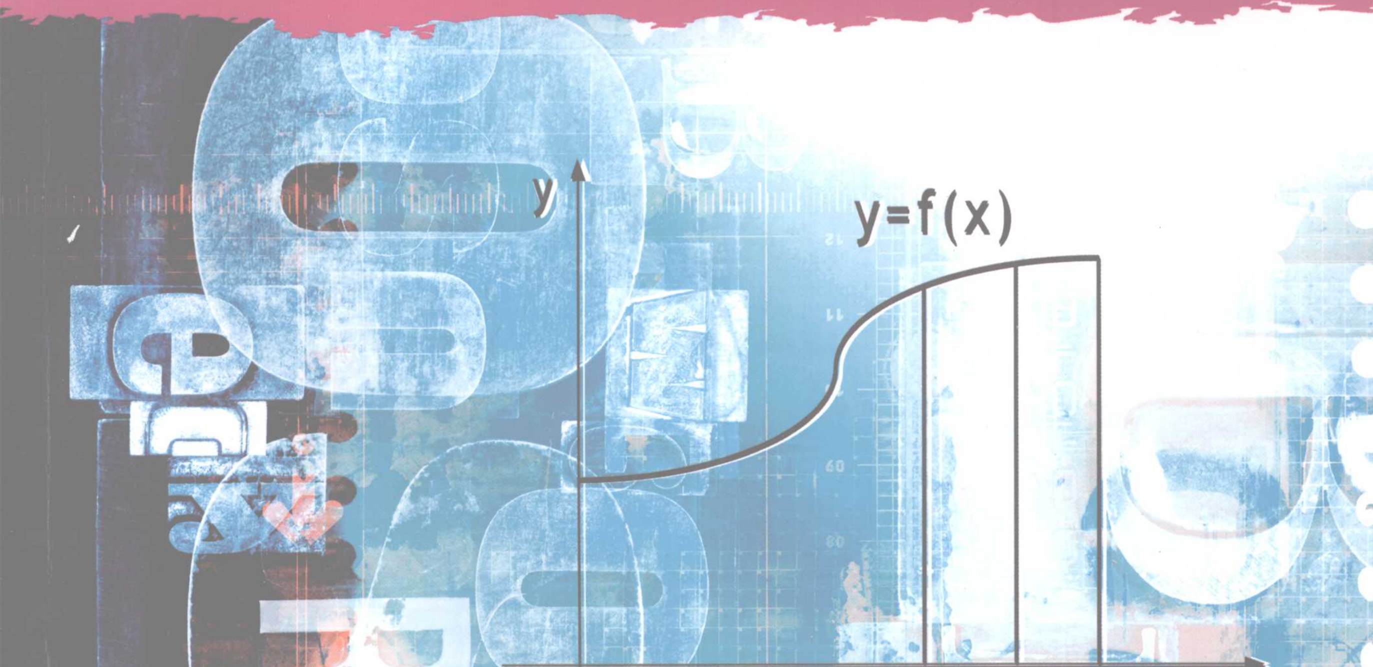
新世纪

新世纪高职高专
基础类课程规划教材

高等数学

（微积分）

新世纪高职高专教材编审委员会组编
主编 叶鸣飞 王 华



大连理工大学出版社

新世纪高职高专基础类课程规划教材

高等数学

(微积分)

新世纪高职高专教材编审委员会组编

主 编 叶鸣飞 王 华

GAODENG SHUXUE

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 微积分 / 叶鸣飞，王华主编. —大连：大连理工大学出版社，2008. 7
新世纪高职高专基础类课程规划教材
ISBN 978-7-5611-4249-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①叶… ②王… Ⅲ. ①高等数学—高等学校：技术学校—教材 ②微积分—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O13 O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 096334 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路 80 号 邮政编码：116023
发行：0411-84708842 邮购：0411-84703636 传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp.cn URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm 印张：10.75 字数：239 千字
2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑：杨 云 责任校对：周双双
封面设计：张 莹

ISBN 978-7-5611-4249-3 定 价：20.00 元

总　　序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代，我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国，高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命，我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里，高等职业教育的迅速崛起，是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里，普通中专教育、普通高专教育全面转轨，以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步，其来势之迅猛，发人深思。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育，还是迅速推进着的培养应用型人才的高职教育，都向我们提出了一个同样的严肃问题：中国的高等教育为谁服务，是为教育发展自身，还是为包括教育在内的大千社会？答案肯定而且惟一，那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会，它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之，教育资源必须按照社会划分的各个专业（行业）领域（岗位群）的需要实施配置，这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题，这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题。

如所周知，整个社会由其发展所需要的不同部门构成，包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门，等等。每一个部门又可作更为具体的划分，直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标，就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命，而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑（在市场经济条件下尤其如此）。可以断言，按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才，是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入，高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应，我们姑且不论。但高等教育走应用型人才培养的道路和走研究型(也是一种特殊应用)人才培养的道路，学生们根据自己的偏好各取所需，始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起，既是高等教育体制变革的结果，也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展，必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育，它从专科层次起步，进而应用本科教育、应用硕士教育、应用博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时，也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说，高等职业教育的崛起，正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高等职业教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程，它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态，直至可以和现存的(同时也正处在变革分化过程中的)研究型人才培养的教育并驾齐驱，还需要假以时日；还需要政府教育主管部门的大力推进，需要人才需求市场的进一步完善发育，尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高职高专教材编审委员会就是由全国100余所高职高专院校和出版单位组成的旨在以推动高职高专教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上，这个联盟始终会以推动高职高专教材的特色建设为己任，始终会从高职高专教学单位实际教学需要出发，以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握，以其纵览全国高职高专教材市场需求的广阔视野，以其创新的理念与创新的运作模式，通过不断深化的教材建设过程，总结高职高专教学成果，探索高职高专教材建设规律。

在微观层面上，我们将充分依托众多高职高专院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势，从每一个专业领域、每一种教材入手，突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制，努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征，在不断构建特色教材建设体系的过程中，逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高职高专教材编审委员会在推进高职高专教材建设事业的过程中，始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与，对此我们谨致深深谢意，也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友，在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中，和我们携手并肩，共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高职高专教材编审委员会

2001年8月18日

前　言

近几年来，由于我国高等职业教育的迅猛发展，对高职院校学生的高等数学的基础要求也在不断更新．各高职学院在大力发展其专业教育的同时，对基础教育本着“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，不断压缩其数学课时，使大部分的高职学院的数学课只保留了高等数学这一门课程．因此，在这样一种大背景下，如何利用仅有的高等数学这门课程，向高职学生尽可能地传授一些后续专业教育有用的数学知识，就成为摆在我们面前的一大课题．为此，我们编写了《高等数学》这套教材，本套教材分为两册：高等数学（微积分）、高等数学（无穷级数、微分方程、线性代数、拉氏变换）．在教材中，我们对传统的高等数学的内容体系作了一些调整，以一元函数微积分为主线，删除了高职学生很少用到的空间解析几何和多元函数微积分学，增加了部分工科学生后续专业教育有用的工程数学（如拉普拉斯变换和线性代数），加强了微分方程和无穷级数的知识，突出了高等数学作为一门“工具”课的特点，体现了数学为专业服务的功能．为增加高职学生对高等数学的学习兴趣，我们在开篇以“闲聊微积分”的方式，介绍了微积分的发展历程，突出了数学教学中的人文性．

本套教材的编写原则是，不追求数学理论的完整性和系统性，突出重要的结论、典型方法的应用，尽可能用一些通俗、直观的语言去描述抽象的数学概念，弥补高职学生数学基础薄弱、逻辑思维能力不强的状况，提高了课程内容的可读性，降低了高职学生学习数学难度，以适应现代高职教育的要求．

参加本书编写的有江西工业职业技术学院的叶鸣飞、王华、沈玲玲、谢素鑫、黎挥宁、涂旭东等老师．全书由叶鸣飞、王华担任主编．

由于成书时间仓促，编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请有关专家、学者以及使用本书的广大同仁批评指正，衷心欢迎大家将教材使用过程中遇到的问题和改进意见反馈给我们，以供修订时参考．

所有意见和建议请发往：gzjckfb@163.com

欢迎访问我们的网站：http://www.dutpgz.cn

联系电话：0411－84707492　84706104

编　者

2008 年 7 月于南昌

目　　录

开篇

同初学者闲聊微积分

微积分学是高等数学的重要组成部分．为此，我们先来聊聊微积分．

从古至今整个数学的发展大体可以分为五个时期：

1. 数学萌芽时期（公元前 600 年以前）；
2. 初等数学时期（公元前 600 年到 17 世纪中叶）；
3. 变量数学时期（17 世纪中叶到 19 世纪 20 年代）；
4. 近代数学时期（19 世纪 20 年代到第二次世界大战）；
5. 现代数学时期（20 世纪 40 年代以来）．

微积分学就创始于变量数学时期，也就是 17 世纪中叶，可以说牛顿和莱布尼茨是微积分学的奠基人，但并非发明者．在漫长的封建社会里，科学的发展也是缓慢的，尤其是这门伴随着资本主义先进生产力的发展而发展起来的微积分学，更是发展迟缓．所以从阿基米德关于微积分的萌芽，到牛顿、莱布尼茨的完成，历时约 1900 年．这是一段到达微积分光辉顶峰的漫长攀登过程．在这一段时间里，人们对阿基米德提供的方法，不断地应用着、争论着、发展着．

提起阿基米德，人们自然会想起中学物理中液体浮力的阿基米德原理．这位古希腊杰出的数学家、发明家、工程师、静力学的奠基人——阿基米德被人们誉为微积分的鼻祖．所以我们聊微积分，应从他的贡献开始．

人类在早期的生产与生活实践中，感到急切需要度量线段的长度，平面图形的面积，物体的体积．现在我们就以度量平面图形的面积为例，看看当时的人们遇到了什么困难．

开始时，人们把边长为一个单位的正方形的面积，作为一个面积单位，就如同用尺子去度量一条长度线段那样，去度量其他的正方形、矩形的面积．比如一个矩形能容纳六个单位正方形，就说此矩形的面积为六个单位．当然，如果矩形的一边长为 a 个单位，另一边长为 b 个单位，那么此矩形就能容纳 $a \cdot b$ 个单位的正方形，这个数值就是此矩形的面积．进而人们又用割补的方法，将平行四边形换成矩形，得出其面积为底与高之积，三角形的面积为底与高之积的一半．对于多边形，可将其分解为三角形之和，仍可求出其面积．一般地说，只要图形的边是直线段，总可以用上述方法得出它的面积．

可是随着生产、科学技术的发展，人们常常需要度量圆、椭圆、抛物弓形等图形的面积．由于这些图形的边（至少一条边）是曲线，尽管人们将单位正方形分成若干小方块，并用这些小方块去度量，但总是不能使直边与曲边重合，因而不能准确得出能容纳多少单位

正方形,也就算不出它的真实面积．这就是人们当时所遇到的困难．然而阿基米德却在总结了前人经验的基础上,对这一问题提出了他自己的方法．

阿基米德把平面图形视为由线段组成,这多少有些使人迷惑不解．在这里,他应用了“不可分量”概念．所谓不可分量当时的意思是这样的:一条直线可以分成若干小线段,小线段又可再分,直至成为点,则不可分,故称点为直线的不可分量;平面图形可分割成相互平行的窄条(面积),窄条又可再分,直至分成线段,则不可分,故称线段为平面图形的不可分量;同样平面是立体图形的不可分量．这种概念来源于原子论:即物质是由不可分的原子(单子)组成．这概念也不是阿基米德发明的,而是由古希腊另外一名伟大的哲学家德莫克里特(Democritus,约公元前 460～前 370)创立的．但应用这种概念使之成为一种方法,并推出一系列新的结果,是阿基米德的首创．他视平面由线段组成,即用直线覆盖平面,克服了矩形不能与曲边图形相吻合的弱点．然而随之又带来了更多需要澄清的问题．比如当时就有人提出:需要多少条线段组成平面?当然不是有限条,但无穷这个概念由于超出直观,又不为人们所接受．此外,它们是怎样组成的?是离散的还是连续的?也无法回答．这些问题直至 19 世纪末才得到满意的解释．所以阿基米德只把它作为预测新结果的手段．不过需要指出的是,阿基米德的许多想法,只有在极限概念引入后才能得到解决．但是他这种处理问题的想法很有道理,给后人的研究指引了方向,在那个时代不失为一项杰出的创举．因而被历代人采用着、改进着,事实上现代积分学就是在此基础上发展起来的．

不过,我们在聊到微积分的发展时,不能不提到牛顿和莱布尼茨这两位伟大的科学家,他们被称为微积分学的奠基人．

牛顿(Newton,I. 1642～1727)是英国人,他的名字几乎人人皆知,他是历史上最杰出的数学家、物理学家,尤其是在经典力学与微积分学上,都取得了奠基性的成就．微积分学就是他在 24 岁时创立的．

莱布尼茨(Leibniz,G. W. 1646～1716)是德国人,开始他是学法律的,也是个哲学家,曾任法学教授、外交官,并不研究数学,直到 26 岁时他还是基本不懂数学,后来只是在朋友的建议下才对数学发生兴趣．当他认准方向后,就大胆创新,在 30 岁之前创立了他的微积分学．

任何人的成就都与他的努力有关,但决定因素还是时代．这两个人所处的时代是资本主义生产力飞速发展的时代．相应地,各门科学也得到很大发展,提出了大量需要解决的数学问题．这时,他们两人各自总结了前人运用无穷小进行计算的大量成果,没有象前人那样拘泥于具体问题的解决,而是力求总结规律,使方法代数化、概念化和逻辑合理化．那么他们是抓住什么问题使之获得成功的呢?他们两人几乎同时看到,切线与求积、路程与速度是完全互逆的两类问题,用的也是两种互逆的运算,以及可在计算时反向应用．抓住了这个核心问题从而得到简单而又普遍适用的微积分法,建立了他们的微积分学．不过要说明的是他们两人是在不同的时间内,在两个不同的国家里,独立完成的．并且研究的手法也有所不同,牛顿把两个变量的无穷小增量作为求流数(即导数)的手段,当增量越小的时候,流数实际上就是两增量比值的极限,而莱布尼茨却直接用了 x 和 y 的无穷小增量或微分,求出它们之间的关系,这个差别反映了牛顿的物理方向和莱布尼茨的哲学

方向．牛顿完全是从考虑变化率的角度出发来解决求变速运动的距离问题，对他来说微分是基础，而莱布尼茨首先想到的是求和，当然这些和仍然是用反微分计算的．从他们的工作方式来看，牛顿是经验的、具体的，而莱布尼茨则是富于想像的．从微积分应用的价值来说，牛顿的工作远远超过了莱布尼茨，刺激并决定了几乎整个十八世纪数学分析的方向，而莱布尼茨更关心的是以运算公式创造出广泛意义下的微积分，并且是微积分现代通行符号的首创者．正是莱布尼茨记法的优越性对于微积分在欧洲大陆的普及作出了很大的贡献，才使得人们看到了这个新工具的巨大威力．

那么牛顿与莱布尼茨究竟谁先完成微积分的呢？这个问题也曾引起英国与欧洲大陆的隔海论战，这场争论使得英国和欧洲大陆的数学家停止了思想交流，几乎在其后的一百年中英国人继续以几何为主要工具，拒绝使用莱布尼茨的符号，致使英国的数学家远远落后于欧洲大陆的数学家．其实在科学史上两个或几个天才同时各自独立地作出同一个发现或发明的事，屡见不鲜，这是因为科学内部逻辑发展的必然性决定了人们认识上的共同性．例如，笛卡尔与费尔马就曾为谁先完成解析几何学，引起过很大争论，而且是亲朋门徒一齐上阵，吵得难解难分．下面就将牛顿和莱布尼茨的这场争论简略的给大家介绍一下．

从研究微积分的时间上看，牛顿是在 1665～1666 年间，而莱布尼茨则是在 1673～1676 年间；然而我们从发表的时间上来看，莱布尼茨要早于牛顿，莱布尼茨是在 1684～1686 年间发表的，而牛顿则是在 1704～1736 年间，因而很难说发明权应属于谁．不过双方的门徒是互不相让．莱布尼茨的拥戴者说，莱布尼茨先发表理应拥有发明权．可是由于在牛顿研究出他的方法而未发表的时候，莱布尼茨曾游历了英国，结交过一些牛顿的友人，这其中就有牛顿的老师巴罗，并得到了巴罗的一本书叫《几何学讲义》，回去后才研究并发表了他的微积分学．这样，牛顿的门徒自然也不客气，攻击莱布尼茨是科学工作的“间谍”，把莱布尼茨的符号也说成是“牵强附会的符号”．而这两位大师好像彼此之间也互不相让，1676 年牛顿发现莱布尼茨正在研究微积分，曾通过他的友人给莱布尼茨写信，信中用谜语的形式谈了他的微积分基本问题——流数．人们猜测，牛顿的企图是为了说明他是首先发明微积分者．1705 年的《教师期刊》上发表了一篇评述牛顿的《求积术》的文章，其中说到，那本书里只不过是把莱布尼茨的微分换成了流数．人们估计这篇文章是出自莱布尼茨的手笔．为此，在英国皇家学会还专门成立了评判牛顿、莱布尼茨优先发明权的委员会，一时喧嚣不止，这场争论对英国的影响比较深，伤害也较大，当时的英国在科学上较为先进，他们对牛顿这位世界著名权威特别崇拜，认为其他人不能与之相比．这种情绪，阻碍了他们认真学习欧洲大陆的成就，以至慢慢落后下来．到后来，微积分的逻辑基础的完成果然不是在英国，而是在欧洲大陆由以法国数学家柯西(Cauchy A. C，1789～1857)为代表的一大批数学家完成的．其各分支的发展也大部分在欧洲大陆．

然而对发明权有没有结论呢？多数人的评论是：他们两人是各自独立地建立了自己的微积分学．除了时间上几乎同时以外，他们的微积分也是各具特点：一个是以流数为基础、一个是以微分为基础；一个是不定积分、一个是定积分．这两种体系直到现在仍然并存．各有各的用处，往往互为补充，缺一不可．牛顿在理论上较严格一些，但由于莱布尼茨善于听取别人的意见，他采用的符号很科学，既表示了概念，又非常利于运用，直到现在

仍在使用.

用历史唯物主义的观点去看微积分的出现,它与任何科学成就一样,都是历史发展的必然,非一、两个人的功绩. 正如牛顿所说,他之所以看得远,是因为他站在了巨人的肩膀上. 一门科学发展到一定阶段,达到成熟,必然会产生出这个人写不出,另一个人也会写出的情况,这从牛顿、莱布尼茨几乎同时发明微积分这点可以看出. 从这种意义上说,一定要分清是谁先发明的,没有多大价值. 不过象牛顿、莱布尼茨这样的科学家,他们不拘泥于前人的成就,而是总结前人的成果,大胆创新,这种精神是可贵的,这也正是我们大家要学习的.

微积分虽然诞生了,但牛顿和莱布尼茨两个人都说不清它的基本原理,这样就引来了一大批的批评者. 大主教贝克莱攻击牛顿的流数"既不是有限量,也不是无穷小量,可也不是虚无,难道可以把它们称为死去的幽灵吗?"(见:贝克莱《致分析者》). 不过也应当承认,贝克莱的这种批评对微积分的发展和完善还是起了一定的作用,为了回答这位神学家的批评,当然更主要的还是由于生产力的发展、社会的需要,使得十八、十九世纪进入一个以微积分为基础的"分析时代".

第一章

函数、极限与连续

数学是研究现实世界中物质及物质之间的数量关系与空间形式的一门科学，数学在我们的生活当中可算是“无处不在，无所不用”. 而高等数学则是以变量为其主要研究对象，变量的主要表现形式就是函数. 所以，本章将在中学数学已有的函数知识的基础上进一步介绍函数的概念、极限与连续性，并着重说明极限这个微积分的重要工具.

1.1 函数及其图形

1.1.1 常量与变量

在许多实际问题中，我们经常会遇到各种各样的量，如长度、温度、重量、体积、时间、路程、速度等等. 在事物的某一变化过程中，如果一个量只能取一个固定的数值，这个量就称为常量；而在事物的某一变化过程中，如果一个量可以取不同的数值，这个量就称为变量. 比如，给一块铁加热，铁块的重量不变，而铁块的温度、体积在变，那么在这一加热过程中，重量就是常量，而温度、体积则是变量.

某一个量是常量还是变量，并不是固定的，要根据具体情况作出具体的分析. 比如，重力加速度，在中学物理中我们把整个地球上的重力加速度都看成是常量，其原因就是我们所考虑问题中的精确度要求不高；如果我们要求的精确度比较高的话，实际上地球不同地点的重力加速度是不同的，那么在整个地球上重力加速度就应该是变量，但在同一地点的重力加速度通常还是可以看成是常量；不过，在有些问题中，如果要考虑到地层总是在运动的话，那么即使是同一地点，不同时间的重力加速度也是在变化的，这样在同一地点的重力加速度也可能是变量.

在数学中，由于主要是讨论各种量在数值上的关系，因此常常要把常量和变量抽象为常数和变数的概念，脱离其实际意义. 这样在某一变化过程中，只能取某一固定数值的数就称为常数，而可以取不同数值的数就称为变数.

对于常数我们通常喜欢用字母表中前面几个英文字母 a,b,c 等来表示，而变数则是习惯用字母表中最后几个英文字母 x、y、z 来表示.

本课程所涉及到的常数与变数，如无特别说明，均属实数范围.

1.1.2 区间与邻域

区间是数学里用得比较多的一类数集，并且在中学大家都已熟知．区间又分有限区间与无限区间(又称无穷区间)、闭区间与开区间、半闭半开区间等等．为此，我们还引进了∞(无穷大)的概念，不过要说明的是∞并不是一个数值，而是一个抽象的概念，$+\infty$(正无穷大)与$-\infty$(负无穷大)只是代表了数轴上实数的两个不同的发展方向．在这里我们要向大家强调的是，有限区间和无限区间不是说区间里所包含的元素有限或无限，而是指该区间的长度有限或无限．

在高等数学的学习中，我们常常要用到一种特殊的开区间，这就是邻域的概念．所谓点 x_0 的 δ 邻域，就是指以 x_0 点为中心，以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，如图 1-1(a)所示，并记为 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

显然对于每一个点 x_0，可以存在无数个以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的邻域. 在 x_0 的 δ 邻域中去掉中心点 x_0 所得两开区间的并 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 称为 x_0 点的去心 δ 邻域．如图 1-1(b)所示，并记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

图 1-1

例如，$U(5,0.02)=\{x \mid |x-5|<0.02\}$ 表示点 5 的 0.02 邻域，也可表示开区间 $(4.98,5.02)$. $\mathring{U}(2,0.15)=\{x \mid 0<|x-2|<0.15\}$ 则表示点 2 的 0.15 去心邻域，它也可以用两个开区间的并来表示，即 $(1.85,2)\cup(2,2.15)$.

要注意的是，在去心邻域的集合表达式中 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$，即邻域内不含点 x_0.

1.1.3 函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时会有好几个变量的变化，并且这些变量并不是孤立地变，而是相互联系并遵循着某一种确定的规律变化．那么对于单个的变量是没有多少好研究的，我们主要还是研究各个变量之间的各种依存关系，这就是函数．下面就两个变量的情形举例说明．

例 1 圆的面积 A 与半径 r 的关系可表示为：

$$A=\pi r^2 \quad r\in(0,+\infty)$$

例 2 物体作自由落体运动时，物体下落的距离 s 随下落的时间 t 的变化而变化．且 s 与 t 的关系为：

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \quad t\in[0,T]$$

其中 g 为重力加速度，T 为物体着陆的时刻．