JIEJINSHUXI
捷进书系

主编：洪鸣远

中华题王

ZHONGHUA TIWANG

精选好题+方法内化+灵活运用=成功

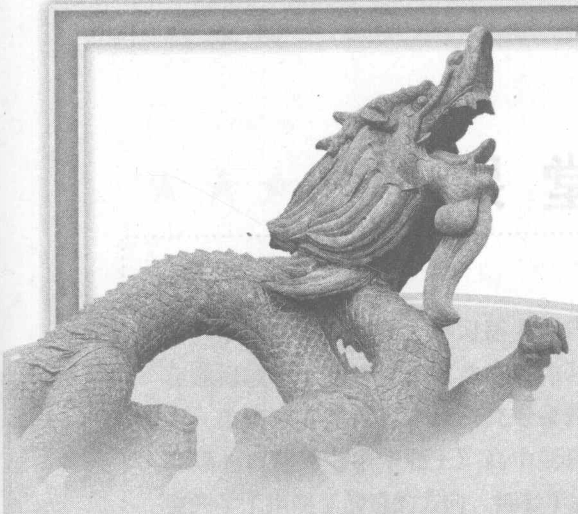
走进课堂，讲练互动

高中数学·必修5

配北师大版

新蕾出版社

捷进书系



中华题王

高中数学·必修5

配北师大版

本册主编：斯庆生
莫云生

新蕾出版社

图书在版编目(CIP)数据

中华题王:北师大版．数学．5:必修/张伟主编．—天津:
新蕾出版社,2007
ISBN 978-7-5307-4058-3

Ⅰ．中… Ⅱ．张… Ⅲ．数学课—高中—习题 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 098848 号

中华题王·高中数学必修 5(配北师大版)

出版发行 新蕾出版社
E-mail:newbuds@public.tpt.tj.cn
http://www.newbuds.com
地　　址 天津市和平区西康路 35 号(300051)
出 版 人 纪秀荣
电　　话 总编办:(022)23332422
发行部:(022)27221133,27221150
传　　真 (022)23332422
经　　销 全国新华书店
印　　刷 北京市亨利印刷有限公司
开　　本 880×1230　1/16
字　　数 250 千字
印　　张 9.75
版　　次 2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5307-4058-3
总 定 价 35.00 元

★★★ 为课堂添效益 ★★★

学生课业负担重，学习压力大，学习效率是决定成绩好坏的关键因素。走出盲动误区，摒弃题海战术，为课堂添效益，向练习要成绩，是您走向成功的最佳选择。

由国家著名教育考试研究专家洪鸣远老师精心策划，由国家级课程改革实验区一线骨干教师倾心打造的《中华题王》高中新课标版脱颖而出。它犹如璀璨的启明星，为在题海中左奔右突的学子指明了前进的方向，拥有了它，就可以傲视天下，引领群雄。

《中华题王》——讲与练双向激活，教与学师生互动

一、丛书特点和功能——同步助学辅导用书

★以例题带动讲解，以思路分析和解后反思串连讲解过程，以对应巩固训练提高思维的效率和正确性。

★左右双栏，讲练对照，左讲右练的互动形式，巩固基础，解决难点问题，提升课堂教学效果。

★走进课堂，师生共用，全程模拟教学过程，有例题有练习，教师选例题，学生做练习。

★互联高中学段知识网络，帮助学生自我构建完整的知识体系.

★配备自我检测方案，定时检测学习效果，帮学生及时查缺补漏.

★依据课改精神，展示考点并选择最近三年的高考样题，使学生在同步学习中零距离体验高考氛围。

二、使用特点提炼——星级指数

★★★☆☆　难度中上，适合全体学生，

★★★★☆　题目新颖，题型全面经典

★★★★★　讲：练=3：7，讲与练的比例适当

★★★★★　配套新课标各版本必、选修教材、人教大纲版高二教材。

三、热卖理由——随讲随练，及时巩固，适用面广，针对性强

★即讲即练，指导解题，及时巩固和提升课堂教学效果。激活学生的思维潜能，深入反思方法和规律。

★荟萃专家智慧，编写理念与新课标一致，体例新颖，师生使用方便。

★课前预习、课堂讲解、随堂练习、课后复习、单元总结，自测水平，触摸高考，全程模拟教学进程。

★重教材，抓基础，重难点，抓方法，激活高品质思维方式。

学科导读图示 ★★★

课前感知

——明确学习内容和目标，梳理教材知识点、重点和难点；并解答简单问题。

即讲即练

——讲练互动，边学边练，及时巩固课堂效果。

典题例释

——对应讲解，选择略高于教材难度的例题，以抓基础和深挖掘为手段，以思路分析、解题步骤、解后反思为串连，揭示解题方法和技巧，反思解题思想和规律。达到巩固知识，提升能力的目标。

随堂练习

——右栏练习，选择与左栏知识点、解题方法对应的练习题，巩固基础，解决难点问题。以理清解题思路，掌握方法为目标。左右栏讲练互动，教师可选择适当例题和对应的习题，在课堂之上，边讲边练，及时巩固和检测教学效果。学生也可当堂检测自己对知识的掌握程度。

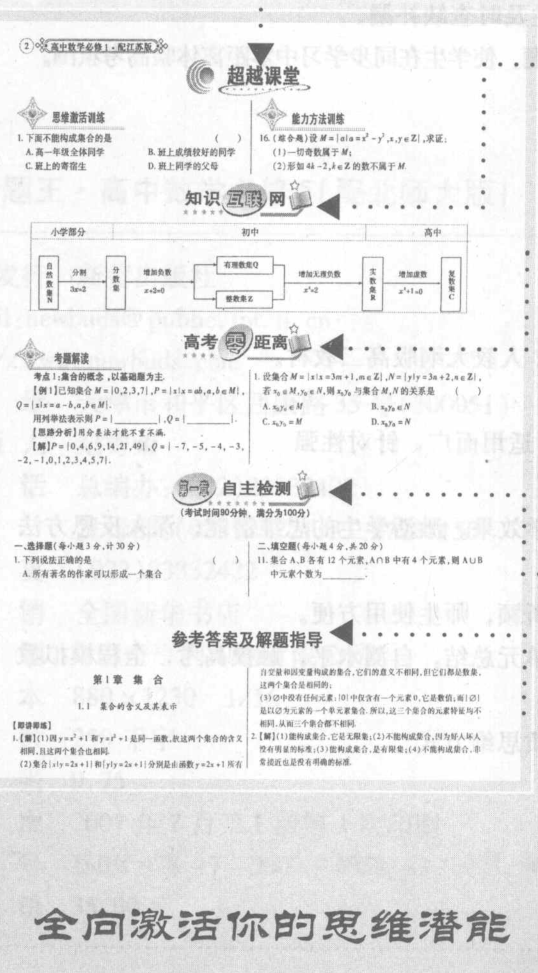
超越课堂——根据学生的认知差异，设计不同层次的课后练习题。“思维激活训练”重在巩固基础。“能力方法训练”侧重突破重难点。

知识互联网——提炼每章的知识网络结构，链接相关知识并形成体系，展示知识间的内在联系，体验所学知识在整个高中学段的地位和价值。

高考零距离——考点左右对应，互动讲练，左栏“考题解读”列举高考的考点和出题档次，配合三年内的高考真题和各地的模拟题，以思路分析和解后反思串连，剖析解题过程。右栏“体验成功”对应左面的考点设置对应性训练题目，深化对解题方法的理解和掌握，同步演练应考技能。

本章自主检测——自我检测本章的学习效果，卷面结构仿照高考题型、题量设置，帮助学生找到差距，查漏补缺。

参考答案及解题指导——呈现标准答案，指导学生如何解题。“理解题目—找到办法—呈现步骤—解后反思”层层深入，帮助学生提高思维品质。



全向激活你的思维潜能　深入反思解题方法和规律

目录

第一章　数　列

§1　数　列

1.1　数列的概念

课前感知

1. (1)按一定__________排列的一列__________叫作数列，数列中的每一个数叫作这个数列的__________.

(2)在函数的意义下，数列是定义域为__________的函数，当自变量从小到大依次取值时，该函数对应的一列函数值就是这个数列.

(3)数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 简记作________.

2. 按__________的多少可分为有穷数列和无穷数列.

3. 如果数列 $\{a_n\}$ 的__________之间的函数关系可以用一个式子表示成 $a_n=f(n)$，那么这个式子就叫作这个数列的__________.

即讲即练

典题例释

【例1】由下列各组元素能构成数列吗？如果能构成数列，是有穷数列，还是无穷数列？并说明理由.

(1) $-3,-1,1,x,5,7,y,11$；

(2)无理数.

【思路分析】紧扣数列定义，强调“可排次序”和“一列数”.

【解】(1)当 x,y 代表数时为数列，此时是有穷数列；当 x,y 中有一个不代表数时，便不是数列.

(2)不能构成数列，因为无理数集不能在无理数与正整数之间建立一一映射，是不可列数集. 所以我们无法把所有的无理数按一定次序排列起来，即我们无法给所有的无理数编上序号.

【解后反思】注意判断是否是数列时抓住两点：①由一列数组成；②按一定顺序排列.

【例2】根据下面的通项公式，分别写出数列的前五项.

(1) $a_n=\frac{5}{9}(10^n-1)$，(2) $a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

【思路分析】数列的通项公式 $a_n=f(n)$ 表示的是数列的第 n 项与项数 n 之间的函数关系. 我们只要令 $n=1,2,3,4,5$ 代入通项公式 $a_n=f(n)$，就可得数列的前五项.

【解】(1)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得数列 $\{a_n\}$ 的前五项为：

5，55，555，5 555，55 555；

(2)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得数列 $\{a_n\}$ 的前五项为：

1，4，13，40，121.

随堂练习

1. 由下列各组元素能构成数列吗？如果能构成数列，是有穷数列，还是无穷数列？并说明理由.

(1)非正整数；(2)实数.

2. 根据下面的通项公式，分别写出数列的前五项.

① $a_n=(-1)^n$；

② $a_n=n^2$；

③ $a_n=2^n$；

④ $a_n=\frac{(-1)^n+7}{2}$.

【解后反思】数列是一类特殊的函数，数列的通项公式 $a_n=f(n)$ 是函数的解析式. 知道任意一个自变量 n，可以求出其对应的函数值 a_n.

【例3】根据下面各数列的前几项值，写出数列的一个通项公式：

(1)$4,-\frac{5}{2},2,-\frac{7}{4},\cdots$；

(2)3,5,9,17,33,…；

(3)8,88,888,8 888,…；

(4)7,0,-7,0,7,0,-7,0,…；

【思路分析】本题关键在于找出项与序号间的对应关系. (1)中有分数有整数，可把各项变形成分数然后找规律，前四项可以改写成$\frac{4}{1},-\frac{5}{2},\frac{6}{3},-\frac{7}{4}$这样规律就很明显了. (2)中注意到每个数减去1后，得2,4,8,16,32,…　(3)中把各项除以8，得1,11,111,…，再乘9，得，9,99,999,…　(4)中联想特殊数列1,0,-1,0,1,0,-1,0…，这不正是“五点法”作图中的几个值吗？

【解】(1)这个数列前四项可以改写成$\frac{4}{1},-\frac{5}{2},\frac{6}{3},-\frac{7}{4}$，所以 $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n+3}{n}$.

(2)若联想数列2,4,8,16,32,…，即数列$\{2^n\}$，可知 $a_n=2^n+1$；

若考虑逐差法，有

$a_2-a_1=2=2^1, a_3-a_2=4=2^2$,

$\cdots\cdots, a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$,

累加，得 $a_n-a_1=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$,

即 $a_n=2^n-1+2=2^n+1$.

(3)所求通项可转化为特殊数列9,99,999,9 999,…的通项，易知 $a_n=\frac{8}{9}(10^n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(4)所求通项可转化为特殊数列1,0,-1,0,1,0,-1,0,…的通项，于是有：$a_n=7\sin\frac{n\pi}{2}$；或 $a_n=7\cos\frac{(n-1)\pi}{2}$；

【解后反思】本题体现化归思想，做这类题时要多思考，多联想，有时还要将原数列作适当的转化变形，直到找到其中数字的规律.

3. 根据下面各数列的前几项值，写出数列的一个通项公式：

(1)$\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{5}{8},\frac{13}{16},-\frac{29}{32},\frac{61}{64},\cdots$；

(2)$\frac{2}{3},\frac{4}{15},\frac{6}{35},\frac{8}{63},\frac{10}{99},\cdots$；

(3)0.9,0.99,0.999,0.999 9,…；

(4)3,5,3,5,3,5,….

超越课堂

思维激活训练

1. 数列$\sqrt{2},\sqrt{5},2\sqrt{2},\sqrt{11},\cdots$，则$2\sqrt{5}$是该数列的　(　　)

A. 第6项　　B. 第7项

C. 第10项　　D. 第11项

2. 在数列$\{a_n\}$的每相邻两项中插入3个数，使它们与原数构成一个新数列，则新数列的第29项　(　　)

A. 不是原数列的项

B. 是原数列的第7项

C. 是原数列的第8项

D. 是原数列的第9项

3. 公式①$\sin\frac{n\pi}{2}$；②$a_n=\begin{cases}0, n\text{ 为偶数},\\(-1)^n, n\text{ 为奇数};\end{cases}$

③$a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$.

其中是数列1,0,-1,0,1,0,-1,0,…的通项公式的有 (　　)

A. ①②　　B. ②　　C. ①　　D. ①②③

4. 一机器狗每秒钟前进或后退一步，某同学让机器狗按照前进3步，然后再后退2步的规律移动，如果将此机器狗放在数轴的原点，面向正的方向，一步的距离为1个单位长，令$P(n)$表示第n秒时机器狗所在位置的坐标，且$P(0)=0$，那么下列结论中错误的是　(　　)

A. $P(3)=3$　　B. $P(5)=1$

C. $P(101)=21$　　D. $P(103)<P(104)$

5. 已知数列$\sqrt{3},3,\sqrt{15},\sqrt{21},3\sqrt{3},\cdots$，那么此数列的一个通项公式是________.

6. 数列$-1,\frac{8}{5},-\frac{15}{7},\frac{24}{9},\cdots$的一个通项公式为________.

7. 已知① $a_n=\sqrt{n-2}$；② $a_n=\log_{(n-1)}(n-2)$；③ $a_n=\frac{1}{n^2+n+1}$；④$a_n=\tan\frac{n\pi}{4}$，不能作为数列$\{a_n\}$的通项公式的是________.

8. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，对所有的$n\geqslant2$，都有$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n=n^2$，则$a_3+a_5$的值为________.

9. 如果一个数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$，从第二项起每一项等于它的前一项的2倍再加1，即$a_n=2a_{n-1}+1(n\in\mathbf{N},n>1)$，你能写出这个数列的前五项吗？

10. 如下表，它满足：(1)第n行首尾两数均为n；(2)表中的递推关系类似杨辉三角，则第n行$(n\geqslant2)$第2个数是________.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 3 & & 4 & & 3 & & & \\
 & & 4 & & 7 & & 7 & & 4 & & \\
 & 5 & & 11 & & 14 & & 11 & & 5 & \\
6 & & 16 & & 25 & & 25 & & 16 & & 6 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

11. 数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & \left(0\leqslant a_n<\frac{1}{2}\right),\\ 2a_n-1 & \left(\frac{1}{2}\leqslant a_n<1\right)\end{cases}$若$a_1=\frac{6}{7}$，则$a_2=$________，$a_{24}=$________.

12. 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=3$，$a_2=6$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，求这个数列的第五项.

13. 已知数列$\{a_n\}$，$a_1=5$，$a_3=9$，$a_n=pn+q$（p,q为常数，$n\in\mathbf{N}_+$），求a_8.

14. 已知函数$f(x)=2^x-2^{-x}$，数列$\{a_n\}$满足$f(\log_2 a_n)=-2n$. 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

15. 若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=q^n$，且$a_4-a_2=72$.

(1)求实数q的值；

(2)判断-81是否为此数列中的某一项.

16. 若数列$\{a_n\}$的前n项和记为S_n，即：$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.

(1)试证明 $a_n=\begin{cases}S_n-S_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+),\\S_1(n=1).\end{cases}$

(2)若$a_n\geqslant0$，$2\sqrt{S_n}=a_n+1$，求其通项公式.

能力方法训练

17.（综合题）根据下面各数列的前几项值，写出数列的一个通项公式：

(1)$\frac{4}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{11},\frac{2}{7},\cdots$;

(2)$0,3,8,15,24,\cdots$;

(3)$1,3,6,10,15,\cdots$;

(4)$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$.

18.（综合题）设数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\begin{cases}1(n=1),\\1+\frac{1}{a_{n-1}}(n\in\mathbf{N},n\geqslant2).\end{cases}$

写出这个数列的前五项.

19.（开放题）在数列$\{a_n\}$中，若a_1,a_2是正整数，且$a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$，$n=3,4,5,\cdots$则称$\{a_n\}$为“绝对差数列”. 举出一个前五项不为零的“绝对差数列”（只要求写出前十项）.

20.（探究题）某人上一段有10级的楼梯，如果一步可上一级，也可上两级，则他共有多少种不同的上楼梯的方法？

1.2 数列的函数特征

课前感知

1. 一般地，一个数列$\{a_n\}$，如果从第2项起，每一项都大于它前面的一项，即$a_{n+1}>a_n$，那么这个数列叫作________；

如果从第2项起，每一项都小于它前面的一项，即$a_{n+1}<a_n$，那么这个数列叫作________.

如果数列$\{a_n\}$的各项都相等，那么这个数列叫作________.

2. 数列的分类：

①按数列的项数是否有限可分为________和________；

②按数列相邻两项的大小关系可分为________，________，________，和________.

3. 数列的表示方法：

一个数列可以用图表来表示，也可以用图像来表示，也可以用________来表示.

即讲即练

典题例释

【例1】判断下列无穷数列的增减性.

(1)$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},\cdots,\frac{n^2}{2},\cdots$

(2)$\sqrt{2}-1,\sqrt{5}-2,\sqrt{10}-3,\cdots,\sqrt{n^2+1}-n,\cdots$

【思路分析】因为$n+1>n$，所以我们只要比较a_n和a_{n+1}的大小，就能判断无穷数列的增减性. 比较a_n和a_{n+1}的大小，一般用作差法，有些问题也可以用作商法（如(2)中的解法二，注意分子分母同时“有理化”的技巧）.

【解】(1)设$a_n=\frac{n^2}{2}$，那么$a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2}$.

$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{n^2}{2}=\frac{2n+1}{2}$，

$\because n\in\mathbf{N}_+$，

$\therefore 2n+1>0$，即$a_{n+1}>a_n$.

因此数列$\{a_n\}$是递增数列.

(2)（法一：作差法）设$a_n=\sqrt{n^2+1}-n$，

那么$a_{n+1}=\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)$，

$$\begin{aligned}\therefore a_{n+1}-a_n&=\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)-\sqrt{n^2+1}+n\\&=\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2+1}-1\\&=\frac{(n+1)^2+1-n^2-1}{\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}-1\\&=\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}}-1.\end{aligned}$$

因为$\sqrt{(n+1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}>\sqrt{(n+1)^2}+\sqrt{n^2}=2n+1$，

所以$a_{n+1}-a_n<\frac{2n+1}{2n+1}-1=0$.

即数列$\{a_n\}$是递减数列.

（法二：作商法）设$a_n=\sqrt{n^2+1}-n$，

那么$a_{n+1}=\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)$，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}$

$=\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1$，

因为$a_n>0(n\in\mathbf{N}_+)$，所以$a_{n+1}>a_n$.

随堂练习

1. 判断下列无穷数列的增减性.

(1)$\frac{2}{3},\frac{4}{15},\frac{6}{35},\frac{8}{63},\frac{10}{99},\cdots$；

(2)$a_n=1-\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}_+)$.

因此数列$\{a_n\}$是递减数列.

【解后反思】数列是一类特殊的函数，数列的通项公式$a_n=f(n)$是函数的解析式. 判断（或证明）数列的增减性与判断（或证明）函数的单调性所采用的方法是相同的，我们只要比较a_n和a_{n+1}的大小即可.

【例2】已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n}{n^2+1}$，写出它的前五项，并判断该数列的增减性.

【思路分析】数列的通项公式给出了第n项a_n与项数n之间的关系，只要用序号代替公式中的n，就可求出相应的项.

【解】对于公式$a_n=\frac{n}{n^2+1}$，依次取$n=1,2,3,4,5$. 得到数列的前五项为：

$$a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{2}{5},a_3=\frac{3}{10},a_4=\frac{4}{17},a_5=\frac{5}{26}.$$

而
$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}-\frac{n}{n^2+1}=\frac{1-n^2-n}{[(n+1)^2+1]\cdot(n^2+1)},$$

因为$n\in\mathbf{N}_+$，所以$1-n^2-n<0$，

所以该数列是个递减的数列.

【解后反思】数列的增减性的判断一般是写出$a_{n+1}-a_n$的表达式，经化简后看是否能判断正或负，从而得出增减性的结论.

【例3】已知一个数列的通项公式是$a_n=30+n-n^2$.

(1)问-60是否是这个数列中的一项？

(2)当n分别为何值时，$a_n=0,a_n>0,a_n<0$？

(3)当n分别为何值时，a_n有最大值，并求出最值.

【思路分析】根据数列的通项公式，可以讨论数列的性质，本题中的通项a_n是关于n的二次函数问题，故用二次方程、二次函数知识求解.

【解】(1)令$30+n-n^2=-60$，$n^2-n-90=0$，$(n-10)(n+9)=0$，

$\therefore\ n=10$或$n=-9$（舍去）.

故-60是这个数列的第10项.

(2)令$30+n-n^2=0$，即$n^2-n-30=0$，$(n-6)(n+5)=0$，

$\therefore\ n=6$或$n=-5$（舍去），故$n=6$时$a_n=0$；

同理，令，$30+n-n^2>0$，即$n^2-n-30<0$，解得

$-5<n<6$，

又$n>0$且$n\in\mathbf{N}_+$，所以，当$n=1,2,3,4,5$时，$a_n>0$；

同理，令$30+n-n^2<0$，即$n^2-n-30>0$，

解得$n>6$或$n<-5$（舍去）.

故当$n>6$且$n\in\mathbf{N}_+$时，$a_n<0$.

(3)因为$a_n=30+n-n^2=-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{121}{4}$，

又对称轴为$n=\frac{1}{2}$，$n\in\mathbf{N}_+$，故当$n=1$时，a_n有最大值，最大值为$30+1-1^2=30$.

【解后反思】数列的项与项数之间构成特殊的函数关系，在用函数的有关知识解决数列问题时，要注意到函数的定义域为正整数集这一约束条件.

2. 作出数列$a_n=\frac{n-\sqrt{10}}{n-\sqrt{11}}$的图像，并分析它的增减性.

3. 数列$\{a_n\}$中，$a_n=n^2-5n+4$，

(1)数列中有多少项值是负数；

(2)当n为何值，a_n有最小值？并求最小值.

超越课堂

思维激活训练

1. 下列说法不正确的是 ( )
A. 数列可以用图像来表示
B. 数列的通项公式不唯一
C. 数列的项不能相等
D. 数列可以用一群孤立的点表示

2. 有下列5个命题：
①数列0,1,0,-1与数列-1,0,1,0是相同的数列；②数列$\{a_n\}$中不能有相等的项；③数列2,4,6,8,…可以表示为$\{2,4,6,8,\cdots\}$；④数列1,3,5,7,…,2n-1,…可以表示为$\{2n-1\}$；⑤数列1,2,3,…不一定是无穷递增数列.
其中正确的命题的个数为 ( )
A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

3. 已知$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}-a_n=2$,则数列$\{a_n\}$是 ( )
A. 递增数列　B. 递减数列
C. 常数列　D. 以上均不正确

4. 已知数列通项公式$a_n=\frac{3n-1}{2n+1}$,则a_n与a_{n+1}的大小关系是 ( )
A. $a_n<a_{n+1}$　B. $a_n>a_{n+1}$
C. $a_n=a_{n+1}$　D. 大小不能确定

5. 数列$\{a_n\}$中,$a_n=-2n^2+29n+3$,则此数列的最大项的值是 ( )
A. 107　B. 108　C. $108\frac{1}{8}$　D. 109

6. 已知数列的通项公式$a_n=\frac{n-\sqrt{98}}{n-\sqrt{99}}(n\in\mathbf{N}_+)$,则数列$\{a_n\}$的前30项中最大项为 ( )
A. a_{30}　B. a_{10}　C. a_9　D. a_1

7. 已知数列$a_n=\frac{n}{n^2+156}$,则数列$\{a_n\}$中最大的项为 ( )
A. a_{12}　B. a_{13}
C. a_{12}或a_{13}　D. 不存在

8. 已知递增数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=(a^2-1)(n^3-2n)$,则实数a满足 ( )
A. $0<a<1$　B. $-1<a<1$
C. $a<-1$或$a>1$　D. $-1<a<0$

9. 已知S_k表示数列$\{a_n\}$的前k项和,且$S_k+S_{k+1}=a_{k+1}$ $(k\in\mathbf{N}_+)$,则数列$\{a_n\}$是 ( )
A. 递增数列　B. 递减数列
C. 常数列　D. 摆动数列

10. 设$0<a<1$,若$x_1=a, x_2=a^{x_1}, x_3=a^{x_2},\cdots,x_n=a^{x_{n-1}},\cdots$,则数列$\{x_n\}$ ( )
A. 是递增的
B. 是递减的
C. 奇数项是递增的,偶数项是递减的
D. 偶数项是递增的,奇数项是递减的

11. 设$a_n=-n^2+10n+11$,则数列$\{a_n\}$从首项到第多少项的和最大 ( )
A. 10项　B. 11项
C. 10或11项　D. 12项

12. 根据市调查结果,预测某种家用商品从年初开始的几个月内累积的需求量S_n(万件)近似地满足$S_n=\frac{n(21n-n^2-5)}{90}(n=1,2,\cdots,12)$,按此预测,在本年度内,需求量超过1.5万件的月份是 ( )
A. 5月、6月　B. 6月、7月
C. 7月、8月　D. 8月、9月

13. 数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=\frac{an}{bn+1}$,其中a,b均为正数,则a_n与a_{n+1}的大小关系为________.

14. 已知数列的通项公式为$a_n=-0.3n^2+2n+7\frac{2}{3}$,求它的数值最大的项.

15. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_n=n^2+\lambda n(n\in\mathbf{N}_+)$,且$a_{n+1}>a_n$,对任意$n\in\mathbf{N}_+$恒成立,求实数$\lambda$的取值范围.

16. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{n^2}{n^2+1}$.
求证:(1)此数列为递增数列;
(2)判断此数列是否有界,并说明理由.

能力方法训练

17.(综合题)设函数$f(x)=\log_2 x-\log_x 2(0<x<1)$,数列$\{a_n\}$满足:$f(2^{a_n})=2n(n=1,2,3,\cdots)$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)判定数列$\{a_n\}$的单调性.

18.(易错题)数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(n+1)\left(\frac{9}{10}\right)^n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)求证:这个数列先增后减;

(2)当n为何值时,a_n的值最大,最大值是多少?

19.已知数列$\{a_n\}$中,$a_n\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$a_n=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}a_{n-1}^2$,其中$n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+$,求证:对一切自然数$n$都有$a_n<a_{n+1}$成立.

§2 等差数列

2.1 等差数列

课前感知

1.一般地,一个数列$\{a_n\}$,从第2项起,每一项与前一项的差是________常数,我们称这样的数列为等差数列,称这个常数为等差数列的________,通常用字母d表示.

2.若首项是a_1,公差是d,则这个等差数列的通项公式是__________.

3.从函数角度研究等差数列$\{a_n\}$,其中公差d是该直线的________,即自变量每增加1,函数值增加________.

当$d>0$时,$\{a_n\}$为________数列;

当$d<0$时,$\{a_n\}$为________数列;

当$d=0$时,$\{a_n\}$为________数列.

4.如果a与b中间插入一个数A,________,那么A叫作a与b的等差中项.

则$A=$________.

(1)a、b、c成等差数列是$2b=a+c\left(\text{或}b=\frac{a+c}{2}\right)$的________条件.

(2)$\{a_n\}$是等差数列,则a_k是a_{k-l}与a_{k+l}的________,其中$k,l\in\mathbf{N}_+,k>1$.

即讲即练

典题例释

【例1】判断下列数列是否为等差数列.

(1)2,4,6,8,10;

(2)1,3,5,7;

(3)$a_n=5n+1$;

(4)$a_n=pn+q$(p,q为常数).

【思路分析】根据等差数列的定义,判断数列是否为等差数列.①作出"每一项与前一项的差"即$a_n-a_{n-1}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$;②判断"差是否为同一常数",即差是否相等.

【解】(1)是等差数列;(2)是等差数列;

(3)$\because$ $a_n=5n+1,n\in\mathbf{N}_+$,

随堂练习

1.判断下列数列是否为等差数列.

(1)9,7,3,5,1;

(2)$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$;

(3)$a_n=-1$;

(4)$a_n=n^2-1$.

$\therefore\ a_{n+1}=5(n+1)+1$,

因此 $a_{n+1}-a_n=[5(n+1)+1]-(5n+1)=5$,

由 n 的任意性知，此数列是等差数列.

(4) $\because\ a_n=pn+q, n\in\mathbf{N}_+$,

$\therefore\ a_{n+1}=p(n+1)+q$,

因此 $a_{n+1}-a_n=[p(n+1)+q]-(pn+q)=p$,

因为 p 是一个与 n 无关的常数，由 n 的任意性知，此数列是等差数列.

【解后反思】等差数列的定义 $a_{n+1}-a_n=d$(d 为常数，$n\in\mathbf{N}_+$)是判断数列是否为等差数列的重要方法. 要注意"同一常数"这一性质.

【例2】(1) -401 是不是等差数列 $-5,-9,-13\cdots$ 的项？如果是，是第几项？

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_5=10, a_{12}=31$，求 a_n.

(3)已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_p=q, a_q=p(p\neq q)$，求 a_{p+q} 的值.

【思路分析】(1)由 $a_1=-5, d=-9-(-5)=-4$ 得数列通项公式，然后看是否存在正整数 n，使得 $-401=-4n-1$ 成立. (2)运用等差数列通项公式转化为关于 a_1 和 d 的二元一次方程组求解；(3)可以转化为 a_1 和 d 求解；也可以利用等差数列中任意两项 a_n 和 a_m 的关系 $a_n=a_m+(n-m)d$ 解答；还可以用一次函数图像来探索.

【解】(1)由 $a_1=-5, d=-9-(-5)=-4$ 得数列通项公式为：$a_n=-5-4(n-1)=-4n-1$,

令 $-401=-4n-1$，解之得 $n=100$，即 -401 是这个数列的第 100 项.

(2)设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d,

$$\therefore\ \begin{cases}a_1+4d=10,\\ a_1+11d=31,\end{cases}$$

解得 $a_1=-2, d=3$，则 $a_n=3n-5$.

(3)解法一：设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d,

$$\text{则有}\begin{cases}a_p=a_1+(p-1)d=q, & ①\\ a_q=a_1+(q-1)d=p, & ②\end{cases}$$

①－②，得 $(p-q)d=q-p$.

$\because\ p\neq q$，$\therefore\ d=-1$，代入①得，

$a_1=p+q-1$.

因此 $a_{p+q}=a_1+(p+q-1)d=0$.

解法二：$\because\ a_p=a_q+(p-q)d, a_p=q$,

$\therefore\ q=p+(p-q)d$，即 $q-p=(p-q)d$,

$\therefore\ d=-1$，因此 $a_{p+q}=a_p+[(p+q)-p]d=q+q(-1)=0$.

解法三：因为 $a_n=a_m+(n-m)d$,

所以 $\dfrac{a_n-a_m}{n-m}=d(n\neq m)$.

所以 $\dfrac{a_{p+q}-a_p}{(p+q)-p}=\dfrac{a_p-a_q}{p-q}=d$，即：

$\dfrac{a_{p+q}-q}{q}=\dfrac{q-p}{p-q}=-1$,

所以 $a_{p+q}-q=-q$，即 $a_{p+q}=0$.

【解后反思】等差数列的通项公式不仅要会熟练地直接运用，而且要能灵活地运用；等差数列是一类特殊的一次函数，我们要注意函数与方程思想的运用.

2. (1)在等差数列$\{a_n\}$中，d 为公差，若 $m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$，且 $m+n=p+q$. 求证：① $a_m+a_n=a_p+a_q$；
② $a_p=a_q+(p-q)d$.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_1+a_6=9, a_4=7$，求 a_3, a_9.

(3)在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_5=6, a_8=15$，求 a_{14}；

【例3】已知 a,b,c 依次成等差数列,它们的和为33,又 $\lg(a-1),\lg(b-5),\lg(c-6)$ 也成等差数列,求 a,b,c 的值.

【思路分析】题目给出了三个条件,可以得到关于 a,b,c 的三个方程,解出即可,或把前两个条件合并为一个条件,减少一个未知量.

【解】设 a,b,c 依次为 $x-d,x,x+d$,则有 $(x-d)+x+(x+d)=33$,所以 $x=11$.

又 $2\lg(b-5)=\lg(a-1)+\lg(c-6)$,

$\lg(11-5)^2=\lg[(11-d-1)\cdot(11+d-6)]$,

$36=(10-d)\cdot(5+d)$,

即 $d^2-5d-14=0$,即 $d=7$ 或 $d=-2$.

所以 a,b,c 依次为4,11,18或13,11,9.

【解后反思】把成等差数列的三个数设为 $x-d,x,x+d$ 是经常采用的一种技巧,这样设的好处是减少一个未知数,常可以减少运算量.

3. 有四个数成等差数列,这四个数的平方和等于94,第一个数与第四个数的积比第二个数与第三个数的积少18,求这四个数.

超越课堂

思维激活训练

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_7=9,a_{13}=-2$,则 a_{25} 等于 ( )
   A. -22 B. -24 C. 60 D. 64
2. 在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=2,2a_{n+1}-2a_n=1$,则 a_{101} 的值为( )
   A. 49 B. 50 C. 51 D. 52
3. 已知 $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},b=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,则 a,b 的等差中项为 ( )
   A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
4. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,则由下列各式所确定的 b_n 组成的数列 $\{b_n\}$ 必为等差数列的是 ( )
   A. $b_n=|a_n|$ B. $b_n={a_n}^2$
   C. $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ D. $b_n=-\dfrac{a_n}{2}$
5. 在1与25之间插入五个数,使其组成等差数列,则这五个数为 ( )
   A. 3、8、13、18、23 B. 4、8、12、16、20
   C. 5、9、13、17、21 D. 6、10、14、18、22
6. 已知等差数列的首项是31. 若此数列从第16项开始小于1,则此数列的公差 d 的取值范围是 ( )
   A. $(-\infty,-2)$ B. $\left[-\dfrac{15}{7},-2\right)$
   C. $(-2,+\infty)$ D. $\left(-\dfrac{15}{7},-2\right)$
7. 若关于 x 的方程 $x^2-x+a=0$ 和 $x^2-x+b=0(a\neq b)$ 的四个根可以组成首项为 $\dfrac{1}{4}$ 的等差数列,则 $a+b$ 的值为 ( )
   A. $\dfrac{3}{8}$ B. $\dfrac{11}{24}$ C. $\dfrac{13}{24}$ D. $\dfrac{31}{72}$
8. 一个直角三角形的三条边成等差数列,则它的最短边与最长边的比为 ( )
   A. 4:5 B. 5:13 C. 3:5 D. 12:13
9. 黑白两种颜色的正六边形地面砖按如图1-2.1-1的规律拼成若干个图案:则第 n 个图案中有白色地面砖的块数是 ( )

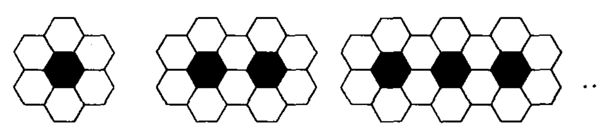


图1-2.1-1

   A. $4n+2$ B. $4n-2$
   C. $2n+4$ D. $3n+3$
10. 数列2,-4,6,-8,…的一个通项公式是________.
11. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_2=4,a_6=8$ 则公差是________.
12. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 依次成等差数列,则 $\cos B=$________.
13. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列,$a_{15}=8,a_{45}=20$,则 $a_{75}=$________.
14. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=20$,那么 a_3 等于________.
15. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=48$,则 $a_6+a_7=$________.
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$ 对任意自然数 n 都成立,且 $a_7=\dfrac{1}{2}$,则 $a_5=$________.
17. -20是不是等差数列0,-3.5,-7,…的项?如果是,是第几项?如果不是,说明理由.

18. 在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_3+a_{12}=60$，$a_6+a_7+a_8=75$，求其通项公式.

19. 等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-5$，它的前11项的平均值为5，若从中抽去一项，余下的10项的平均值为4，求抽去的这一项a_n.

20. 已知数列$\{a_n\}$中：$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$

(1)求证：数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列；

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

能力方法训练

21. (易错题)在等差数列1，7，13，…，$6n-11$，$6n-5$的每两项之间插入2个数，使得新数列仍为等差数列. 问：

(1)原数列的第15项是新数列的第几项？

(2)新数列的第30，31项是不是原数列的项？如果是，它是原数列的第几项？

22. (探究题)已知a、b、c的倒数成等差数列，

求证：$\frac{a}{b+c-a}$，$\frac{b}{c+a-b}$，$\frac{c}{a+b-c}$的倒数也成等差数列.

23. (综合题)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_7+a_{10}=17$，$a_4+a_5+\cdots+a_{14}=77$，

(1)求此数列的通项公式；

(2)若$a_k=13$，求k的值.

24. (综合题)已知等差数列$\{a_n\}$，若$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}$，且$b_1+b_2+b_3=\frac{21}{8}$，$b_1\cdot b_2\cdot b_3=\frac{1}{8}$，求$a_n$.