高等数学学习辅导书

第三版

○主编　李心灿

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学学习辅导书

第三版

主　编　李心灿

副主编　徐　兵　蔡燧林

编　者　（按姓氏笔画为序）

计慕然　刘浩荣　吴　满

杨万禄　金桂堂

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材《高等数学(第三版)》的配套学习辅导书,每章都分为六部分:教学基本要求;重点;典型例题解析(分析讲解典型例题,指出使用计算方法的条件、解题中易出现的错误);部分习题解答;应该明确的几个问题(知识背景、地位、作用及知识结构);思考题分析(引导学生掌握概念的要素、性质特点,分析、诠释教材中的思考题)。本书既是与教学同步的辅导书,又是阶段复习的指导书,有助于帮助学生掌握知识框架、理出知识脉络,培养学生分析问题、解决问题的能力。

本书既适合高职高专院校使用,也可作为专升本考试和成人高校的教材或自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导书/李心灿主编. —3 版. —北京:
高等教育出版社,2008.8
ISBN 978-7-04-024649-0

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学
参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 113283 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 王凌波
责任绘图 尹文军 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 刘 莉
责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京京科印刷有限公司

开 本 787×1092 1/16
印 张 15.5
字 数 350 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版 次 1999 年 9 月第 1 版
2008 年 8 月第 3 版
印 次 2008 年 8 月第 1 次印刷
定 价 21.30 元

物料号 24649-00

前　言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学(第三版)》的配套学习辅导书。

本书按教材章次对应编写。每章所包含的内容及编写意图:“教学基本要求”及“重点”是为了便于学生更主动地去学习;“典型例题解析”是为了有助于学生明确解题的思路、方法及解题时应该注意的有关问题,从而提高解题能力;“部分习题解答”是对教材中部分习题给出求解,有助于学生学习解题规范;“应该明确的几个问题”及“思考题分析”是为了使“无疑者须教有疑,有疑者却教无疑”,有助于学生理出知识脉络与框架,理解、掌握该章的主要概念、理论和方法。

本书既是与教学同步的学习辅导书,又是阶段复习的指导书,也是学生不见面的辅导教师。它有助于学生对“高等数学”这门课程的基本概念、基本理论、基本方法有更全面、深刻地理解和掌握,有利于培养学生分析问题、解决问题的能力。

本书的编辑和出版,自始至终得到了高等教育出版社有关领导的重视,并给予了大力支持和帮助。在此一并致以诚挚谢意。

由于我们水平所限,书中若有不当之处,恳请同仁和读者批评指正。

编　者

2008年6月

目　　录

第一章　函　数

一、教学基本要求

1. 掌握函数的概念，了解分段函数.

2. 知道函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性，会用定义判断函数的奇偶性.

3. 理解反函数与复合函数的概念，知道反函数的定义域和值域与直接函数的值域和定义域的关系，会将初等函数分解成基本初等函数的复合或(和)经四则运算的复合.

4. 熟悉基本初等函数的性质及图形.

5. 会建立简单实际问题中的函数关系.

二、重点

函数的定义，基本初等函数和初等函数的概念.

三、典型例题解析

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}+\sqrt{5-x}$；　　(2) $g(x)=\arccos \mathrm{e}^{x-1}$；

(3) $h(x)=\sqrt{\ln(\sin x)}$；　　(4) $k(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$.

解析　求初等函数的定义域，要考虑以下几点：

① 分母不能为零；

② 负数不能开偶次方；

③ 对数的真数不能为零，也不能为负；

④ $\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$；

⑤ 如果该函数为几个因式(或项)的积(或和)，则其定义域为这些因式(或项)的定义域的交；

⑥ 求复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域，应先求出外层函数 $f(u)$ 的定义域 D_f，以它限制内层函数 $\varphi(x)$ 的取值范围 $\varphi(x)\in D_f$，再求出 $\varphi(x)$ 中 x 的取值范围，即得复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定

义域. 如果复合的层数多,例如 $y=f(\varphi(g(x)))$,应如上应用由外向内,层层往里剥的办法.

解 (1) $\sqrt{x-1}$的定义域为 $[1,+\infty)$;$\dfrac{1}{x^2-4}$的定义域为$\{x\mid x\neq\pm 2\}$,即$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$; $\sqrt{5-x}$的定义域为$(-\infty,5]$. 在数轴上画出各区间,取其交便得 $f(x)$的定义域为$[1,2)\cup(2,5]$.

(2) 将 $\arccos \mathrm{e}^{x-1}$分解成

$$g=\arccos u,\quad u=\mathrm{e}^v,\quad v=x-1.$$

由外层函数知,u 应满足

$$-1\leqslant u\leqslant 1,$$

从而

$$-1\leqslant \mathrm{e}^v\leqslant 1.$$

上述不等式左边总是成立的,而由右边推知

$$v\leqslant 0.$$

再由 $v=x-1$ 推知 $x-1\leqslant 0$ 即 $x\leqslant 1$,此为函数 $g(x)=\arccos \mathrm{e}^{x-1}$的定义域.

(3) 由 $h(x)$的表达式知,$\sqrt{\ln(\sin x)}$应满足

$$\ln(\sin x)\geqslant 0,$$

由此知 $\sin x$ 应满足

$$\sin x\geqslant 1.$$

但 $\sin x\leqslant 1$,所以由上式知 x 应满足 $\sin x=1$,即

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{2},\quad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

此即为 $h(x)$的定义域.

由此例可见,初等函数的定义域可以是一些孤立的点.

(4) 由分母不为零知 $\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}\neq 1$,即$\dfrac{x}{x-1}\neq 0$,亦即 $x\neq 0$. 又由$\dfrac{x}{x-1}$的分母不为零知 $x\neq 1$. 因此 $k(x)$的定义域为 $x\neq 0,x\neq 1$,即$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

例 2 (1) 已知 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,求 $f(\ln(x+1))$的定义域;

(2) 已知 $f(\mathrm{e}^x)$的定义域为$(-1,1)$,求 $f(x)$的定义域;

(3) 已知 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,并设 $a>0$ 为常数,求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域.

解析 本题的(1)、(2)仿例 1 中求复合函数的定义域的办法讨论;本题的(3)除了按复合函数求定义域的方法外,还要考虑 $f(x+a)$与 $f(x-a)$的定义域的交.

解 (1) 记 $g(x)=f(u)$,$u=\ln(x+1)$. 由外层函数 $f(u)$的定义域 $0\leqslant u\leqslant 1$,它限制了内层函数 $u=\ln(x+1)$的取值范围:

$$0\leqslant \ln(x+1)\leqslant 1,$$

即

$$\mathrm{e}^0\leqslant x+1\leqslant \mathrm{e}^1,$$

即

$$0 \leqslant x \leqslant e-1.$$

故 $g(x)=f(\ln(x+1))$ 的定义域为 $[0,e-1]$.

(2) 由 $f(e^x)$ 的定义域为 $-1<x<1$，记 $u=e^x$，从而知 $f(u)$ 的定义域为 $e^{-1}<u<e^1$. 于是知 $f(x)$ 的定义域为 $e^{-1}<x<e$.

(3) 由 $f(x)$ 的定义域为 $0 \leqslant x \leqslant 1$，从而知 $f(x+a)$ 的定义域为 $0 \leqslant x+a \leqslant 1$，即 $-a \leqslant x \leqslant 1-a$；$f(x-a)$ 的定义域为 $0 \leqslant x-a \leqslant 1$，即 $a \leqslant x \leqslant 1+a$.

函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为上述两个定义域的交. 讨论如下：

如果 $1-a<a$，即 $a>\frac{1}{2}$，则 $[-a,1-a]\cap[a,1+a]=\varnothing$，$f(x+a)+f(x-a)$ 无定义；

如果 $1-a \geqslant a$，即 $a \leqslant \frac{1}{2}$，则 $[-a,1-a]\cap[a,1+a]=[a,1-a]$，$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a,1-a]$.

说明 例 2 中已知某定义域求另一与此有关的函数的定义域的方法，可以称为变量变换法. 作一个适当的变量变换（由题可见应作什么样的变量变换），将已知的定义域转化为欲求的定义域.

例 3 下列各题中，各函数对是否为同一函数？

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x}$；　(2) $f(x)=\sqrt[4]{x^2}$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$；

(3) $f(x)=x$ 与 $g(x)=x\operatorname{sgn} x$；　(4) $f(x)=\ln|x|$ 与 $g(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$.

解析 当且仅当两个函数的定义域相同并且对应规则相同时，这两个函数为同一函数.

解 (1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，在定义域内 $f(x)=\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{x^3x}=x\sqrt[3]{x}=g(x)$. 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$. 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一函数.

(3) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$. 但是当 $x<0$ 时 $g(x)=x(-1)=-x$，而 $f(x)=x$，两者的对应关系不一样，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数.

(4) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 又

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln x^2=\ln(x^2)^{\frac{1}{2}}=\ln|x|=f(x),$$

所以 $f(x)=g(x)$（当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$）.

例 4 (1) 设 $f(x+2)=x^2+x+1$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f(e^x+e^{-x})=e^{2x}+e^{-2x}+1$，求 $f(x)$.

解析 这类题实际上就是已知复合函数 $f(\varphi(x))$ 的表达式，求 $f(x)$ 的表达式. 解决的办法是作变换，令 $\varphi(x)=u$，代入 $f(\varphi(x))$ 表达式的左、右两边. 左边为 $f(u)$，再从 $u=\varphi(x)$ 中解出 $x=\psi(u)$，代入原 $f(\varphi(x))$ 的表达式的右边，便得 $f(u)$ 的表达式，最后将自变量的记号写成 x，便

得 $f(x)$的表达式.

但是从 $u=\varphi(x)$中解出 $x=\psi(u)$并非易事. 例如本题(2),有一定技巧,请看下面解法.

解 (1) 令 $u=x+2$,有 $x=u-2$. 代入 $f(x+2)$的表达式的左、右两边,得

$$f(u)=(u-2)^2+(u-2)+1=u^2-3u+3,$$

即

$$f(x)=x^2-3x+3.$$

(2) 令 $u=e^x+e^{-x}$,于是 $u^2=(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+2+e^{-2x}$,代入 $f(e^x+e^{-x})=e^{2x}+e^{-2x}+1$ 的左、右两边,得

$$f(u)=u^2-2+1=u^2-1,$$

所以 $f(x)=x^2-1$.

例 5 (1) 讨论 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$的奇偶性;

(2) 设 $\varphi(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,$\psi(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的偶函数,讨论函数 $\psi(\varphi(x))$的奇偶性.

解析 函数的奇偶性一般按定义讨论.

解 (1) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且 $f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^x)=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数.

(2) $\psi(\varphi(-x))=\psi(-\varphi(x))=\psi(\varphi(x))$,所以 $\psi(\varphi(x))$为偶函数.

例 6 求下列函数的周期:

(1) $f(x)=\sin\left(5x-\frac{\pi}{7}\right)$; (2) $g(x)=\sin\frac{x}{2}-7\cos\frac{x}{3}$;

(3) $h(x)=\sin x\cos 3x$; (4) $k(x)=\tan\frac{x}{2}$.

解析 求三角函数的周期,可以利用已知周期的一些结论. 例如 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的周期都是 2π,$\tan x$ 与 $\cot x$ 的周期都是 π,$A\sin(\omega t+\varphi)$(A,ω,φ 均为常数,$A\neq0,\omega>0$)的周期为$\frac{2\pi}{\omega}$(见教材§1.5 例 4).

对于一般的周期函数,设 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上以 T 为周期的周期函数,a,b 是常数且 $a>0$,则函数 $f(ax+b)$的周期是$\frac{T}{a}$. 证明如下:

记

$$F(x)=f(ax+b),$$

则

$$F\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+b+T).$$

由于 $f(x)$以 T 为周期,因此对于任意 t,有

$$f(t+T)=f(t),$$

从而 $f(ax+b+T)=f(ax+b)=F(x)$，所以 $F\left(x+\dfrac{T}{a}\right)=F(x)$. 故知 $F(x)=f(ax+b)$ 以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期.

如果某函数可以分解成两个函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 之和，设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 分别以 T_1 与 T_2 为周期，并且如果存在 T_1,T_2 的(正整数倍的)最小公倍数 T，则函数 $f_1(x)+f_2(x)$ 以 T 为周期，其证明从略.

由以上这些结论，可讨论本题的周期.

解 (1) 对照以上分析，$\omega=5$，故 $f(x)$ 以 $\dfrac{2\pi}{5}$ 为周期.

(2) $\sin\dfrac{x}{2}$ 以 4π 为周期，$\cos\dfrac{x}{3}$ 以 6π 为周期，4π 与 6π 的最小公倍数为 12π，故 $g(x)$ 以 12π 为周期.

(3) 由三角公式，

$$h(x)=\sin x\cos 3x=\frac{1}{2}(\sin 4x-\sin 2x).$$

$\sin 4x$ 的周期是 $\dfrac{\pi}{2}$，$\sin 2x$ 的周期是 π，所以 $h(x)$ 的周期是 π.

(4) $\tan x$ 的周期是 π，所以 $\tan\dfrac{x}{2}$ 的周期是 2π.

例 7 求下列函数的反函数及其定义域：

(1) $y=ax+b$(a,b 是常数，$a\neq 0$)；

(2) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$x\geqslant 0$；

(3) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

解析 求 $y=f(x)$ 的反函数涉及以下几个问题：

① 反函数的存在性. 在本章思考题分析的思考题 2 中会说到这个问题，不过超出了本书要求，读者只要知道就可以了.

② 如何求 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$. 原则上讲就是从 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$. 但有一些技术问题.

③ 求反函数的定义域. 反函数的定义域就是直接函数的值域，有时恰恰是要由直接函数的值域来确定反函数的定义域，而直接函数的值域又不一定好求，这又是一个技术问题.

不过本例的三个小题都十分简单，请看具体解法.

解 (1) 由 $y=ax+b$，移项解出 x 便得反函数：

$$x=\frac{1}{a}(y-b),$$

或改写为 $y=\dfrac{1}{a}(x-b)$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$ 及基本不等式，有

$$y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}=1,$$

再由 $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$ 得

$$\mathrm{e}^{2x}-2y\mathrm{e}^x+1=0 \qquad (y\geqslant 1).$$

将上式看成 e^x 的二次方程，解出

$$\mathrm{e}^x=y\pm\sqrt{y^2-1} \qquad (y\geqslant 1),$$

$$x=\ln(y\pm\sqrt{y^2-1}) \qquad (y\geqslant 1).$$

当"±"号中取"－"号时，

$$x=\ln(y-\sqrt{y^2-1})=\ln\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}$$

$$=-\ln(y+\sqrt{y^2-1})\leqslant 0 \qquad (\text{当 } y\geqslant 1 \text{ 时}),$$

舍之，所以 $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\ (x\geqslant 0)$ 的反函数为

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2-1}) \qquad (y\geqslant 1).$$

改换记号，得到反函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，定义域为 $x\geqslant 1$.

(3) 由 $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 有

$$\mathrm{e}^y=\frac{1-x}{1+x} \qquad (-1<x<1),$$

解出

$$x=\frac{1-\mathrm{e}^y}{1+\mathrm{e}^y} \qquad (-\infty<y<+\infty).$$

改换 x 与 y 的记号，得反函数

$$y=\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

例 8 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的偶函数，若 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内严格单调减少，证明 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内严格单调增加.

解析 讨论函数的单调性，一种方法是按定义，另一种方法，也是微积分课程中的主要方法，利用导数，这要到第三章中再讲.

解 设 $x_1<x_2$，且 $x_1\in(0,l)$，$x_2\in(0,l)$，因此，$-x_1>-x_2$，$-x_1\in(-l,0)$，$-x_2\in(-l,0)$，由于 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内严格单调减少，所以

$$f(-x_1)<f(-x_2).$$

又由于 $f(x)$ 为偶函数，所以

$$f(x_1)-f(x_2)=f(-x_1)-f(-x_2)<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故知 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内严格单调增加.

例 9 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内均有界，证明 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$ 在 (a,b) 内均有界.

解析 一般讨论函数的有界性的问题，没有一个很好的方法，也不是本书的要求. 本题主要利用绝对值不等式的性质来讨论.

解 由题设，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 内有界，即存在常数 $M_1>0$ 与 $M_2>0$，对于任意 $x\in(a,b)$，均有

$$|f(x)|\leqslant M_1,\quad |g(x)|\leqslant M_2.$$

由绝对值不等式的性质，有

$$|f(x)\pm g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\leqslant M_1+M_2.$$

记 $M=M_1+M_2$，于是知存在 $M>0$，使对一切 $x\in(a,b)$ 有 $|f(x)\pm g(x)|\leqslant M$. 所以 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)-g(x)$ 在 (a,b) 内有界.

类似地，可证 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 内有界.

说明 由所给条件，即使再添上条件：当 $x\in(a,b)$ 时 $g(x)\neq0$，也无法证明 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 (a,b) 内有界. 例如，在区间 $(0,1)$ 内，$f(x)=x$ 有 $|x|\leqslant1$；$g(x)=x^2$ 有 $|x^2|\leqslant1$，且 $g(x)=x^2\neq0$. 但 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界（见教材 §1.3 最后）.

四、部分习题解答

习题 1.1

(4) 用区间或区间的并表示 $|x-1|>2$.

解 由实数的绝对值性质(7)，

$$|x-1|>2 \Leftrightarrow x-1<-2 \text{ 或 } x-1>2,$$

即 $x<-1$ 或 $x>3$，写成集合的并，可表示为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域：

(4) $y=\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$；　　(5) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；

(7) $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

解 (4) 定义域为 $2-x\geqslant0$ 与 $1+x>0$ 的交，即 $-1<x\leqslant2$.

(5) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+2}}=\dfrac{x-2}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$，定义域为 $x>2$ 或 $x<1$，即 $(2,+\infty)\cup(-\infty,1)$.

(7) $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$，定义域为 $x\leqslant 1$ 与 $x>2$ 的交为空集.

2. 在下列各题中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否表示同一函数？为什么？

(2) $f(x)=x\sqrt[3]{x}, g(x)=\sqrt[3]{x^4}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}, g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$.

解 (2) 定义域都是$(-\infty,+\infty)$. $g(x)=\sqrt[3]{x^4}=\sqrt[3]{x\cdot x^3}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^3}=x\sqrt[3]{x}=f(x)$. $f(x)$ 和 $g(x)$ 为同一函数.

(3) $f(x)$ 的定义域由 $x^2-3x+2>0$ 确定，故知定义域为$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

$g(x)$ 的定义域由$\dfrac{x-1}{x-2}\geqslant 0$ 且 $x\neq 2$ 确定，故知定义域为$(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$. 两者定义域不一样，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一个函数.

4. 有一块边长为 l 的正方形铁皮，在它的四角各剪去相等的小正方形，折叠后作成一个无盖的盒子，求这个盒子的容积 V 与被剪去的小正方形边长 x 之间的函数关系.

图 1.1

解 如图 1.1，盒子底为正方形，边长为 $l-2x$，高为 x，所以

$$V=(l-2x)^2x,\quad 0<x<\frac{l}{2}.$$

习题 1.3

2. 指出下列函数的单调性及单调区间：

(2) $g(x)=(x+1)^2$； (3) $h(x)=-x^3+2$.

解 (2) **解法 1** 曲线 $y=g(x)=(x+1)^2$ 是以点$(-1,0)$为顶点、开口向上的抛物线，故知在区间$(-\infty,-1]$上 $g(x)$ 严格单调减少. 在区间$[0,+\infty)$上 $g(x)$ 严格单调增加.

解法 2 设 $x_1<x_2\leqslant -1$, $g(x_1)-g(x_2)=(x_1+1)^2-(x_2+1)^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)>0$，所以在区间$(-\infty,-1]$上 $g(x)$ 严格单调减少.

设$-1\leqslant x_1<x_2$, $g(x_1)-g(x_2)<0$，所以在区间$[-1,+\infty)$上 $g(x)$ 严格单调增加.

可见用定义判断单调性有一定的难度.

(3) **解法 1** 曲线 $y=h(x)=-x^3+2$ 如图 1.2，曲线 $y=-x^3+2$在$(-\infty,+\infty)$内严格单调减少.

解法 2 设 $x_1<x_2$，则

$$h(x_1)-h(x_2)=-x_1^3+2-(-x_2^3+2)=x_2^3-x_1^3$$
$$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2).$$

因 $x_2-x_1>0$, $x_2^2+x_1x_2+x_1^2$ 的判别式为负，故它必为正，从而 $h(x_1)-h(x_2)>0$，即 $h(x)$ 严格单调减少.

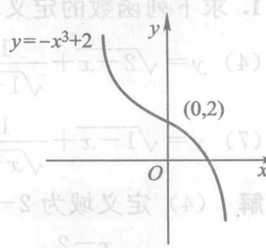

图 1.2

习题 1.4

写出下列函数的定义域，并求其反函数及定义域：

(2) $y=-\sqrt{x+1}$.

解 由 $x+1\geqslant 0$ 得 $x\geqslant -1$，故其定义域为 $x\geqslant -1$. 将 $y=-\sqrt{x+1}$ 两边平方得 $x=y^2-1$ $(y\leqslant 0)$. 改写记号，得 $y=-\sqrt{x+1}$ 的反函数 $y=x^2-1$，定义域为 $x\leqslant 0$.

习题 1.5

1. 下列函数哪些是初等函数，哪些不是初等函数：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$； (2) $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3}, & \text{当 } x\neq -3,\\ 0, & \text{当 } x=-3.\end{cases}$ (4) $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3}, & \text{当 } x\neq -3,\\ -6, & \text{当 } x=-3.\end{cases}$

解 (1) 根据初等函数定义，它是初等函数，定义域为 $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$.

(2) 根据初等函数定义，它是初等函数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(3) $h(x)=\begin{cases}x-3, & \text{当 } x\neq -3,\\ 0, & \text{当 } x=-3,\end{cases}$ 根据初等函数定义，它不是初等函数，因为它不能由一个式子表示.

(4) $\varphi(x)=\begin{cases}x-3, & \text{当 } x\neq -3,\\ -6, & \text{当 } x=-3,\end{cases}$ 也可写成 $\varphi(x)=x-3, x\in(-\infty,+\infty)$，所以 $\varphi(x)$ 是初等函数.

3. 下列函数是由哪些基本初等函数复合或经四则运算并复合而成的，并求复合函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\arcsin(x+2)}$； (4) $y=\sqrt{\sin \mathrm{e}^x}$.

解 (1) $y=\sqrt{u}, u=\arcsin v, v=x+2$. 为求定义域，由最外层 $y=\sqrt{u}$ 知 $0\leqslant u<+\infty$，于是限制了

$$0\leqslant \arcsin v<+\infty .$$

但 $\arcsin v$ 本身只能在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，所以

$$0\leqslant \arcsin v\leqslant \frac{\pi}{2}.$$

从而 $0\leqslant v\leqslant 1$. 以此限制了最内层 $x+2$ 的范围：

$$0\leqslant x+2\leqslant 1,$$

故得该复合函数的定义域为 $-2\leqslant x\leqslant -1$.

(4) $y=\sqrt{u}, u=\sin v, v=\mathrm{e}^x$. 为求定义域，由最外层 $y=\sqrt{u}$ 知 $0\leqslant u<+\infty$，于是限制了

$$0 \leqslant \sin v < +\infty.$$

但 $\sin v$ 本身只能在 $[-1,1]$ 上，所以

$$0 \leqslant \sin v \leqslant 1.$$

从而 v 的范围为满足 $2n\pi \leqslant v \leqslant (2n+1)\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的并集.

于是限制了 x 的范围为使 e^x 满足 $2n\pi \leqslant e^x \leqslant (2n+1)\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的并集. 当 n 取 $-1,-2,\cdots$ 时，上式显然不成立；当 $n=0$ 时，x 应满足

$$-\infty < x \leqslant \ln \pi.$$

当 $n=1,2,\cdots$ 时，x 应满足

$$\ln 2n\pi \leqslant x \leqslant \ln(2n+1)\pi.$$

于是该复合函数的定义域为 $(-\infty,\ln\pi]$ 与 $[\ln 2n\pi,\ln(2n+1)\pi]\,(n=1,2,\cdots)$ 的并集.

4. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$； (2) $\varphi(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

解 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，是个对称区间. 又

$$f(-x)=\ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right|=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2) $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是个对称区间. 又

$$\varphi(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\varphi(x),$$

所以 $\varphi(x)$ 为奇函数.

5. 指出下列函数的周期：

(2) $y=\cos^2 x$； (3) $y=\sin 2x+4\sin 3x$； (4) $y=|\sin x|$.

解 (2) $y=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$，而 $\cos 2x$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，所以 $\cos^2 x$ 的周期为 π.

(3) $\sin 2x$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，$\sin 3x$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$. π 与 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数为 2π，所以 $y=\sin 2x+4\sin 3x$ 的周期为 2π.

(4) $y=|\sin x|=\sqrt{\sin^2 x}=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x}$，而 $\cos 2x$ 的周期为 π，所以 $y=|\sin x|$ 的周期为 π.

6. 在温度计上，0 ℃对应 32 ℉（表示华氏温标），并且在常压下水的沸点为 212 ℉，华氏与摄氏温标之间的关系为一次式，求摄氏温标与华氏温标间的函数关系.

解 设 F 与 C 之间的关系式为 $C=aF+b$. 当 $F=32$ 时，$C=0$；当 $F=212$ 时，$C=100$. 代入得

$$0=32a+b, \qquad 100=212a+b.$$

解之得 $a=\dfrac{5}{9}$，$b=-\dfrac{160}{9}$，所以 F 与 C 的关系为 $C=\dfrac{5}{9}F-\dfrac{160}{9}$.

复习题一

基 本 题

(一) 选择题

2. 已知 $f(x)$的定义域为$(0,1)$,则 $f(e^x)$的定义域为(　　).

A. $(-\infty,0)$　　B. $(1,e)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,e)$

解　应选 A. 将 $f(e^x)$看成一个复合函数 $f(u)$,$u=e^x$. 而已知 $f(u)$的定义域为 $0<u<1$,从而 $0<e^x<1$. 于是 $-\infty<x<0$. 故选 A.

4. 下列函数对中,为同一个函数的是(　　).

A. $f(x)=x|x|,g(x)=\sqrt{x^4}$　　B. $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$

C. $f(x)=\cos x,g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$　　D. $f(x)=|x|,g(x)=x\operatorname{sgn} x$

解　应选 D. $f(x)$与 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$. 并且当 $x>0$ 时 $g(x)=x$;$x=0$ 时 $g(x)=0$;$x<0$ 时$g(x)=-x$. 合并之,为 $g(x)=|x|=f(x)$. 故选 D.

至于 A,因 $g(x)\geqslant 0$,而 $f(x)$可能取负,故 $f(x)$与 $g(x)$不是同一函数. 对于 B,$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. 对于 C,$g(x)\geqslant 0$,而 $f(x)$可以取到负值. 故 A、B、C 均不对.

6. 在区间$(0,\pi)$上严格单调增加的函数是(　　).

A. $f(x)=\sin x$　　B. $g(x)=\cos x$　　C. $h(x)=\tan x$　　D. $k(x)=\cot(\pi-x)$

解　应选 D. 因为 $k(x)=\cot(\pi-x)=-\cot x$,由 $\cot x$ 在$(0,\pi)$上的图形知,函数 $k(x)$在$(0,\pi)$内为严格单调增加函数. 故选 D.

$f(x)$在$(0,\pi)$内不单调,$g(x)$在$(0,\pi)$内严格单调减少,$h(x)$在$(0,\pi)$内不单调.

(二) 填空题

2. $y=\arcsin\left(e^x+\frac{1}{2}\right)$的定义域为__________.

解　应填$(-\infty,-\ln 2]$.

将 $y=\arcsin\left(e^x+\frac{1}{2}\right)$分解为

$$y=\arcsin u,\quad u=e^x+\frac{1}{2},$$

$y=\arcsin u$ 的定义域为$-1\leqslant u\leqslant 1$. 以此限制了

$$-1\leqslant e^x+\frac{1}{2}\leqslant 1,$$

即

$$-\frac{3}{2}\leqslant e^x\leqslant\frac{1}{2}.$$

但 $e^x>0$，所以 $0<e^x\leqslant\frac{1}{2}$，从而知 x 应满足

$$-\infty<x\leqslant\ln\frac{1}{2}=-\ln 2.$$

故应填$(-\infty,-\ln 2]$.

3. $y=\sin x^2\left(0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$的反函数为________，反函数的定义域为________.

解 应填反函数为 $y=\sqrt{\arcsin x}$，反函数的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 1$.

记 $x^2=u$，于是 $y=\sin x^2=\sin u,0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}$，从而

$$u=\arcsin y,\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

由于 $u=x^2,0\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，所以

$$x=\sqrt{\arcsin y};\quad 0\leqslant y\leqslant 1.$$

改变记号，于是得 $y=\sin x^2$ 的反函数为

$$y=\sqrt{\arcsin x},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

4. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数为________.

解 应填 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

解法 1 由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$有

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1}.$$

移项，两边平方得

$$e^{2y}-2xe^y+x^2=x^2+1,$$

解出

$$x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y}).$$

改换记号，得 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}).$$

解法 2 由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$有

$$\begin{aligned}y&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}{-x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\ln\frac{1}{-x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(-x+\sqrt{x^2+1}).\end{aligned}$$

于是有

$$e^y=x+\sqrt{x^2+1}$$