误差理论与数据处理

丁振良 主编

哈尔滨工业大学出版社

误差理论与数据处理

丁振良　主编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了测量误差的基本理论与测量数据处理的基本方法，包括测量误差的基本概念、测量误差的性质和传递规律、一般测量问题的数据处理方法、不确定度的估计与合成、不确定度合成规则的应用、最小二乘法及回归分析。

本书为函授大学精密仪器专业教材，也可供有关工程技术人员参考。

误差理论与数据处理

丁振良 主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

哈尔滨建筑工程学院附属印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张18 字数422,000

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数 1—5,000

书号 15341·57 定价3.00元

ISBN 7-5603-0016-2/TH·1

前　　言

测量中的误差是不可避免的，研究测量误差的特征规律，正确地处理测量数据，以便获得可靠的测量结果，并对所得结果的可靠程度作出评定，这是每一个从事精密测量工作的技术人员必须掌握的基本技能。对测量误差的分析研究不仅用于给出测量数据的正确处理方法和相应的精度估计，而且对合理地拟定测量方法和设计测量仪器有指导意义。随着测量技术的发展，对测量误差和测量数据处理方法的研究变得越来越重要。

本书以概率论与数理统计为基础，叙述了测量误差的基本理论和数据处理的基本方法，为函授大学精密仪器专业教材，也可供有关工程技术人员参考。

本书在编写体系和叙述方法上尽可能适应函授教学的要求，使读者能在自学的基础上通过适当的面授及函授辅导较好地掌握有关误差理论与数据处理的基本内容。为便于自学，有利于读者更好地掌握和运用这些理论和方法，本书编入了较多的与专业内容有关的例题。为满足不同程度的读者的需要，某些章节的内容分不同层次叙述，较深的内容可供参考。

本书由哈尔滨工业大学函授部组织编写，丁振良主编，并编写第一章至第六章，谭久彬编写第七章，蒋作民主审。

因作者水平有限，难免有不当之处，望读者批评指正。

编　　者

1987.7

目　　录

第一章 概 述

合理地处理测量数据，以便给出正确的处理结果，并对所得结果的可靠性作出确切的估计和评价，这是计量测试工作中的基本环节。因此，有关测量误差与测量数据处理的基本理论和基本方法是计量测试工作者必须掌握的基本知识和基本技能。本书的有关内容不仅可应用于测量数据的处理和可靠性的评定，而且在分析、改进以及拟定新的测量方法时具有指导意义，同时也为仪器检定和精度分析提供了基本依据。

下面简要地说明本书的一些重要概念，并对其基本内容作一概括介绍。

§1-1 测量的基本概念

测量误差的理论及测量数据处理的研究与测量内容有着不可分割的联系。数据处理和误差分析不可避免地要涉及到测量的仪器设备、原理方法、环境条件等方面。下面简要介绍有关测量的几个概念。

一、测量的定义

将被测量和体现测量单位的标准量进行比较，比较的结果给出被测量是测量单位的若干倍或几分之几，这就是测量。设L为被测量，E为测量单位，则可写成如下的基本测量方程式：

$$L = qE \tag{1-1}$$

比值 $q=L/E$ 是被测量的数字，对于确定的量L，q值与所选测量单位的大小成反比。例如长度1m，若选用cm为单位则为100cm；若选用mm为单位，则为1000mm。

计量技术中所涉及到的被测量有长度（及角度）、温度、力学、电学、无线电、时间频率、放射性、光学、声学、化学等各种量。因此科学研究和生产实践中的测量问题是多种多样的，测量的精度和其它要求是各不相同的，采用的测量方法也是千差万别的，但测量数据处理的基本理论和基本方法却是相同的。

二、测量单位和测量基准

不同的被测量采用不同的测量单位（见附录二）。在国际单位制中，各种量一般采用十进制，只有少数单位例外。

测量过程中，测量单位必须以物质形式体现出来，这就需要有相应的标准器具和仪器。

为保证量值的准确统一，对基本量已建立了相应的基准，由基准给出量值单位的真值（约定真值）。为满足不同精度的测量要求，需要建立量值的传递系统。量值的逐级

传递需要一定的测量器具和测量方法来实现，并应具有相应的精度要求。

在长度计量中，以光在真空中1/299792458秒的时间间隔内行程的长度定义为1米，这就是长度的基准。在规定的条件下，可以将这一基准长度以一定的精度复现出来，并按量块与线纹尺两大系统分别逐级传递下去，直到被测量值。根据被测量的精度要求，由传递系统的相应级别传递尺寸。

三、测量方法及其分类

对不同的被测量和不同的测量要求，需要采用不同的测量方法。这里，测量方法是泛指测量中所涉及到的测量原理、测量方式、测量系统及测量环境条件等诸项测量环节的总和。测量中这些环节的一系列误差因素会使测量结果偏离真实值而产生一定的误差。因此，对测量过程诸环节的分析研究是进行测量数据处理及其精度估计的基础。

测量方法是多种多样的，可按不同的原则分类。例如可将测量方法分为直接测量和间接测量，绝对测量和相对测量，单项测量和综合测量，工序测量和终结测量，静态测量和动态测量等等。测量方法不同，测量数据处理的具体方法也有差异。

1. 直接测量与间接测量

直接测量是将被测量与作为标准的量直接进行比较，或者用经标准量标定了的仪器对被测量进行测量，从而直接（不需要通过方程式计算）获得被测量。例如，用尺子测量长度、用温度计测量温度、用电流表测量电流就可分别直接得到长度、温度、电流量。

间接测量是指直接测量与被测量有确定函数关系的其它量，然后按这一函数关系间接地获得被测量的方法。例如，为测量圆的面积s，可直接测量其直径d，然后根据函数关系$s=\pi d^2/4$求得面积s。

组合测量实质上也属于间接测量，它所直接测量的量是被测量的各种组合量，并且所得测量方程式的数目通常多于待求量的数目，因此需用最小二乘法进行数据处理。例如，为了获得三段刻线间矩a、b、c的值，分别测量它们的各种组合量：a、b、c、$a+b$、$a+c$、$b+c$、$a+b+c$，用最小二乘法处理所得数据，就可求得刻线间距a、b、c的最可信赖值。间接测量的数据处理比较复杂，随测量的具体问题而有所差异。

2. 绝对测量与相对测量

在绝对测量中，通过测量所得数据直接得到被测量值的绝对大小。

相对测量所得测量数据是被测量相对于标准量的偏差值，被测量的绝对大小应是标准量与这一偏差值的和。

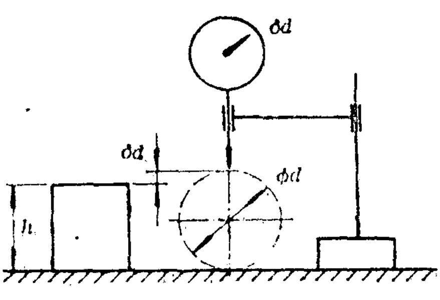

图 1-1

例如图 1-1 中，为测量直径d，可用中心长度与圆柱公称直径相同的量块校对指示表，使示值为零。当用该表测量圆柱直径时，其示值为圆柱直径与量块尺寸之差，即$\Delta d=d-h$，圆柱直径则为量块尺寸与该偏差尺寸之和，即$d=h+\Delta d$。

与绝对测量相比，相对测量中的某些误差因素的影响大为减小，因此相对测量比较

容易满足精度要求。

3. 静态测量与动态测量

静态测量是指对某固定参数进行的测量，这一参数不随时间改变。

动态测量是指对随时间变化的量进行连续测量，其数据处理通常要用到随机过程的理论。

测量误差及测量数据的处理常与以上测量方法的分类有关。此外，从不同的角度出发，还可将测量方法作其它分类，此处从略。

四、测量的精确度 精密度和准确度

测量的精确度，即测量结果的可靠性，以测量误差的表征参数"不确定度"来反映。它是评价测量方法优劣的基本指标之一。根据误差理论提供的依据，可对测量的不确定度作出估计。测量的精确度应满足测量要求，这就要求在深入分析测量方法的基础上，正确运用误差理论的知识，恰当地设计测量方法。但应看到，为提高测量精确度的任何努力都要付出一定的代价，因此对测量精确度的要求应是适当的，盲目地追求高精度是得不偿失的。所以在满足测量精度要求的前提下，应尽量降低对测量精确度的要求，以提高经济效益。

§1-2 测量误差的基本概念

一、测量误差的定义

人们在进行各种实验时，所获得的实验结果往往反映为相应的实验数据。例如，天文观测、大地测量、标准量值的传递、机械零件加工、仪器的装调、实弹射击、航天飞机发射等，这些实验的结果就反映为相应的实验数据。

实验所给出的某个量值的实验数据总不会与该量值的理论期望值完全相同，因此称实验或实验数据存在误差。即

$$\text{实验误差} = \text{实验数据} - \text{期望值} \qquad (1-2)$$

例如，测量山峰的高度时，其实际高度是测量的期望值，测量所得数据与这个期望值之差即为测量误差；按某一尺寸加工零件时，该尺寸的公称值是加工尺寸的期望值，加工完成以后所获得的零件尺寸与这一期望值之差，就是加工误差；按某一要求调整仪器的工作状态时，规定的工作状态参数（如电压、电流、温度等）是调整的期望值，调整后的工作状态参数与期望的工作状态参数之差就是仪器的调整误差；进行打靶射击时，靶心是期望的弹着点位置，实际弹着点偏离靶心的一段距离就是射击误差。

在精密测试工作中，对某个量进行测量，该量的客观真值（客观上的实际值）是测量的期望值，测量所得数据与其差值即为测量误差。因此，更具体地说，测量误差定义为被测量的测得值与其相应的真值之差，即

$$\text{测量误差} = \text{测得值} - \text{真值}$$

对于测量仪器

$$示值误差=仪器示值-真值 \tag{1-4}$$

应当注意，这里的“真值”是指被测量的客观真实值。一般来说，这一客观真值是未知的。仅在一些特殊的场合真值才是已知的，例如某些理论分析值。国际计量大会规定的最高基准量也可看作是真值，这是约定真值。有时，可通过某种手段获得这一真值的近似值，当这一近似值与真值的差值在实际问题中可以忽略不计时，就可以用这一近似值代替真值，从而计算出测量误差。此时，称这一近似值为相对真值。

其次，应注意测量误差的正负符号，有时容易弄错符号，这就会给出错误的结果。例如，用万能工具显微镜测量尺寸时，以其线纹尺刻度为标准量与工件被测尺寸相比较，若线纹尺刻线间比较其公称值偏大，则这一刻线间距的误差（由加工误差引入）应为正值。以此为标准量值测量某一长度时，测得值偏小，测量误差为负值。如仍按刻工尺误差的正号计算，就会出现错误。

二、测量误差存在的必然性

实验所给出的某个量的数据与其期望值总不会完全一致，即实验数据总是存在一定的误差。如进行射击实验时，无论枪支多么精良，射击者水平多么高超，都不可能击线靶上指定的点（严格的几何点），其弹着点或多或少总有点偏离，就是说射击总是存在着一定的误差。因而严格地说，“指哪打哪”是办不到的。又如，加工一个零件，所获尺寸的精度总是有限的。无论机床设备怎样精密，也无论加工者的技术多么熟练，加中后获得的尺寸或多或少总是要偏离给定的公称尺寸。无数事实表明，任何实验结果总是不可避免地包含有一定的误差，绝对准确的实验数据是没有的。这就是实验误差存在的必然性。在计量测试中也毫无例外，任何一种测量方法所获得的任何一个测量数据无一是绝对准确而不含有误差的，只不过是测量误差大小不同而已。

即使是最高基准的传递手段（测量的仪器设备和测量方法）也不是绝对准确的。以长度基准为例，18世纪末法国科学院提出“米制”建议，1791年法国国会批准，决定以通过巴黎的地球子午线长度的四千万分之一定义为1米，1799年按这一定义制成了铂杆“档案尺”，以其两端之间的距离定义为1米。这是第一个米的实物基准。但由于档案尺变形造成较大的误差，1872年在讨论米制的国际会议上决定废弃“档案尺”的米定义。1889年第一次国际计量大会决定采用铂铱合金的X形尺作为国际米原器，以该尺中性面上两端的二条刻线在0 ℃时的长度为1米，其复现精度为$\pm(1\sim2)10^{-7}$。随着科学技术的发展，建立自然基准的条件日趋成熟，1960年第十一次国际计量大会决定废弃米原器，定义米为Kr^{86}原子在$2P_{10}$—$5d_5$能级间跃迁时，所辐射的谱线在真空中波长的1650763.73倍。使长度基准的复现精度提高到$\pm(0.5\sim1)\times10^{-8}$。1983年第十七届国际计量大会通过了米的新定义，定义米是真空中光在1/299792458秒的时间间隔内行程的长度，废除原来的米定义，并推荐了五条激光辐射作为波长标准，相对不确定度最高为$\pm1.3\times10^{-10}$。

可以预见，随着科学技术的进步，必将会使米基准的复现精度有进一步的提高。但无论如何改进和完善，米基准的复现也不会是绝对准确的。

在一定条件的限制下，精确度的提高是受到一定限制的。因此测量数据包含一定的

误差是不可避免的，只要在一定的范围内就是正常的。

三、研究测量误差的意义

测量误差是不可避免的，因而，研究测量误差的规律具有普遍的意义。研究这一规律的直接目的，一是要减小误差的影响，提高测量精度；二是要对所给结果的可靠性作出评定，即给出精确度的估计。

只有掌握测量误差的规律性，才能合理地设计测量仪器，拟定良好的测量方法，并正确地处理测量数据，以便在保证一定经济效果的条件下，尽量减小或消除部分测量误差的影响，使所得测量结果有较高的可信程度。

随着科学技术的发展和生产水平的提高，对测量技术提出越来越高的要求。可以说在一定程度上，测量技术的水平反映了科学技术和生产发展的水平。而测量技术的水平正是以测量精度作为其主要标志之一的。在某种意义上，测量技术进步的过程就是克服误差的过程，也是对测量误差规律性认识深化的过程。对测量技术水平的要求总不能停止在一个水平上，测量的精确度总要不断提高，这就要求对测量误差有更深入的认识。

当然，无论采取何种措施，测量误差总是不可穷尽的，精度的提高总要受到一定的限制。因而就要求对测量误差的影响作出评定，即应对测量精度作出估计，其目的就是要给出测量的可信程度。

因此，任何测量数据总是相应于一定的精度，精度不同，其使用价值也就不同。可以说未知其精度的测量数据是没有意义的。因为这样的测量数据的可信程度是未知的，所以无法使用。这在精密测试中尤为明显，任何精密测量数据总要给出相应的精确度。

给出测量数据精确度的方式有以下几种：

1． 给出测量数据的精度参数

较为精密的测量数据都应同时给出表示测量数据精度的参数，包括标准差或极限误差等，甚至给出自由度及协方差。此时，测量数据的可信程度得以确切的说明，因而具有相对准确的意义。

2． 以有效数字表示测量数据的精度

精度要求并不很高的测量数据可通过数据的有效数字的位数来表达，从而给出这一数据的精度。例如，若仅写出数据320mm，则表示有三位有效数字，其误差不大于个位的半个单位（即0.5mm）；但若写成3.2×10^2mm，则表示该数据只有二位有效数字，误差不大于0.05×10^2mm。

3． 测量数据的精度由具体条件限定

有时，某些测量数据并未注明其精度参数，但其精度又不是由其有效字所表达的。这只是一种简化，因为这类测量数据只是在一定的具体条件下给出并使用的，所以它的误差受到这一条件的限定，其精度应当是明确的。例如，检定某一精度的工件尺寸时，所得测量数据的精度应当与工件的尺寸精度相适应。又如，检定一量块的中心长度，所得测量结果的精度也要符合检定规程要求。事实上，通常所遇到的测量数据其可信程度总是明确或大致明确的。例如，在台秤上称量1公斤糖果，其误差不应大于一克或几克，而用汽车衡称量4吨煤，则称量误差可达数千克，甚至更大。

在精密测量中，为给出测量数据的精度，应确切掌握测量误差的特征规律，以便对数据精度做出可靠的评定。

四、测量误差的表示方法

测量误差可按绝对误差和相对误差两种方式表示。选用何种方式依所研究的具体问题而定。

1. 绝对误差

按式(1-3)，绝对误差定义为

$$绝对误差=测得值-真值 \tag{1-5}$$

绝对误差给出的是测量结果的实际误差值。在对测量结果进行修正时要根据绝对误差进行修正。在误差特征规律的研究、不确定度的合成及一般测量问题的数据处理中，通常也使用绝对误差这一概念。

在几何量计量中，尺寸的公差是按绝对误差给定的，因而一般问题中常是按绝对误差进行测量和处理的。

绝对误差的量纲与被测量的量纲相同。

对于已确知其数值的误差则按其实际值进行讨论，对于数值未知的误差则须用相应的参数评定它。通常使用标准差σ（或方差σ^2）或极限误差$\pm t\sigma$等参数表征这些误差对测量结果的影响。

2. 相对误差

相对误差定义为

$$相对误差=\frac{绝对误差}{真值} \tag{1-6}$$

通常测得值的绝对误差很小，因而相对误差又可表示为

$$相对误差=\frac{绝对误差}{测得值}$$

相对误差通常以百分数(%)表示，为无名数，因而不能给出被测量的量纲。但应注意，其分子与分母应具有相同的量纲。

用相对误差能确切地反映测量效果的好坏。例如，测量纸张尺寸，所得结果为880mm，测量误差为2mm；这一误差对于测量公称尺寸为30mm的邮票尺寸则显太大；而测量纸厚时，这一误差是根本不允许的。可见，被测量的量值大小不同，允许的测量误差也应有所不同。被测量的量值越小，允许的测量绝对误差值也应越小。引入相对误差的概念就能很好地反映这一差别。

在几何量计量中，常常使用"绝对误差"。实际上，尺寸公差的规定已按尺寸段作了区分。尺寸大，相应的公差值大；尺寸小，相应的公差值也小。因而，实质上也对被测量大小不同这一因素的影响作了区分。当然，在某些情况下，也使用"相对误差"。例如，在评定粗糙度测量仪器的测量精度时则用相对误差。因为粗糙度测量仪器可测一定范围的粗糙度值，粗糙度值不同，测量的允许绝对误差值也应不同，为反映这一差别，采用相对误差。

测量的相对误差应限定在一定的范围内。这个限定范围以最大允许相对误差给出。

$$\text{允许的最大相对误差}=\frac{\text{最大允许绝对误差}}{\text{真值（或测得值）}}\times 100\%$$

在某些场合下，还使用引用误差。引用误差也属相对误差，但因有其特点而有相应的适用范围。引用误差常常用于仪表，特别是多挡仪表的精度评定中，这类仪表各档次、各刻度位置上的示值误差都不一样，不宜使用绝对误差，而按式(1-6)计算相对误差时也十分不便。为便于仪表精度等级的评定，规定了引用误差。

$$\text{引用误差}=\frac{\text{示值误差}}{\text{量程（示值范围）}} \rightarrow \text{指示值一真值} \qquad (1\text{-}7)$$

这里，示值误差是仪表指示数值的绝对误差；而量程是指该仪表测量范围的上限。按仪表的精度，规定了允许的最大引用误差，仪表的各刻度位置上的引用误差不超过这一最大允许值。

例 1-1 测量某一质量 $G_1=50\text{g}$，误差为 $\delta_1=2\text{g}$；测量另一质量 $G_2=2\text{kg}$，误差为 $\delta_2=50\text{g}$，问那一个质量的测量效果较好？

解 G_1 测量的相对误差为

$$\gamma_1=\frac{\delta_1}{G_1}100\%=\frac{2}{50}\times 100\%=4\%$$

G_2 测量的相对误差为

$$\gamma_2=\frac{\delta_2}{G_2}\times 100\%=\frac{50}{2000}\times 100\%=2.5\%$$

所以，G_2 测量的效果较好。

例 1-2 经检定发现，量程为250V的2.5级电压表在123V处的示值误差最大，为5V。问该电压表是否合格？

解 按电压表的精度等级的规定，2.5级表的最大允许引用误差为2.5%。

而该电压表的最大引用误差应为

$$q=\frac{5}{250}100\%\doteq 2\%$$

因最大引用误差小于允许的最大引用误差，故该电压表合格。

五、测量误差的分类

从不同的角度上可对测量误差作出种种区分。按照测量误差的来源可将其区分为装置误差、环境误差、方法误差、人员误差等；按照对测量误差掌握的程度，可将其区分为已知的和未知的误差；按照测量误差的特征规律，可将其区分为系统误差、随机误差和粗大误差等等。

对测量误差的分析研究与其特征规律有极为密切的关系，因而下面主要按测量误差的特征规律进行分类，分别简述如下。

1． 系统误差

顺次测量的系列测量结果中，其值固定不变或按某一确定规律变化的误差称为系统误差。

所谓确定的规律是指在顺次考察各测量结果时，测量误差具有确定的值，在相同的考察条件下，这一规律可重复地表现出来，因而原则上可用函数的解析式、曲线或数表表达出来。通常，它是由固定的或按一定规律变化的因素造成的。例如，量块的加工误差使其有一恒定的系统误差；温度升高将使刻尺增长；电压的波动使仪表示值产生相应的误差等等。

应当指出，系统误差的规律性是有确定的前提条件的，离开了这一前提条件，系统误差的规律性就无从谈起。上面所谓"顺次考察"正体现了这一前提条件。

系统误差虽有确定的规律性，但这一规律性并不一定确知。按照对其掌握的程度可将系统误差分为已知的系统误差（确定性的系统误差）和未知的系统误差（不确定的系统误差）。

显然，数值已知的系统误差可通过修正的方法从测量结果中扣除。

2． 随机误差

在同一条件下对同一被测量进行多次重复测量时，各测量数据的误差值或大或小，或正或负，其取值的大小没有确定的规律性，是不可预知的，这类误差称为随机误差，也称为偶然误差。

例如，在同一条件下对某一工件的尺寸多次测量，示值微小的无规则变化就表明存在随机误差。

随机误差即为随机变量，具有随机变量的一切特征。它虽不具有确定的规律性，但却服从统计规律，其取值具有一定的分布范围，因而可利用概率论提供的理论和方法去研究它。

个别的测量数据中，这类误差表现出无规则性，但大量的测量数据中却表现出统计规律性，这类误差相互间具有正负抵消的作用，这就是极为重要的"抵偿性"，是随机误差的统计特性的集中表现。

由于随机误差取值是不可预知的，因而不能通过修正的方法消除掉，它对测量结果的影响也不能以误差具体值去表达。随机误差的影响只能用统计的方法作出估计。

3． 粗大误差

超出正常范围的大误差称为粗大误差，也称为过失误差。

所谓正常范围是指测量结果中所含误差取值具有一定的分布范围，这是正常的。只要误差取值不超过规定的界限，应是允许的。而粗大误差则超出了误差的正常分布范围，具有较大的数值。它虽具有随机性，但不同于随机误差。

含有粗大误差的数据是个别的、不正常的，粗大误差使测量数据受到了歪曲。因而，含粗大误差的数据应舍弃不用。

一般粗大误差是由测量中的失误造成的，例如，读数或记录错误、操作不当、突然的冲击振动、电压波动、空气扰动等等，可使测量结果产生个别的大误差。

因为粗大误差与正常的随机误差或系统误差相比仅表现出数值大小上的差别，因而在数值差别不太明显时，则不易作出区分。所以，测量数据是否含有粗大误差，是按统计方法进行判断的。

六、测量误差的来源

测量数据经一定的方法处理以后即可得到待求结果，这个结果称为估计量，或称为测量结果。例如，设量x与量y有如下关系：

$$y=l\sin x$$

若测得x，则y可由上式间接获得，这就是间接测量。

设对量x进行等精度的多次重复测量，得x_1，x_2，…，x_n，则取算术平均值可得待求的结果y。

这里x_1，x_2，…，x_n为直接测量所得的测量数据（或称测量结果），而y为间接量，通常也称它为间接测量结果（或称测量结果），现讨论间接测量结果的误差因素。这些误差因素包括如下几种情形。

直接测量所得数据x_1，x_2，…，x_n含有误差，这就是测量误差。一般这一误差是间接测量结果的主要误差来源。

若函数$y=l\sin x$为近似的关系式，则按此式求得的y值必定有误差，这是数学模型误差，即采用近似的函数关系造成的误差，其中包括公式中参数的误差（例如l的误差）。

计算时，若将y按级数展开并截取若干项，而略去高次项，则造成误差，这是"截尾误差"。

在按函数$y=l\sin x$计算结果和求算术平均值等数据处理过程中，数字舍入时也会造成误差，这是舍入误差。

通常，后面三项误差影响不大，只要适当注意，就可以控制在一定的范围内。影响间接测量结果的误差的主要成份是测量误差（即直接测量数据x_1，x_2，…，x_n的误差），它是由测量过程诸误差因素产生的，可概括为如下几方面：

1. 测量方法误差

测量方法误差是由方法的不完善造成的，如测量原理的近似，测量操作不正确等，甚至被测对象本身也会造成一定误差。

测量原理或方法作了某种简化和近似以后，可能产生一定的误差，这是原理误差。例如，用线性关系代替非线性关系带来线性化误差。在例5-2中，以侧挡板定位测量锥体角度，使所测角度有一定位误差；用圆球代替理论的尖测头测量曲面形状，将使曲面形状受到歪曲等，都属于原理误差。

测量方法不完善也是常见的误差因素，例如，通过测量圆上三点确定被测圆心位置，工件本身圆度误差使所给圆心位置有一误差。它是由被测对象本身误差引起的，但测量方法不完善使其反映到测量结果中。又如，被测尺寸与标准尺不在同一直线上，则可引入一次方误差。

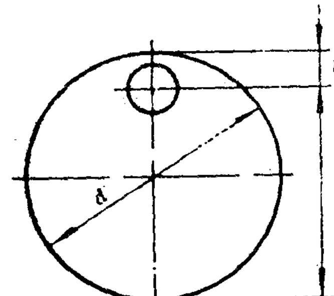

图 1-2

图1-2中，待测量为a，现改为测量b，则d的误差就会反映到测量结果中，这是基

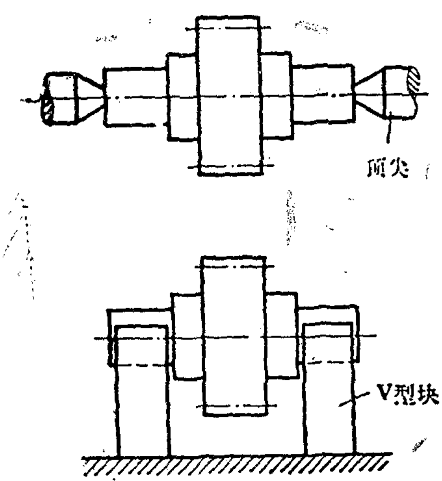

图 1-3

准变换造成的。

图 1-3 中的情形与此类似，加工时以顶尖定位，测量时以外圆定位，基准的改换也会带来误差。

这类误差有时会限制测量精度的进一步提高。

2． 测量器具误差

测量的仪器、设备和各种器具是测量误差的重要来源，包括仪器设备设计的原理误差，仪器零、部件的加工、装配及检验误差，器件的磨损老化，受力变形等等。

适当的测量方法和正确的测量操作可使部分这类误差得到控制。例如，当度盘有偏心误差时，使用对径位置上的两条刻线测量结果的平均值即可消除这一误差的影响（图5-12）。在尺寸测量时，被测尺寸放在标准尺的延长线上，可减小或消除仪器的阿贝误差。

通常，作为商品的仪器设备，均由检定证书或检定规程给出了相应的精度指标，在作精度分析时可直接查用。

3． 测量环境条件误差

测量的环境条件对测量结果有很大影响，如测量环境的温度、气压、湿度、振动、灰尘、气流等。环境条件偏离标准状态会引入一定的测量误差。例如，激光光波比长测量中，空气的温度、湿度和大气压力影响到空气折射率，因而影响到激光波长，造成测量误差。高精度的准直测量中气流也有一定影响。在一般的几何量计量中，温度的影响非常重要。

可通过环境条件的改善减小这项误差，这要付出一定的经济代价。在采取适当的测量方法以后，也可获得减小这项误差的效果。例如采用相对法测量时，温度偏差引起的工件变形和标准件的变形相同，因而可消除或减小这项误差。

4． 人员误差

测量者调整仪器和测量操作的熟练程度、操作习惯、生理能力，以及责任心、测量时的情绪等都影响到测量结果。例如，在瞄准读数时，有人习惯性地给出偏大(或偏小)的结果，并且不管多么认真和细心，所给结果总有一定的分散性。熟练程度不同，所给结果也会有明显的差异。特别是手动操作，目视读数测量时，测量者的影响更大，视力的好坏、技术的熟练程度等对测量精度有直接影响。由于这一误差因人而异，所以对其影响只能按正常的生理能力（眼的分辨能力、手的敏感程度等）规定的操作要求和测量者的技术水平作出估计。

显然，测量者本身素质的影响大小与测量方法及测量仪器设备有密切关系。随着测量技术的进步，自动化的测量仪器有了很大发展。测量过程和数据处理的自动化摆脱了人的具体干预，使测量者对测量过程与数据处理的人为影响大为减小。此时人为因素只

在仪器的调整等环节才起一定作用，因而对测量者的要求也有所降低。

综上所述，对测量误差来源的分析研究是测量精度分析的依据，并为我们指出了减小测量误差、提高所得测量结果精度的途径。进一步分析这些误差因素，可帮助我们分析误差的系统性和随机性，这对数据处理和精度估计极为有用。

当然，对误差来源的深入分析必须结合测量实践的具体问题。测量误差因素是多种多样的，没有一个固定的模式，因而离开了测量的具体问题就无法对误差因素作出确切的分析。

§1-3 数据处理的基本概念

测量数据处理中要用到数理统计中的若干结果。为便于叙述，下面结合测量数据处理的问题对几个基本概念作简要的说明。这些概念的严格叙述和讨论请参阅数理统计方面的有关著述。

一、总体与子样

数理统计是研究随机现象的数学分支，它以概率论为基础，根据多次统计实验获得的实验数据对相应问题作出估计与检验。

在数理统计中，把对某一问题的研究对象的全体称为总体（或母体），组成总体的每个基本单元称为个体，从总体中随机抽取 n 个个体称为抽样，抽取的 n 个个体称为容量为 n 的子样（或样本）。

例如在测量问题中，考察对量 X 的测量结果 x。这一结果有无穷多个随机取值，可表示为一随机变量，所有可能的测量结果的整体就是所研究的 x 的总体(或母体)。其中每一测量结果 x_i 为其个体。显然，这里 x_i 也是随机变量，且与总体 x 具有同一分布。以下叙述中有时 x_i 也表示某一具体的测量值（x_i 的一次观测值）而不再引入不同的符号表示这一具体值。

进行 n 次重复测量，得到测量结果(x_1，x_2，…，x_n)，这就是 x 的容量为 n 的子样，这里 x_1，x_2，…，x_n 为相互独立的随机变量，且与 x 具有相同的分布。有时（x_1，x_2，…，x_n）也表示某组具体的测得值（子样的观测值）。

由于各种原因，常难于对总体作全面的研究，一般是取有限个个体（即子样）加以研究，以推出总体的某种特征，这是数理统计的基本方法。例如，当仅有随机误差时，测量结果 x 的数学期望（均值）$\mu=E(x)$ 应是被测量的真值 X：

$$\mu=E(x)=X$$

为得到 μ 值，应给出全部的测量结果（即 x 的所有可能取值），则 $E(x)$ 值应为全部测量结果的平均值。显然，这是做不到的。通常是测得 1 个或几个结果（x_1，x_2，…x_n），由此给出总体 x 的参数 μ（即 X）。

$$\mu=X\approx\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

当然，子样并不是总体，因而子样给出的结果只能说是总体特征的近似。

这里的测量就是抽样。测量的目的就是通过有限次的测量结果求出理论真值的近似