现代数学基础

4 高等概率论及其应用

胡迪鹤 著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

4

高等概率论及其应用

■ 胡迪鹤 著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是在初等概率论、测度论和泛函分析初步的基础上展开的。全书共分三大部分：一、高等概率的基本概念与工具，诸如随机元（含特例随机变量）及其分布，随机元的特征泛函，各种收敛性（含依概率收敛、概率为1地收敛、L^p收敛、完全收敛、淡收敛、局部弱收敛及弱收敛等）；二、概率极限理论，包括大数定律，中心极限定理，重对数律，不变原理，无穷可分律的理论及其应用等；三、随机过程论，包括可数状态离散时间的马尔可夫链，可数状态连续时间的马尔可夫过程，随机环境中马尔可夫链，鞅论等。在每章的最后，附有习题与应用。

本书是研究生的教学用书，也可供概率论的理论研究工作者、概率论与数理统计的应用研究工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等概率论及其应用 / 胡迪鹤著. —北京：高等教育出版社，2008.6

ISBN 978-7-04-022617-1

Ⅰ.高… Ⅱ.胡… Ⅲ.概率论 Ⅳ.O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 041784 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京奥鑫印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2008年6月第1版
印　　张	29.25	**印　　次**	2008年6月第1次印刷
字　　数	550 000	**定　　价**	59.00元

物料号　22617-00

前　言

本书是基于初等概率论、测度论和泛函分析初步而创作的。全书共分三大部分: 一、高等概率论的基本概念和工具, 诸如随机元及其分布, 随机元的特征泛函, 概率收敛, 概率为 1 地收敛, L^p 收敛, 完全收敛, 淡收敛, 局部弱收敛, 弱收敛等。二、概率极限理论, 包括大数定律, 中心极限定理, 重对数律, 不变原理, 无穷可分律的理论及应用等。三、随机过程论, 包括可数状态离散时间的 Markov 链, 可数状态连续时间的 Markov 过程, 随机环境中的 Markov 链, 鞅论等。

本书的创作意图: 为硕士研究生和博士研究生提供教材参考书; 为涉及概率论的理论研究工作者和概率论与数理统计的应用研究工作者及将来有志于概率论与数理统计的学者提供一本参考书。作为硕士研究生的教材, 书中标有星号的章、节可略去不讲, 因为本书想照顾更多读者, 篇幅较大。

本书每章最后, 均附有习题及应用供教师及读者参考。书前附有常用符号表以备查用。

本书内容涉及面广, 体系繁复, 不妥之处, 包括取材、体系安排、表述及论证, 请读者不吝指教。

感谢国家自然科学基金委员会的资助 (项目批准号为: 10371092 和 10771185)。

作者　胡迪鹤

2007 年 7 月

常用符号表

$\mathbf{R}^d$: 表示 d 维欧氏空间, $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1, \mathbf{R}_+=[0,\infty)$.

$\mathscr{B}(\mathscr{G})$: 表示拓扑空间 $\mathscr{G}$ 中的 Borel σ 代数, 即 $\mathscr{G}$ 中一切开集所产生的 σ 代数.

$\mathscr{B}^d \triangleq \mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$: 表示 $\mathbf{R}^d$ 中一切开集所产生的 σ 代数, 即 Borel σ 代数.

$b\mathscr{B}^d$: 表示一切有界 $\mathscr{B}^d$ 可测的实值函数.

$C([0,1])$: 表示 $[0,1]$ 上的一切实值连续函数.

$f \in \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$: 表示 f 关于 σ 代数 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ 可测, 即 $f^{-1}(\mathscr{F}_2) \subset \mathscr{F}_1$. 特别地, $f \in \mathscr{F}_1$ 表示 $f^{-1}(\mathscr{B}^1) \subset \mathscr{F}_1$.

$a \wedge b$: 表示取 a 与 b 中最小者, 即 $a \wedge b = \min(a,b)$.

$a \vee b$: 表示取 a 与 b 中最大者, 即 $a \vee b = \max(a,b)$.

$\mathbf{Z}$: (如不特别声明) 表示整数集, $\mathbf{Z}_+$ 表示非负整数集.

$\boldsymbol{E}$ (斜黑体): 表示期望算子.

var: 表示方差.

cov: 表示协方差.

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$: 表示概率空间.

$\bigvee\limits_{n\geqslant 0} \mathscr{F}_n$: 表示 σ 代数列 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 取并后以它 (未必是 σ 代数) 所产生成的 σ 代数.

设 $X=\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是一实值随机过程, 则 $\|X_n\|^p$: 表示 X_n 的 L^p 范数, 即 $\boldsymbol{E}(|X_n|^p)$; $\|X\|^p$ 表示 $\sup\limits_{n\geqslant 0} \boldsymbol{E}(|X_n|^p)$.

R. V. : 表示随机变量.

d. f. : 表示分布函数.

d′. f. : 表示准分布函数.

c. f. : 表示特征函数.

i. d. : 表示无穷可分的.

$\stackrel{\mathrm{w}}{\Longrightarrow}$: 表示关于测度的弱收敛.

$\stackrel{\mathrm{lw}}{\Longrightarrow}$: 表示关于测度的局部弱收敛.

$\stackrel{\mathrm{v}}{\Longrightarrow}$: 表示关于测度的淡收敛.

$\xrightarrow{P}$: 表示概率收敛.

$\xrightarrow{\mathrm{a.s.}}$: 表示概率为 1 地收敛.

$\xrightarrow{\mathrm{a.un.}}$: 表示几乎一致收敛.

$\xrightarrow{L^p}$: 表示 L^p 收敛.

$\xrightarrow{\mathrm{com.}}$: 表示完全收敛.

$\xrightarrow{\mathrm{w}}$: 表示函数的弱收敛.

$\xrightarrow{\mathrm{lw}}$: 表示函数的局部弱收敛.

目　　录

第一章　距离空间中的测度

§1　单调类定理

本书是基于测度论之上而写的, 但是, 为了读者的方便和本书的特殊需要, 对抽象空间中的测度的基本概念及性质, 对距离空间中的测度, 特别是距离空间中的 Hausdorff 测度和 N 维欧氏空间中的 Lebesgue – Stieltjes 测度, 仍给以适量的论证.

关于集合的运算, 我们沿用习惯的称呼与符号. 例如, 给定集合 Ω, 对其中任意两个子集 A 和 B, 记为 $A \subset \Omega, B \subset \Omega$. 而 $A \bigcup B, A \bigcap B$ 和 $A - B$ 分别表示 A 和 B 之并、交与差. $A \triangle B$ 表示 A 和 B 的对称差, 即 $A \triangle B = (A - B) \bigcup (B - A)$. 类似地, 若 Γ 是任一指标集, 且对任何 $r \in \Gamma, A_r \subset \Omega$, 仍用 $\bigcup\limits_{r \in \Gamma} A_r$ 和 $\bigcap\limits_{r \in \Gamma} A_r$ 分别表示 $\{A_r, r \in \Gamma\}$ 之并和交. $A^c = \Omega - A$ 表示 A 之补集. $\varnothing$ 表示空集. $\mathbf{R}^N$ 表示 N 维欧氏空间, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1, \overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$. 对 $a, b \in \mathbf{R}, a \vee b \overset{\text{def.}}{=\!=} \max\{a, b\}, a \wedge b \overset{\text{def.}}{=\!=} \min\{a, b\}$.

定义 1.1　设 Ω 是任一给定的集合, $\mathfrak{M}$ 是 Ω 中一族子集, 称之为 Ω 的一个集合系.

(1) 称集合系 $\mathfrak{M}$ 是 π 系, 如果

$$\{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{M}.$$

(2) 称集合系 $\mathfrak{M}$ 是 d 系, 如果

(i) $\Omega \in \mathfrak{M}$;

(ii) $A, B \in \mathfrak{M}, A \subset B \Rightarrow B - A \in \mathfrak{M}$;

(iii) $A_n \in \mathfrak{M}, A_n \subset A_{n+1} (n \geqslant 1) \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

(3) 称集合系 $\mathfrak{M}$ 是 σ **代数**, 如果

(i) $\Omega \in \mathfrak{M}$;

(ii) $A, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A - B \in \mathfrak{M}$;

(iii) $A_n \in \mathfrak{M} (n \geqslant 1) \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

显然, 若 $\mathfrak{M}$ 是 σ 代数, 则 $\varnothing \in \mathfrak{M}$, 而且当 $A_n \in \mathfrak{M} (n \geqslant 1)$ 时总有 $A_n^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{M} (n \geqslant 1)$, 且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathrm{c}} \right)^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{M}$.

(4) 含 $\mathfrak{M}$ 的最小 d 系 (或 σ 代数) 称为由 $\mathfrak{M}$ 所产生的 d 系 (或 σ 代数), 记之为 $d(\mathfrak{M})$ (或 $\sigma(\mathfrak{M})$).

显然, $d(\mathfrak{M})$ (或 $\sigma(\mathfrak{M})$) 是唯一存在的.

定理 1.1 集合系 $\mathfrak{M}$ 是 σ 代数的充分必要条件是: $\mathfrak{M}$ 既是 π 系又是 d 系.

证 必要性是显然的.

充分性. 由于 $\mathfrak{M}$ 既是 π 系又是 d 系, 所以欲证它是 σ 代数, 只需证明它关于可数并运算封闭即可. 事实上, 由 $\mathfrak{M}$ 既是 π 系又是 d 系推知

$$A \in \mathfrak{M} \Rightarrow A^{\mathrm{c}} = \Omega - A \in \mathfrak{M}. \tag{1.1}$$

由 (1.1) 及 $\mathfrak{M}$ 是 π 系推知

$$\{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\mathrm{c}} \right)^{\mathrm{c}} \in \mathfrak{M}. \tag{1.2}$$

由 (1.2) 式及 d 系的第 (iii) 条性质可得

$$A_n \in \mathfrak{M} (n \geqslant 1) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \in \mathfrak{M}.$$

定理 1.1 得证.

定理 1.2 设 $\mathfrak{M}$ 是 Ω 上的一个 π 系, 则 $d(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M})$.

证 由于 $\sigma(\mathfrak{M})$ 是包含 $\mathfrak{M}$ 的一个 d 系, 所以 $\sigma(\mathfrak{M}) \supset d(\mathfrak{M})$. 因此, 为证定理, 只需证明 $d(\mathfrak{M})$ 是 σ 代数. 根据定理 1.1, 则只需证明 $d(\mathfrak{M})$ 是一个 π 系即可. 事实上, 若令

$$\mathscr{D}_1 = \{B \in d(\mathfrak{M}) : B \bigcap A \in d(\mathfrak{M}) \text{ 对一切 } A \in \mathfrak{M} \text{ 成立}\},$$

要证 $\mathscr{D}_1 = d(\mathfrak{M})$. 由于 $\mathfrak{M}$ 是 π 系, 所以 $\mathscr{D}_1 \supset \mathfrak{M}$. 若能证 $\mathscr{D}_1$ 是一个 d 系, 则 $\mathscr{D}_1 \supset d(\mathfrak{M})$, 从而 $\mathscr{D}_1 = d(\mathfrak{M})$.

(i) 显然, $\Omega \in \mathscr{D}_1$.

(ii) 设 $B_1, B_2 \in \mathscr{D}_1, B_1 \subset B_2$, 则对任何 $A \in \mathfrak{M}$, 由 $\mathscr{D}_1$ 的定义有 $B_i \bigcap A \in d(\mathfrak{M})(i=1,2)$. 又因 $B_1 \bigcap A \subset B_2 \bigcap A$, 所以由 d 系的性质 (ii) 有

$$(B_2 - B_1)\bigcap A = ((B_2 \bigcap A) - (B_1 \bigcap A)) \in d(\mathfrak{M}),$$

此即 $B_2 - B_1 \in \mathscr{D}_1$.

(iii) 设 $B_n \subset B_{n+1}, B_n \in \mathscr{D}_1 (n \geqslant 1)$, 则对任何 $A \in \mathfrak{M}$, 有 $(B_n \bigcap A) \in d(\mathfrak{M}), (B_n \bigcap A) \subset (B_{n+1} \bigcap A)$, 所以由 d 系之性质 (iii) 有

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \bigcap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \bigcap A) \in d(\mathfrak{M}),$$

此即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathscr{D}_1.$$

这就证明了 $\mathscr{D}_1$ 是一个 d 系, 所以 $\mathscr{D}_1 = d(\mathfrak{M})$.

再令

$$\mathscr{D}_2 = \{B \in d(\mathfrak{M}) : (B \bigcap A) \in d(\mathfrak{M}) \text{ 对一切 } A \in d(\mathfrak{M}) \text{ 成立}\},$$

要证 $\mathscr{D}_2 = d(\mathfrak{M})$, 即 $d(\mathfrak{M})$ 是 π 系. 事实上, 由 $\mathscr{D}_1 = d(\mathfrak{M})$ 知: $\mathscr{D}_2 \supset \mathfrak{M}$. 仿 $\mathscr{D}_1$, 可证 $\mathscr{D}_2$ 也是 d 系, 所以 $\mathscr{D}_2 = d(\mathfrak{M})$. 定理证毕.

定义 1.2 设 Ω 是任一给定的集合, $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数, 即 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是一个可测空间. $f: \Omega \mapsto \mathbf{R}$, 称 f 是 $\mathscr{F}$ 可测函数, 如果对任何 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$. 特别地, 若 f 可表示为 $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{A_i}$, 其中 c_i 为常数, $A_i \in \mathscr{F}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathbf{1}_A$ 表集合 A 上的**示性函数**, 即是 $\mathbf{1}_A(x) = 1$ 当 $x \in A$ 而 $\mathbf{1}_A(x) = 0$ 当 $x \overline{\in} A$, 则称 f 为 $\mathscr{F}$ **简单函数**. 当不致混淆时, $\mathscr{F}$ 可测函数 (或 $\mathscr{F}$ 简单函数) 简称为**可测函数** (或简单函数). 易证: 任何非负 $\mathscr{F}$ 可测函数 f, 均可表为一串单增的 $\mathscr{F}$ 简单函数 $\{f_n\}$ 的极限: $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, 其中 $f_n \leqslant f_{n+1} (n \geqslant 1)$.

定理 1.3 (单调类定理) 设 Ω 是任一给定的集合, $\mathfrak{M}$ 是 Ω 上的一个 π 系, $\mathscr{H}$ 是定义在 Ω 上的满足下列条件的实值函数构成的向量空间:

(1) 常数 $1 \in \mathscr{H}$, 且对任何 $A \in \mathfrak{M}, \mathbf{1}_A \in \mathscr{H}$;

(2) $\mathscr{H}$ 包含了一切含于 $\mathscr{H}$ 的非负的单增的函数列 $\{f_n\}$ 的实值极限函数 (相应地, 有界的极限函数) $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, 即

"$f_n \in \mathscr{H}$, $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$, $(n \geqslant 1)$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 是实值函数 (相应地, 有界实值函数) $\Rightarrow f \in \mathscr{H}$",

则 $\mathscr{H}$ 包含了一切定义在 Ω 上的实值的 (相应地, 有界实值的) $\sigma(\mathfrak{M})$ 可测的函数.

证 令 $\mathscr{D} = \{A \subset \Omega : \mathbf{1}_A \in \mathscr{H}\}$. 由定理的假设 (1) 可知 $\Omega \in \mathscr{D}, \mathfrak{M} \subset \mathscr{D}$. 而 $\mathscr{H}$ 是向量空间, 故当 $A_1, A_2 \in \mathscr{D}$ 且 $A_1 \subset A_2$ 时可推出: $\mathbf{1}_{A_2 - A_1} = \mathbf{1}_{A_2} - \mathbf{1}_{A_1} \in \mathscr{H}$, 亦即 $A_2 - A_1 \in \mathscr{D}$. 又由 (2) 可知: 对 $\mathscr{D}$ 中任一单增序列 $\{A_n\}$ 总有

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = \sup_{n\geqslant 1} \mathbf{1}_{A_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n} \in \mathscr{H},$$

即 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{D}$. 总之, $\mathscr{D}$ 是 Ω 上的一个 d 系. 故由定理 1.2 得知 $\mathscr{D} \supset d(\mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{M})$.

任取一个 $\sigma(\mathfrak{M})$ 可测函数 f, 令 $f^+ = f \vee 0, f^- = (-f) \vee 0$ 分别为 f 的正部与负部, 它们都是非负的 $\sigma(\mathfrak{M})$ 可测的实值函数. f^+ 总可表为非负单增的简单函数列

$$\left\{ f_n^+ = \sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} \mathbf{1}_{A_i^{(n)}}, n \geqslant 1 \right\}$$

$(a_i^{(n)} \in \mathbf{R}, A_i^{(n)} \in \sigma(\mathfrak{M}), A_i^{(n)} \bigcap A_j^{(n)} = \varnothing$, 当 $i \neq j)$ 的极限. 由 $f_n^+ \in \mathscr{H}$ 及条件 (2) 可知 $f^+ \in \mathscr{H}$. 仿之可证 $f^- \in \mathscr{H}$. 于是, 由 $\mathscr{H}$ 是向量空间可得 $f = (f^+ - f^-) \in \mathscr{H}$. 定理证毕.

引理 1.1 设 Ω_1, Ω_2 为任意两个给定的集合, $\mathfrak{M}$ 是 Ω_2 上的一个集合系, $f : \Omega_1 \mapsto \Omega_2$ 是由 Ω_1 到 Ω_2 的一个映射, 则

$$f^{-1}(\sigma(\mathfrak{M})) = \sigma(f^{-1}(\mathfrak{M})).$$

证明甚易, 读者可作为习题证明之.

今后恒用 $f^{-1}(\mathfrak{M}) \overset{\text{def.}}{=\!=} \{f^{-1}(A) : A \in \mathfrak{M}\}$, 而 $f^{-1}(A)$ 是 f 在 A 上的逆像集.

引理 1.2 设 Ω 是任一给定的集合, Γ 是任一指标集, $(E_i, \mathscr{E}_i)$ 是可测空间, $\mathscr{F}_i$ 是 $\mathscr{E}_i$ 中的集合系, $\sigma(\mathscr{F}_i) = \mathscr{E}_i, f_i : \Omega \mapsto E_i, (i \in \Gamma)$. 再令

$$\mathscr{F} = \left\{ B : B = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_i), A_i \in \mathscr{F}_i, I \text{ 是 } \Gamma \text{ 中之有限子集} \right\},$$

$$\sigma(f_i, i \in \Gamma) = \sigma\left(\bigcup_{i\in\Gamma} f_i^{-1}(\mathscr{E}_i) \right),$$

则

(1) $\mathscr{F}_i$ 是 π 系 $(\forall i \in \Gamma) \Rightarrow \mathscr{F}$ 是 π 系;

(2) $\sigma(\mathscr{F}) = \sigma(f_i, i \in \Gamma)$.

证明甚易, 读者可作为习题证明之.

定理 1.4 (单调类定理) 设 $\Omega, \Gamma, I, \mathscr{F}, \mathscr{F}_i$ 和 f_i 如引理 1.2 中所定义, 且 $\mathscr{F}_i$ 是 π 系. 若 $\mathscr{H}$ 是定义在 Ω 上的一些实值函数所构成的向量空间且满足下列条件:

(1) $1 \in \mathscr{H}$;

(2) "$h_n \in \mathscr{H}, 0 \leqslant h_n \leqslant h_{n+1} (n \geqslant 1), h = \sup\limits_{n \geqslant 1} h_n$ 有限 (相应地, 有界) $\Rightarrow h \in \mathscr{H}$";

(3) $\mathscr{H}^* \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \left\{ f = \prod\limits_{i \in I} \mathbf{1}_{A_i}(f_i) : A_i \in \mathscr{F}_i, i \in I, I \text{ 是 } \Gamma \text{ 的有限子集} \right\} \subset \mathscr{H}$,

则 $\mathscr{H}$ 包含了一切 $\sigma(f_i, i \in \Gamma)$ 可测的实值 (相应地, 有界) 函数.

证 注意

$$\prod_{i \in I} \mathbf{1}_{A_i}(f_i) = \mathbf{1}_{\{\bigcap\limits_{i \in I} f_i^{-1}(A_i)\}},$$

则可得:

$$\mathscr{H}^* = \{\mathbf{1}_A : A \in \mathscr{F}\}.$$

由 (3) 得 $\{\mathbf{1}_A : A \in \mathscr{F}\} \subset \mathscr{H}$. 再注意 $\mathscr{F}$ 是 π 系, 则由定理 1.3 立即得到定理 1.4.

附注 1.1 我们有时把定理 1.1 和 1.2 称为集合形式的单调类定理, 而把定理 1.3 和 1.4 称为函数形式的单调类定理.

§2 测度的基本概念及性质

在这一节中, 我们要研究抽象空间中的**预测度**、**外测度**和测度的基本概念和简单性质.

定义 2.1 设 Ω 是任一给定的集合, $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个集合系, $\tau : \mathscr{F} \mapsto [0, \infty]$. 称 τ 是 $\mathscr{F}$ 上的一个预测度, 如果 $\varnothing \in \mathscr{F}$ 且 $\tau(\varnothing) = 0$. 称 $\mathscr{F}$ 上的预测度 τ 是 $\mathscr{F}$ 上的外测度, 如果 τ 还满足:

(1) 单增性, 即当 $A_1, A_2 \in \mathscr{F}, A_1 \subset A_2$ 时总有 $\tau(A_1) \leqslant \tau(A_2)$;

(2) 半可加性, 即当 $\{A_n\} \subset \mathscr{F}, \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$ 时总有 $\tau\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$.

若 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的全体子集时, 则简称 $\mathscr{F}$ 上的预测度 (相应地, 外测度) 为预测度 (相应地, 外测度).

特别地, 若 $\mathscr{F}$ 上的外测度 τ 还满足

(3) 若 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的两两不交的集合列, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$, 总有 $\tau\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$ (可数可加性), 则称 τ 是 $\mathscr{F}$ 上的**测度**.

称测度 τ 是**概率测度**, 若 $\tau(\Omega) = 1$.

定理 2.1　设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个集合系, τ 是 $\mathscr{F}$ 上的预测度, 对任何 $A \subset \Omega$, 定义

$$\mu(A) = \inf_{\substack{\bigcup\limits_i c_i \supset A \\ c_i \in \mathscr{F}}} \sum_i \tau(c_i), \tag{2.1}$$

则 μ 是 Ω 上的一个外测度, 有时称 μ 是预测度 τ 按模式 (I) 产生的外测度. (注: 若 (2.1) 式右方不存在 $c_i \in \mathscr{F}, \bigcup\limits_i c_i \supset A$, 则按惯例, 定义 $\inf \varnothing = \infty$.)

证　由外测度的定义立刻可验证 μ 是一个外测度.

定义 2.2　设 μ 是 Ω 上的一个外测度, 称 Ω 的子集 A 是 μ 可测的, 如果对任何 $A_1 \subset A, A_2 \subset (\Omega - A)$, 总有

$$\mu(A_1 \bigcup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

用 $\sigma(\mu)$ 表全体 μ 可测集.

命题 2.1　若 $E_1, E_2 \in \sigma(\mu), E_1 \bigcap E_2 = \varnothing, A \subset \Omega$, 则

$$\mu(A \bigcap (E_1 \bigcup E_2)) = \mu(A \bigcap E_1) + \mu(A \bigcap E_2).$$

证　由 μ 可测集之定义立得此命题.

定理 2.2　设 μ 是 Ω 上的一个外测度, 则 $\sigma(\mu)$ 是 Ω 上的一个 σ 代数, 而且 μ 在 $\sigma(\mu)$ 上的局限 $\mu|_{\sigma(\mu)}$ 是一个测度.

证　为证此定理, 只需证明下列四类:

(a) 如果 $\mu(A) = 0$, 则 $A \in \sigma(\mu)$;

(b) 如果 $B \in \sigma(\mu)$, 则 $B^{c} = (\Omega - B) \in \sigma(\mu)$;

(c) 如果 $\{E_n\} \subset \sigma(\mu)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \sigma(\mu), \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \sigma(\mu)$;

(d) 如果 $\{E_n\} \subset \sigma(\mu)$, 且 $\{E_n\}$ 两两不交, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{2.2}$$

现证 (a). 设 $\mu(A)=0, A_1\subset A, A_2\subset A^c$, 则

$$\begin{aligned}\mu(A_2)&\leqslant\mu(A_1\bigcup A_2)\leqslant\mu(A_1)+\mu(A_2)\\&\leqslant\mu(A)+\mu(A_2)=\mu(A_2),\end{aligned}$$

所以 $\mu(A_1\bigcup A_2)=\mu(A_1)+\mu(A_2)$, 从而 $A\in\sigma(\mu)$.

再证 (b). 用对称性立刻可证 (b).

第三, 对两个集合 E_1,E_2 之并的特例来证 (c). 设 $E_1,E_2\in\sigma(\mu)$, A 和 B 是两个具有有限 μ 测度的满足下列条件的集合:

$$A\subset(E_1\bigcup E_2),\quad B\subset(E_1\bigcup E_2)^c.$$

因为

$$A\bigcup B=(A\bigcap E_1)\bigcup[(A\bigcup B)\bigcap(\Omega-E_1)],$$

而且

$$(A\bigcap E_1)\subset E_1,\quad (A\bigcup B)\bigcap(\Omega-E_1)\subset\Omega-E_1,\quad E_1\text{ 是 }\mu\text{ 可测集},$$

所以

$$\mu(A\bigcup B)=\mu(A\bigcap E_1)+\mu((A\bigcup B)\bigcap(\Omega-E_1)).\tag{2.3}$$

但是

$$(A\bigcup B)\bigcap(\Omega-E_1)=\{A\bigcap(\Omega-E_1)\}\bigcup B,$$

而且

$$A\bigcap(\Omega-E_1)\subset E_2,\quad B\subset\Omega-E_2,\quad E_2\text{ 是 }\mu\text{ 可测集},$$

所以

$$\mu((A\bigcup B)\bigcap(\Omega-E_1))=\mu(A\bigcap(\Omega-E_1))+\mu(B).\tag{2.4}$$

再用 $E_1\in\sigma(\mu)$, 得

$$\mu(A\bigcup E_1)+\mu(A\bigcap(\Omega-E_1))=\mu(A).\tag{2.5}$$

由 (2.3)~(2.5) 得

$$\mu(A\bigcup B)=\mu(A)+\mu(B),\tag{2.6}$$

所以 $E_1\bigcup E_2$ 是 μ 可测集.

第四, 设 $\{E_n\}$ 是两两不交的 μ 可测集, 要证 (2.2) 成立 (即 (d) 成立), 而且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 都是 μ 可测集. 记

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$