉格朗日乘法	177
习题 14-3	183
学习指导(十四)	184
复习练习题(十四)	195
测验作业题(七)	199

第六篇 多元函数积分学

第十五章 重积分及其应用	201
§ 15.1 二重积分的概念和性质	202
一、二重积分的概念	202
二、二重积分的性质	206
习题 15-1	209
§ 15.2 直角坐标系下二重积分的计算法	210
习题 15-2	219
§ 15.3 极坐标系下二重积分的计算法	221
一、二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 的极坐标形式	221
二、把极坐标系下的二重积分化为二次积分计算	223
习题 15-3	228
§ 15.4 二重积分的应用	229
一、立体的体积	229
二、平面图形的面积	232
*三、曲面的面积	232
四、平面薄片的质量与重心	235
习题 15-4	237

§ 15.5 三重积分的概念与算法	238
一、三重积分的概念	238
二、直角坐标系下三重积分的算法	239
三、柱面坐标系下三重积分的算法	241
四、球面坐标系下三重积分的算法	243
习题 15-5	248
学习指导(十五)	249
复习练习题(十五)	260
第十六章 曲线积分	262
§ 16.1 对弧长的曲线积分	262
一、对弧长的曲线积分的概念与性质	262
二、对弧长的曲线积分的算法	265
习题 16-1	268
§ 16.2 对坐标的曲线积分	269
一、对坐标的曲线积分的概念与性质	269
二、对坐标的曲线积分的算法	273
习题 16-2	279
§ 16.3 格林(Green)公式及其应用	279
一、格林(Green)公式	280
二、利用格林公式计算曲线积分	282
三、利用格林公式计算平面图形的面积	284
习题 16-3	285
§ 16.4 平面上曲线积分与路径无关的条件	286
习题 16-4	290
学习指导(十六)	290
复习练习题(十六)	298
测验作业题(八)	300

第七篇 无穷级数

第十七章 常数项级数	301
§ 17.1 常数项级数的概念与性质	301

一、常数项级数及其收敛与发散的概念	301
二、无穷级数的基本性质	306
三、级数收敛的必要条件	308
习题 17-1	311
§ 17.2 正项级数及其敛散性的判别法	312
一、正项级数收敛的充要条件	312
二、正项级数敛散性的判别法	314
习题 17-2	323
§ 17.3 任意项级数的收敛性的判别法	324
一、交错级数及其收敛性的判别法	324
二、任意项级数的收敛性——绝对收敛与条件收敛	326
习题 17-3	329
学习指导(十七)	329
复习练习题(十七)	341
第十八章 幂级数与* 傅里叶级数	345
§ 18.1 幂级数及其收敛性	346
一、幂级数及其收敛性的概念	346
二、阿贝尔(Abel)定理	347
三、幂级数的收敛半径与收敛区间	348
习题 18-1	352
§ 18.2 幂级数的运算	353
一、幂级数的加法、减法与乘法	353
二、幂级数的微分和积分运算	354
习题 18-2	357
§ 18.3 把函数展开成幂级数	357
一、泰勒级数与泰勒级数展开式	357
二、把函数展开成幂级数	361
习题 18-3	367
§ 18.4 函数的幂级数展开式的应用	368
一、在近似计算中的应用	368
二、欧拉(Euler)公式	372
习题 18-4	373

* § 18.5 把函数展开成傅里叶(Fourier)级数	373
一、三角级数及三角函数系的正交性	373
二、把以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数	375
三、把定义在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的函数展开成傅里叶级数	381
四、把定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数展开成正弦(或余弦) 级数	384
五、把以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里叶级数	388
* 习题 18-5	390
学习指导(十八)	391
复习练习题(十八)	409
测验作业题(九)	411

第八篇 常微分方程

第十九章 一阶微分方程	414
§ 19.1 微分方程的基本概念	414
一、引例	414
二、微分方程的基本概念	416
习题 19-1	418
§ 19.2 变量可分离的微分方程及齐次微分方程	419
一、变量可分离的微分方程	420
二、齐次微分方程	422
习题 19-2	425
§ 19.3 线性微分方程	425
习题 19-3	430
§ 19.4 一阶微分方程的应用举例	431
习题 19-4	435
学习指导(十九)	436
复习练习题(十九)	445
第二十章 高阶微分方程	448
§ 20.1 可降阶的高阶微分方程	448
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型	448

二、 $y''=f(x, y')$ 型	449
三、 $y''=f(y, y')$ 型	451
习题 20-1	452
§ 20.2 二阶线性微分方程	453
一、二阶线性微分方程的概念	453
二、二阶线性齐次微分方程解的性质及通解结构	454
三、二阶线性非齐次微分方程的通解结构及解的性质	457
习题 20-2	459
§ 20.3 二阶线性常数系数齐次微分方程的解法	460
习题 20-3	465
§ 20.4 二阶线性常数系数非齐次微分方程的解法	466
一、 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	466
二、 $f(x)=e^{\lambda x}(A\cos \omega x+B\sin \omega x)$ 型	471
习题 20-4	473
§ 20.5 二阶微分方程的应用举例	474
习题 20-5	482
学习指导(二十)	483
复习练习题(二十)	491
测验作业题(十)	493

第四篇 向量代数与 空间解析几何

在平面解析几何中,我们曾利用平面直角坐标系,把平面上的点与一对有序数组对应起来,从而就把平面上的几何图形与代数方程对应起来,这样就使我们能够用代数方法来研究几何问题.空间解析几何也是用类似的方法来讨论空间几何图形的问题.

本篇的内容也是学习多元函数微积分学必不可少的知识,并且这些知识在物理、力学等学科中常常要用到.

第十一章 向量代数

在这一章里,我们首先建立空间直角坐标系,再介绍向量的概念及向量的一些代数运算规律.

§ 11.1 空间直角坐标系

为了用代数方法研究几何问题,需要在空间几何图形与数之间建立起某种联系.类似于平面解析几何,可通过建立空间直角坐标系来建立这种联系.

一、空间直角坐标系

任取空间一点 O ,以点 O 为原点作三条两两互相垂直的数

轴,并且这三条数轴具有相同的长度单位.分别把它们叫做 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),统称为坐标轴.它们的正向排列次序符合右手规则,即用右手握住 z 轴,拇指所指方向为 z 轴正向,其余四指所指的方向为由 x 轴正向到 y 轴正向的转动方向(图 11-1).这样的三条数轴就构成了一个空间直角坐标系.由于这个坐标系的三条坐标轴的排列符合右手规则,因此又把它叫做右手直角坐标系.点 O 叫做坐标原点(简称原点).通常将 x 轴和 y 轴安排在水平面位置,而 z 轴则在铅直方向上.

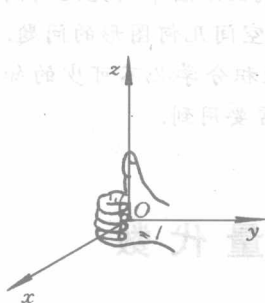


图 11-1

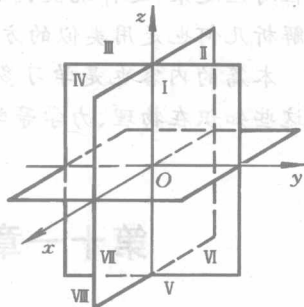


图 11-2

在空间直角坐标系中,由每两条坐标轴所决定的平面叫做坐标面.由 x 轴和 y 轴所确定的平面叫做 Oxy 面,由 y 轴和 z 轴所确定的平面叫做 Oyz 面,由 z 轴和 x 轴所确定的平面叫做 Ozx 面.这三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个卦限.以 x 轴正半轴、 y 轴正半轴、 z 轴正半轴为棱的那个卦限叫做第 I 卦限,在 Oxy 面上方的其它三个卦限按逆时针方向(从 z 轴正向向下看)依次叫做第 II、III、IV 卦限;在 Oxy 面下方与第 I、II、III、IV 卦限相对的是第 V、VI、VII、VIII 卦限(图 11-2).

在空间直角坐标系中,我们就可以建立空间的点与有序数组之间的对应关系.设点 M 为空间中任意一点,过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴,且与这三个坐标轴的交点分别为

P 、 Q 和 R (图 11-3). 设点 P 、 Q 和 R 在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x 、 y 和 z . 这样对于空间中的点 M , 就有唯一确定的一组有序数 x 、 y 和 z 与之对应; 另一方面, 对于一组有序数 x 、 y 和 z , 在 x 轴上设坐标为 x 的点是 P , 在 y 轴上设坐标为 y 的点是 Q , 在 z 轴上设坐标为 z 的点是 R . 分别过点 P 、 Q 和 R 作与 x 轴、 y 轴和 z 轴垂直的三个平面, 这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x 、 y 和 z 唯一确定的点.

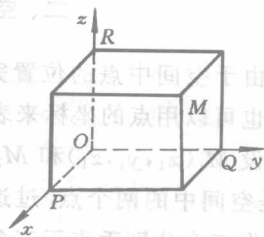


图 11-3

综上所述, 我们就建立起空间中的点 M 与有序数组 x 、 y 和 z 之间的相互对应关系. 这种对应关系是由空间中的点与有序数组相互唯一确定的, 我们把这种对应关系叫做一一对应关系, 把有序数组 x 、 y 和 z 叫做点 M 的坐标, 记作 (x, y, z) , 并把 x 、 y 和 z 依次叫做点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 点 M 的坐标有时也记作 $M(x, y, z)$.

由点的坐标概念, 我们可以得出原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$. 在坐标轴和坐标面上的点的坐标也各有特征. 比如, x 轴上点的坐标可写成 $(x, 0, 0)$, y 轴和 z 轴上点的坐标可写成 $(0, y, 0)$ 和 $(0, 0, z)$; Oxy 面上点的坐标可写成 $(x, y, 0)$, Oyz 面和 Ozx 面上点的坐标可写成 $(0, y, z)$ 和 $(x, 0, z)$. 另外, 根据卦限的规定, 在八个卦限中任一点的坐标的符号如下:

卦限 坐标	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

二、空间两点间的距离

由于空间中点的位置完全可由其坐标所确定,从而两点间的距离也可以用点的坐标来表示.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中的两个点,过这两个点各自作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这样的六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 11-4).

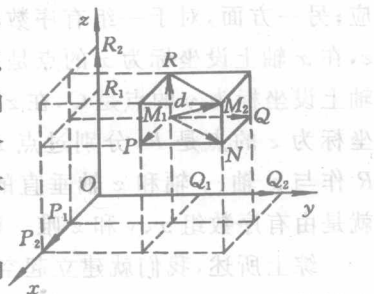


图 11-4

因为 $\triangle M_1NM_2$ 是直角三角形,根据勾股定理可推得

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

而 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形,即有

$$|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2,$$

所以

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2. \end{aligned}$$

由于

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1|, |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|, |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以点 M_1 与点 M_2 间的距离

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (11.1)$$

这就是空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离公式.

特别地,点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

[例 11.1] 在 x 轴上,求与点 $A(2,3,1)$ 和点 $B(1,-3,4)$ 等距离的点.

[解] 设在 x 轴上所求的点为 $M(x,0,0)$. 根据题意有

$$|MA| = |MB|.$$

由公式(11.1)得

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2-x)^2 + (3-0)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{(1-x)^2 + (-3-0)^2 + (4-0)^2}. \end{aligned}$$

两边平方后,解得 $x=-6$. 于是所求的点是 $M(-6,0,0)$.

[例 11.2] 设 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(4,1,9)$ 、 $B(10,-1,6)$ 和 $C(2,4,3)$,试证 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

$$[\text{证}] \quad |AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98},$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7.$$

由于 $|AB| = |AC|$,且满足勾股关系

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2,$$

所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

习 题 11-1

1. 指出下列各点在哪个坐标轴或坐标面上?
 $A(1,2,0)$; $B(0,-2,0)$; $C(0,1,7)$;
 $D(0,0,1)$; $E(3,0,0)$; $F(2,0,1)$.
2. 求点 $M(2,-3,1)$ 分别关于 Oyz 面、 x 轴和原点的对称点.
3. 求点 $M_1(1,3,5)$ 到点 $M_2(-3,1,7)$ 之间的距离.
4. 求点 $M(3,2,-4)$ 到各坐标面的距离.
5. 求点 $M(1,6,8)$ 到各坐标轴之间的距离.
6. 在 z 轴上,求与点 $(1,-2,2)$ 和点 $(2,-4,-1)$ 等距离的点.
7. 在 Oyz 面上,求与点 $A(3,1,2)$ 、 $B(4,-2,2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.