



秒
30
解 5 分钟的高考题

高考数学 快速解题法

窦志民 著

典型例题解析
解题切入点
分析思维过程
详解
快解
方法与技巧
得分主要步骤
易丢分原因
高考真题练习及解答
名校试题练习及解答

中国青年出版社

高考数学 快速解题法

窦志民 著

中国青年出版社

(京)新登字083号

图书在版编目(CIP)数据

高考数学快速解题法/窦志民著. —北京:中国青年出版社, 2008

(高考高效教辅丛书)

ISBN 978-7-5006-8236-3

I.高... II.窦... III.数学课-高中-解题-升学参考资料

IV.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第080793号

出版发行 中国青年出版社

社 址:北京东四12条21号

邮政编码:100708

网 址:www.cyp.com.cn

编辑电话:(010) 64007781

责任编辑:庄伟 shuixizhuzhuang@126.com

营 销:北京中青人出版物发行有限公司

电 话:(010) 64017809 64066441 (北京区)

印 刷:三河市和达印务有限公司

经 销:新华书店

开 本:700×1000 1/16

印 张:22

字 数:200千字

版 次:2008年7月第1版第1次印刷 2008年9月第2次印刷

印 数:8001-12000册

定 价:28.00元

本图书如有印装质量问题,请与出版部联系调换

联系电话:(010) 84035821

前 言

高考试题的解答,一般为“通性通法”,这种解法是最普遍、最基础的,往往比较繁琐;而大部分高考题目都不止一种解法。解法不同,简繁程度也不同,对于高考来说,简便快捷的方法可以省出不少时间用于解答难度较大的题目,或从容地进行检验。

从技巧和思路出发,本书通过对例题的分析及不同解答方法的对比,让读者掌握“快解”的数学思想和方法,从而在高考时受益。

与其他高考数学教辅不同,本书的各个部分都有明显的特点和极高的实用性。

典型例题解析 选编了历年的经典高考真题、各地的精品模拟题及各知识点常见题,极具典型意义。高考不宜实行题海战术,本书提倡“解完一道题,学会一类题”的学习方法,做题时,求精简,不求海量。

解题切入点 有些同学读完题目后,往往不知从何处入手进行解答,使得思路阻塞。此部分从数学解题思想入手,列出了较为自然合理的切入点,经过整本书的思考训练,解题时候的思路不再是阻扰得分的原因。

分析思维过程 在其他书中一直强调的思维过程,在此部分有非常具体的体现,使读者能详细地将题设与所用各知识点联系起来,得到轮廓清晰的解答过程。一旦胸有成竹,解题信心大增,速度和准确度自然容易提高。

详解 严密的推理及应有的计算步骤,以及解题时用到的数学图形,都能使读者很容易地理解“通性通法”。

快解 这是本书的重点部分,通过与详解对比,使读者学会另一种思考方法,并习惯于用在准确度和速度上都更为优越性的快解法解答高考题目。极少的计算过程和极简的思路都能减少在高考中出错的可能,从而多且稳地得到分数。大部分快解法非常巧妙,是数十年的经验总结而成,极有参考价值。

方法与技巧 总结在详解与快解中用到的数学方法与运算技巧,便于读者查漏补缺、实际应用。

得分主要步骤、易丢分原因 针对高考的“步骤分”,本书特别设计了这两个部分,保证考生在会做的情况下,写对关键步骤,得到相应的分数。同时防止考生在考试时思维错位或因为漏写步骤而得不到满分。

高考真题练习及解答 对最近几年的高考试题进行了精心筛选,编入了知识点及解题方法的针对性较强的部分试题。考虑到读者层次的不同,选题有难有

易,供读后选择练习。每道题都给出了详细的答题步骤,可使每一位学过该知识点的人都能比较容易看懂。

名校试题练习及解答 从全国著名重点中学的试题库中挑选了经典题型,使读者了解并熟悉名校试题的风格和特点,以拓宽视野,提高解题能力。这些试题的解答,有的依“通性通法”,有的则明晰地体现了一定的解题技巧。

本书收编的部分例题和练习题的解法在借鉴同仁的方法的基础上进行了创新和改进,在此,特对各同仁表示诚挚的感谢。北京四中李建华副校长对本书的编写提供了很大的帮助,在此,一并表示衷心地感谢。

书中的快解法是作者一人之见,可能还有更好更快的解法待挖掘,望各位读者指教。

对编写过程中的疏漏之处,恕请谅解。

作者

2008年5月28日

目 录

第一章 集合与简易逻辑

基础知识要点 / 1

高考真题练习 / 20

高考真题解答 / 26

典型例题解析 / 2

名校试题练习 / 24

名校试题解答 / 28

第二章 函 数

基础知识要点 / 31

高考真题练习 / 57

高考真题解答 / 62

典型例题解析 / 32

名校试题练习 / 60

名校试题解答 / 67

第三章 数 列

基础知识要点 / 71

高考真题练习 / 92

高考真题解答 / 97

典型例题解析 / 72

名校试题练习 / 95

名校试题解答 / 102

第四章 三角函数

基础知识要点 / 107

高考真题练习 / 130

高考真题解答 / 136

典型例题解析 / 111

名校试题练习 / 134

名校试题解答 / 143

第五章 平面向量

基础知识要点 / 147

高考真题练习 / 167

高考真题解答 / 173

典型例题解析 / 148

名校试题练习 / 171

名校试题解答 / 178

第六章 不等式

基础知识要点 / 181

高考真题练习 / 197

高考真题解答 / 202

典型例题解析 / 182

名校试题练习 / 200

名校试题解答 / 206

第七章 排列,组合和概率统计

基础知识要点 /210

高考真题练习 /226

高考真题解答 /231

典型例题解析 /212

名校试题练习 /230

名校试题解答 /236

第八章 立体几何

基础知识要点 /238

高考真题练习 /260

高考真题解答 /267

典型例题解析 /240

名校试题练习 /265

名校试题解答 /273

第九章 直线和圆的方程

基础知识要点 /279

高考真题练习 /295

高考真题解答 /300

典型例题解析 /280

名校试题练习 /298

名校试题解答 /303

第十章 圆锥曲线

基础知识要点 /307

高考真题练习 /330

高考真题解答 /336

典型例题解析 /309

名校试题练习 /334

名校试题解答 /343

第一章 集合与简易逻辑

基础知识要点

1. 集合中元素的特性:确定性、互异性、无序性.

2. 集合的表示方法:描述法、列举法.

3. 基本关系:

(1)元素与集合:属于($\in$),不属于($\notin$);

(2)集合与集合:包含($\supseteq$),包含于($\subseteq$),不包含于($\not\subseteq$),相等($=$);

(3)子集: $A \subseteq B$, A 是 B 的子集;

(4)真子集: $A \subset B$, 且 $\exists x_0 \in B$, 但 $x_0 \notin A$, 则 A 是 B 的真子集;

(5)空集: $\emptyset$, 不含任何元素的集合.

4. 集合的运算:

(1)交集:由所有属于 A 且属于 B 的元素组成的集合, 记为 $A \cap B$;

(2)并集:由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合, 记为 $A \cup B$;

(3)补集:设 U 为全集, $A \subseteq U$, 由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫 U 的子集 A 的补集, 记作: $\complement_U A$.

5. 常用数集: $\mathbf{N}$ 自然数集, $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 正整数集, $\mathbf{Q}$ 有理数集, $\mathbf{R}$ 实数集, $\mathbf{Z}$ 整数集, $\mathbf{C}$ 复数集.

6. 逻辑联结词:

或:两个简单命题至少一个成立;

且:两个简单命题都成立;

非:对一个命题的否定.

7. 四种命题:

原命题:若 A 则 B .

逆命题:若 B 则 A .

否命题:若 $\neg A$ 则 $\neg B$.

逆否命题:若 $\neg B$ 则 $\neg A$.

8. 等价命题:原命题 $\Leftrightarrow$ 逆否命题

否命题 $\Leftrightarrow$ 逆命题

9. 主要条件:

(1)若 A 则 B , 即 $A \Rightarrow B$, 则 A 是 B 的充分条件, B 是 A 的必要条件. 若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$, 则 A 是 B 的充要条件.

(2)若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \nRightarrow A$, 则 A 是 B 的充分而不必要条件;

若 $A \nRightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$, 则 A 是 B 的必要而不充分条件;

若 $A \nRightarrow B$ 且 $B \nRightarrow A$, 则 A 是 B 的即不充分又不必要条件.

10. 反证法

一般是假设命题的结论不成立,将假设作为条件的一部分,经过推理论证,导出与已知矛盾,或与定义、定理、公理、假设等相矛盾,从而假设不正确,肯定命题的正确性.

典型例题解析

例 1 (04' 沪春) 若非空集合 $M \subsetneq N$, 则“ $a \in M$ 或 $a \in N$ ”是“ $a \in M \cap N$ ”的()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

解题切入点

本题切入当然是 $M \subsetneq N$, 即 M 是 N 的真子集, “ $a \in M$ 或 $a \in N$ ”则 $a \in M \cup N$, 于是关系明确了.

分析思维过程

由于 M 是 N 的真子集, 若 $a \in M$, 则必有 $a \in N$; 若 $a \in N$, 则不一定有 $a \in M$, 但“若 $a \in M \cap N$ ”就必有 $a \in M$, 从而“ $a \in M$ 或 $a \in N$ ”成立.

详解

$\because M \subsetneq N$,

$\therefore M \cap N = M$. 若 $a \in M$ 或 $a \in N$, 则一定有 $a \in N$, 但一不一定有 $a \in M$, 即由 $a \in M$ 或 $a \in N \not\Rightarrow a \in M \cap N$, 排除 A、C.

若 $a \in M \cap N$, 则必有 $a \in M$, 从而 $a \in M$ 或 $a \in N$ 也就一定成立, 即由 $a \in M \cap N \Rightarrow a \in M$ 或 $a \in N$, 故选 B.

快解

$\because M \subsetneq N$, 即 M 是 N 的真子集.

$\therefore M \cap N = M$

$a \in M$ 必有 $a \in M \cap N$.

但 $a \in N \not\Rightarrow a \in M$ 即 $\not\Rightarrow a \in M \cap N$, 如图 1-1 所示, 选 B.

方法与技巧

抓住 $M \subsetneq N$, 即 M 是 N 的真子集, 画出符合题意的图来, 是能够正确解本题的关键.

得分主要步骤

首先要画出符合题意的图, 由图可以明显看出: $a \in M$ 必有 $a \in M \cap N$, 但 $a' \in N \not\Rightarrow a' \in M \cap N$.

易丢分原因

本题若能画出符合题意的图来, 一般不会丢分. 若想不到画图, 只从交集与并集的关系上想, 可能会越想越乱, 导致选错或胡乱选一项.

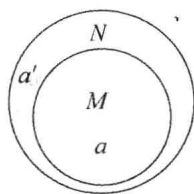


图 1-1

例 2 (04' 湖北) 设 A, B 为两个集合, 下列四个命题:

① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \notin B$;

② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$;

④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \in A$, 使 $x \notin B$.

其中真命题的序号是 _____ (把符合要求的命题序号都填上).

解题切入点

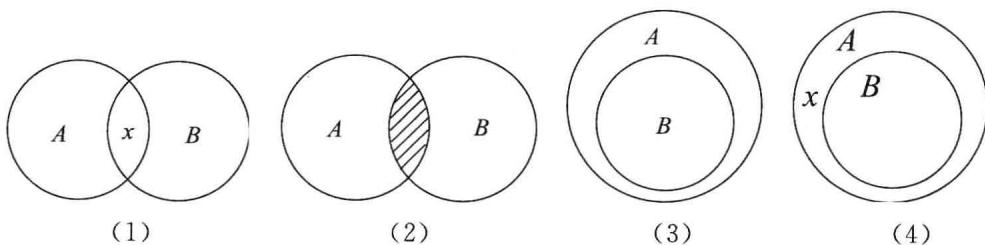
四个命题都有 $A \not\subseteq B$, 这就是我们解本题应首先思考的问题, 而“ $A \not\subseteq B$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的否定, 可考虑 $B \subseteq A$ 也符合题意.

分析思维过程

$A \not\subseteq B$ 等价于集合 A 中至少存在一个元素不属于 B , 显然命题①不正确; 对于命题②, 若 $A \neq \emptyset, B = \emptyset$, 则 $A \cap B = \emptyset$, 但若 $A = B = \emptyset$, 则不能推出 $A \not\subseteq B$, 对于命题③, $A \not\subseteq B$ 可有 $B \subseteq A$, 故只有命题④为真.

详解

对于四个命题, 分别画出四个 Venn 图:



由图(1)可以看出命题①不正确, 由图(2)可以看出命题②不正确, 由图(3)可以看出命题③不正确, 由图(4)可以看出命题④是正确的.

快解

只需画出图(4), 若 $x \in A \cap B$, 则 $x \in B$, 命题①不正确. 命题②明显不正确, 命题③也明显不正确, 命题④是正确的, 填④.

方法与技巧

画出符合题意的 Venn 图, 对解集合的题目而言是很重要的, 图(4)可用于四个命题.

得分主要步骤

理解 $A \not\subseteq B$, 四个命题都用到了这个关系, 而这个关系的图示是正确判断这四个命题的依据.

易丢分原因

对于 $A \not\subseteq B$ 这两个集合关系的理解不准确, 或者是不能找出命题①、②、③反例的 Venn 图, 如果陷入互相推出命题①、②、③的左右两端, 则更易丢分, 还浪费了不少时间.

例 3 已知集合 $M=\{(x,y) \mid y-1=k(x-1), x,y \in R\}$, 集合 $N=\{(x,y) \mid x^2+y^2-2y=0, x,y \in R\}$, 那么 $M \cap N$ 中()

- A. 不可能有两个元素 B. 至多有一个元素
C. 不可能只有一个元素 D. 必含无数个元素

解题切入点

由于集合的元素是一组有序数对, 其交集的元素是方程组 $\begin{cases} y-1=k(x-1) \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$ 的

解, 考查这个方程组解的个数.

分析思维过程

对于方程组 $\begin{cases} y-1=k(x-1) & \text{①} \\ x^2+y^2-2y=0 & \text{②} \end{cases}$ 将①代入②得到关于 x 的一个一元

二次方程, 由其判别式的情况可知方程根的个数, 从而 $M \cap N$ 中元素的个数可定.

详解

由 $\begin{cases} y-1=k(x-1) \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$ 得

$$(1+k^2)x^2-2k^2x+(k^2-1)=0 \quad (1)$$

由于 $1+k^2 \neq 0$, 且 $\Delta = (-2k^2)^2 - 4(1+k^2)(k^2-1) = 4 > 0$ 可知, 方程(1)有两个不同的实根, 从而 $M \cap N$ 中必有两个元素.

快解

集合 M 是过点 $(1,1)$ 的一条直线, 集合 N 是圆心为 $(0,1)$, 半径为 1 的圆, 如图 1-2, 由于直线的斜率存在, 故直线与圆必有两个交点.

方法与技巧

本题可由解方程组, 利用一元二次方程根的判别式来解, 也可以用数形结合法解, 两种方法都不繁.

得分主要步骤

利用判别式法时, 运算过程中符号不能出错. 数形结合法中, 直线过定点 $(1,1)$ 很重要, 画图要准确.

易丢分原因

解方程组, 由判别式判断根的个数即 $M \cap N$ 中元素的个数, 运算不失误不会丢分. 数形结合时, 给出直线方程的形式就知道该直线的斜率已经存在了, 若忽视这一点, 会画出 $x=1$ 这条直线, 导致误选. 或想不到直线过定点 $(1,1)$ 也会选错.

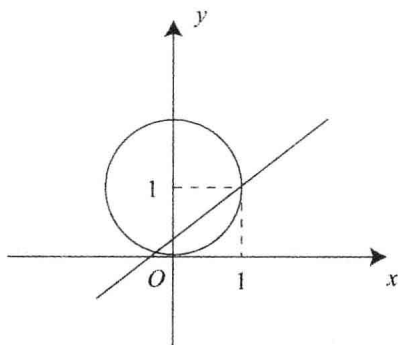


图 1-2

例 4 已知集合 $A=\{x \mid |x^2-2x| \leq x\}$, $B=\left\{x \mid \left|\frac{x}{1-x}\right| = \frac{x}{1-x}\right\}$, $C=\{x \mid ax^2-x+b>0\}$, 且 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, $(A \cup B) \cup C = \mathbf{R}$, 求 a, b 的值.

解题切入点

由于集合 A, B 是由不等式的形式描述的, 故可先解不等式, 确定集合 A, B , 就可求得 $A \cup B$, 从而可由题设继续求解.

分析思维过程

由集合 A, B 求得出 $A \cup B$ 后, 根据 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, $(A \cup B) \cup C = \mathbf{R}$ 便可知不等式 $ax^2-x+b>0$ 的解, 再由根与系数的关系求 a, b .

详解

由 $|x^2-2x| \leq x$ 得 $-x \leq x^2-2x \leq x$,

$$\text{即 } \begin{cases} x^2-3x \leq 0 \\ x^2-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \text{ 或 } x=0 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{由 } \left|\frac{x}{1-x}\right| = \frac{x}{1-x} \text{ 知 } \frac{x}{1-x} \geq 0 \text{ 解得 } 0 \leq x < 1 \quad \textcircled{2}$$

由①、②得 $A \cup B = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$

$$\because (A \cup B) \cap C = \emptyset, (A \cup B) \cup C = \mathbf{R}$$

$$\therefore C = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 3\}.$$

又已知 $C = \{x \mid ax^2-x+b>0\}$.

故 $x=0$ 和 $x=3$ 是方程 $ax^2-x+b=0$ 的两个根.

由根与系数的关系易得 $a = \frac{1}{3}, b = 0$.

快解

集合 A 所对应的图象如图 1-3

$$\therefore A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ 或 } x=0\}.$$

$$\text{由 } \left|\frac{x}{1-x}\right| = \frac{x}{1-x} \text{ 知 } \frac{x}{1-x} > 0, \text{ 解得}$$

$$B = \{x \mid 0 \leq x < 1\}.$$

$$\therefore A \cup B = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}.$$

由 $(A \cup B) \cap C = \emptyset, (A \cup B) \cup C = \mathbf{R}$ 可知

$$C = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 3\}.$$

$$\text{又 } C = \{x \mid ax^2-x+b>0\},$$

$\therefore x=0, x=3$ 是方程 $ax^2-x+b=0$ 的两个根.

由根与系数的关系易求得 $a = \frac{1}{3}, b = 0$.

方法与技巧

求解集合 A 时, 用到了数形结合法, 若对函数的图象不够熟悉, 则此法不但快, 还

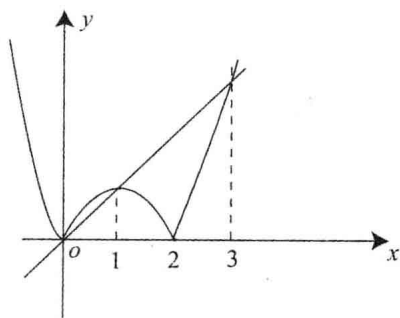


图 1-3

会更慢. 由 $y=x$ 这条直线与曲线相交快速判断出当 $x=3$ 时等号成立是很重要的.

得分主要步骤

正确求解两个不等式, 得出 $A \cup B$ 是解对本题的基础, 再由题设得出集合 C 则完成了该题主要步骤.

易丢分原因

求解不等式时, 方法不当易错, 故易丢分. 此处一错, 则以下皆无分可得. 由 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, $(A \cup B) \cap C = \mathbf{R}$ 不能正确得到 $C = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$, 则 a, b 不能求对, 也会导致以后的步骤不能得分.

例 5 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - (a+1)x + a < 0\}$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是_____.

解题切入点

集合 A 中的元素是由不等式 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ 确定的, 先解此不等式, 求得集合 A , 再考虑集合 B .

分析思维过程

易得不等式 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ 的解为 $1 \leq x \leq 3$. 而不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$ 对应的方程 $x^2 - (a+1)x + a = 0$ 的两根分别为 1 和 a , 需讨论 $a < 1$ 、 $a = 1$ 、 $a > 1$ 三种情况, 从而确定集合 B , 就可求出实数 a 的范围.

详解

解不等式 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ 得 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, 又由方程 $x^2 - (a+1)x + a = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = a$.

当 $a < 1$ 时, $B = \{x | a < x < 1\}$, 不满足 $B \subseteq A$;

当 $a = 1$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $B \subseteq A$;

当 $a > 1$ 时, $B = \{x | 1 < x < a\}$, 为 $1 < a \leq 3$ 时, 满足 $B \subseteq A$.

综上知, $1 \leq a \leq 3$.

快解

解不等式 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ 得 $A = [1, 3]$, 由 $x^2 - (a+1)x + a < 0$ 可知 B 集合的形式 (x_1, x_2) , 此时 $x_1 < x_2$, 依题意, 有 $(x_1, x_2) \subseteq [1, 3]$ 而方程 $x^2 - (a+1)x + a = 0$ 的两根为 1 和 a , 故必有 $B = (1, a)$, 则 $1 \leq a \leq 3$.

方法与技巧

求解集合 B 时, 用到了分类讨论. 快解法若画出图来, 一看便得其结果. 如图 1-4 所示, 若有 $B \subseteq A$, 只能有 $1 \leq a \leq 3$. 当 $a < 1$ 或 $a > 3$ 时, 不可能有 $B \subseteq A$. 解这道题时, 画图的方法直观, 不易做错.

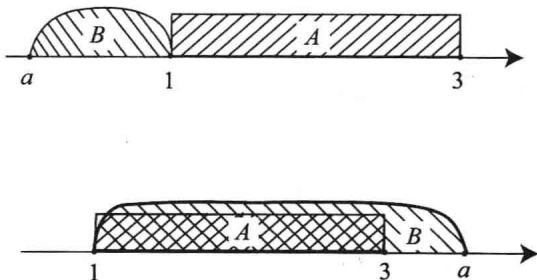


图 1-4

得分主要步骤

正确求得集合 A , 在得到 B 中的两个解为 1 和 a 时, 不要贸然写出 $B=(1, a)$ 或 $B=(a, 1)$, 应该想到比较 a 与 1 的大小. 画出集合 A 所对应的区间, 在数轴上找 a 的位置就能做对了.

易丢分原因

不能比较 a 与 1 的大小, 就不能确定集合 B , 则求不对 a 的范围. a 是否能取到 1 和 3, 即得到的结果是 $1 < a < 3$ 还是 $1 \leq a \leq 3$ 需慎重思考.

例 6 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + mx - y + 2 = 0\}$ 和 $B = \{(x, y) | x - y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$, 如果 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

解题切入点

由 $A \cap B \neq \emptyset$ 可知方程组 $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + mx - y + 2 = 0 \end{cases}$ 有解. 而 $0 \leq x \leq 2$, 故其解应在区间 $[0, 2]$ 上, 需讨论 m 的取值.

分析思维过程

由方程组 $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + mx - y + 2 = 0 \end{cases}$ 得 $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ ①

该方程有根, 得 $\Delta \geq 0$, 至少有一根在 $[0, 2]$ 内, 分为仅有一根在 $[0, 2]$ 内和两根都在 $[0, 2]$ 内两种情况, 分别求出 m 范围.

详解

由 $\begin{cases} x - y + 1 = 0 & (0 \leq x \leq 2) \\ x^2 + mx - y + 2 = 0 \end{cases}$ 得 $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ ①

$\because A \cap B \neq \emptyset$,

$\therefore$ 方程①至少有一个根在区间 $[0, 2]$ 内.

由 $\Delta = (m-1)^2 - 4 \geq 0$ 得 $m \leq -1$ 或 $m \geq 3$.

当 $m \leq -1$ 时, $x_1 + x_2 = -(m-1) \geq 2$, $x_1 x_2 = 1$, 即方程①的两根互为倒数. 且均为正, 故必有一根在区间 $[0, 1]$ 内, 从而在区间 $[0, 2]$ 内至少有一个根.

当 $m \geq 3$ 时, $x_1 + x_2 = -(m-1) \leq -2$, $x_1 x_2 = 1$, 即方程①有两个互为倒数的负数根, 不合题意.

综上知, $m \in (-\infty, -1]$

快解

由 $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + mx - y + 2 = 0 \end{cases}$ 得 $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ ①

$\because A \cap B \neq \emptyset$

$\therefore$ 方程①至少有一根在区间 $[0, 2]$ 内.

由 $\Delta = (m-1)^2 - 4 \geq 0$ 得 $m \leq -1$ 或 $m \geq 2$ ②

若仅有一根在 $[0, 2]$ 内, 设 $f(x) = x^2 + (m-1)x + 1$, 则

$$f(0) \cdot f(2) \leq 0 \quad \text{即} \quad 4 + 2(m-1) + 1 \leq 0.$$

$$\text{解得} \quad m \leq -\frac{3}{2} \quad \text{③}$$

若两根都在区间 $[0, 2]$ 内, 则

$$\begin{cases} f(2) \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \\ 0 < \frac{1-m}{2} < 2 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq m < 1 \quad \text{④}$$

由②、③、④得 $m \leq -1$.

方法与技巧

本题必须分类讨论. 快解法画出图形可保证分类无误, 而 $f(0)=1$, 可简化求解过程. 在 $[0, 2]$ 内仅有一个根时, 如图 1-5, 必有 $f(0) \cdot f(2) < 0$. 若两根都在区间 $[0, 2]$ 内, 则 $f(0) \geq 0, f(2) \geq 0$, 且其对称轴 $x = -\frac{m-1}{2} \in (0, 2)$.

得分主要步骤

因为两集合非空, 所以联立方程后, 得到的关于 x 的一元二次方程必有解, 从而 $\Delta \geq 0$. 此步必不可少! 以下分类讨论, 各种情况求解正确即可.

易丢分原因

可能注重于解的个数, 会忽视有根的条件. 在求解两根都在区间 $[0, 2]$ 内时, 个别同学会丢掉对称轴 $x = -\frac{m-1}{2}$ 必在区间 $(0, 2)$ 内, 以致导致求错 m 的范围.

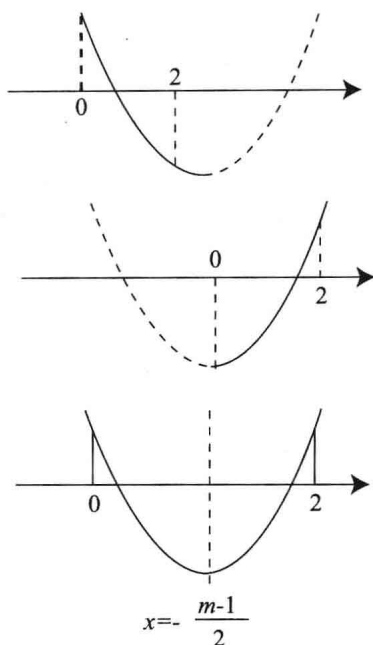


图 1-5

例 7 设集合 $A = \{(x, y) | y = a|x|\}$, $B = \{(x, y) | y = x + a\}$, 若 $A \cap B$ 中含有两个元素, 求实数 a 的取值范围.

解题切入点

求 $A \cap B$, 即求方程组 $\begin{cases} y = a|x| \\ y = x + a \end{cases}$ 的解. 也就是说, 方程 $a|x| = x + a$ 有两个解,

以下解决, 当 a 取什么值时, 此方程有两个解的问题.

分析思维过程

由方程组 $\begin{cases} y = a|x| \\ y = x + a \end{cases}$ 得到方程 $a|x| = x + a$ 后, 解这个方程时, 由 $x \geq 0$ 或 $x < 0$ 去

掉绝对值符号, 得两个方程. 分别解这两个方程, 得正、负两解, 就可求出 a 的范围.

详解

$$\text{由 } \begin{cases} y=a|x| \\ y=x+a \end{cases} \text{ 得 } a|x|=x+a.$$

1° 当 $x \geq 0$ 时, 方程 $ax=x+a$ 只有一解 $x=\frac{a}{a-1}$, 由 $\frac{a}{a-1} \geq 0$ 解得 $a \leq 0$ 或 $a > 1$.

2° 当 $x < 0$ 时, 方程 $-ax=x+a$ 只有一解 $x=-\frac{a}{a+1}$, 由 $-\frac{a}{a+1} < 0$ 解得 $a < -1$ 或 $a > 0$.

由于 $A \cap B$ 中有两个元素, 故 1°、2° 两种情况同时成立, 则 $a < -1$ 或 $a > 1$, 即 $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

快解

集合 A, B 均为点集, $A \cap B$ 中的元素就是函数 $y=a|x|$ 与函数 $y=x+a$ 两图象的交点, 当 $|a| > 1$ 时, 两图象有两个交点, 当 $|a| \leq 1$ 时, 两图象只有一个交点, 故 $|a| > 1$, 即 $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

方法与技巧

求方程的解时, 要讨论 $x \geq 0$ 或 $x < 0$, 由此求 a 的范围. 数形结合时, 直线 $y=x+a$ 的斜率为 1, 两射线 $y=a|x|$ 的斜率的绝对值要稍大些, 否则画出的图象在有限的书写范围内看不到交点, 会影响解题.

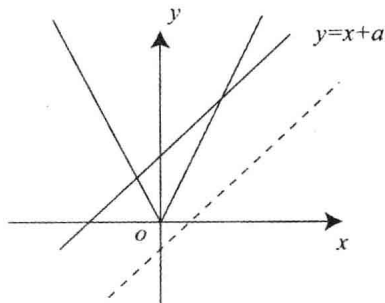


图 1-6

得分主要步骤

解方程时, 由 $x \geq 0$ 得出的解必须大于或等于 0, 由此解得 a 的范围. 同理, 当 $x < 0$ 时, 求得的解小于或等于 0, 两解都存在, 既有正数解, 也有负数解, 是求两种情况同时成立的 a 的范围, 而不是或有正数解, 或有负数解.

易丢分原因

本题最易丢分处就是, 当 $x \geq 0$ 时求得 $a \leq 0$ 或 $a > 1$; 当 $x < 0$ 时, 求得 $a < -1$ 或 $a > 0$, 是求二者的“交”, 还是求二者的“并”? 可能不少同学认为, 由 $|x|$ 讨论时, 是 $x \geq 0$ 或 $x < 0$ 两种情况, 不可能 $x \geq 0$ 和 $x < 0$ 同时成立, 故取其“并”. 其实题中集合 $A \cap B$ 中有两个元素, 就已说明方程 $a|x|=x+a$ 有两个解. 这两个解一正一负, 由数形结合法可以明显看出. 用数形结合法不易丢分.

例 8 设集合 $A=\{(x, y) | y^2-x-1=0\}$, $B=\{(x, y) | 4x^2+2x-2y+5=0\}$, $C=\{(x, y) | y=kx+b\}$. 求满足 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ 的正整数 k, b .

解题切入点

$(A \cup B) \cap C = \emptyset$ 即 $A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$, 即直线 $y=kx+b$ 与两曲线

$y^2 = x + 1$ 和 $y = \frac{1}{2}(4x^2 + 2x + 5)$ 都不相交, 也就是说, 方程组 $\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = x + 1 \end{cases}$ 和

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y = \frac{1}{2}(4x^2 + 2x + 5) \end{cases} \text{ 都无解.}$$

分析思维过程

在正确理解直线 $y = kx + b$ 的两曲线 $y^2 = x + 1$ 和 $y = \frac{1}{2}(4x^2 + 2x + 5)$ 都不相

交后, 由 $\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = x + 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y = kx + b \\ y = \frac{1}{2}(4x^2 + 2x + 5) \end{cases}$ 得到 $(kx + b)^2 - x - 1 = 0$ 和 $4x^2 + 2x$

$-2(kx + b) + 5 = 0$, 则这两个方程的判别式都小于 0, 应该可以确定 k 和 b 的值. 继续深入一步, 将出现关于 k, b 的二元二次不等式, 无法再做下去. 如果 k 与 b 能先确定一个, 就可以解下去了, 因为两曲线在 y 轴上的截距是确定的, 故可求出截距, 以求出 b 的取值或取值范围.

详解

由 A, 令 $y^2 - x - 1 = 0$ 中的 $x = 0$, 得 $y = \pm 1$, 即抛物线 $y^2 = x + 1$ 与 y 轴交于点 $(0, -1)$ 与 $(0, 1)$.

由 B, 令 $4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$ 中的 $x = 0$, 得 $y = \frac{5}{2}$, 即抛物线 $y = 2x^2 + x + \frac{5}{2}$ 交 y 轴于点 $(0, \frac{5}{2})$.

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 与这两抛物线都不相交, 且 $k, b \in \mathbf{N}_+$,

$\therefore b = 2$.

此时集合 C 是直线 $y = kx + 2$ 上的所有点.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 2 \\ y^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \text{ 得 } k^2 x^2 + (4k - 1)x + 3 = 0.$$

$$\text{令 } \Delta = (4k - 1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k^2 < 0 \quad \text{即} \quad 4k^2 - 8k + 1 < 0.$$

$$\text{解得 } \frac{2 - \sqrt{3}}{2} < k < \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore k \in \mathbf{N}_+,$$

$$\therefore k = 1. \quad \text{①}$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 2 \\ 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \text{ 得 } 4x^2 + (2 - 2k)x + 1 = 0.$$

$$\text{令 } \Delta = (2 - 2k)^2 - 16 < 0 \quad \text{得} \quad k^2 - 2k - 3 < 0.$$

$$\text{解得 } -1 < k < 3.$$

$$\therefore k \in \mathbf{N}_+,$$

$$\therefore k = 1 \text{ 或 } k = 2. \quad \text{②}$$