

常微分方程与控制论

武汉学术讨论会论文集

1987年11月

邓宗琦 吴克乾 梁肇军 廖晓昕 编

Ordinary Differential Equations
and Control Theory

Proceedings

WUHAN

1987,11

常微分方程与控制论

武汉学术讨论会论文集

1987年11月

Ordinary Differential Equations
and Control Theory

Proceedings, WUHAN

1987, 11

邓宗琦 吴克乾^{*} 编
梁肇军 廖晓昕

华中师范大学出版社

常微分方程与控制论

武汉学术讨论会论文集

1987年11月

邓宗琦 吴克乾 编
梁肇军 廖晓昕

*

华中师范大学出版社出版

(武昌桂子山)

开本: 787×1092 1/16 印张: 18.875 插页4 字数: 427千字

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

ISBN 7-5622-0242-7/O·25

印数1—1800 定价7.05元

前 言

1987年11月3日至6日常微分方程与控制论学术讨论会在华中师范大学(武汉)召开。出席会议的有复旦大学金福临教授、李训经教授, 南京大学何崇佑教授, 中科院数学所余澍祥研究员、王联研究员, 中山大学朱思铭教授, 厦门大学贺建勋教授, 安徽大学郑祖庠教授、张书年教授, 华南师范大学温立志教授等来自70多个单位的130多位专家、学者和研究生。讨论会收到学术论文100多篇。这些论文的内容涉及到常微分方程与控制论的各个领域。会议期间举行了四次大会, 由金福临、王联、余澍祥、朱思铭、郑祖庠、贺建勋、何崇佑、李训经等教授分别作了综合报告。本论文集是这次讨论会上交流的论文的一个选集, 由四部分组成: 一是综合报告, 共10篇; 二是专题论文, 共16篇; 三是论文摘要, 共27篇; 四是只列论文题目的题录, 共66篇(这部分论文多半已投其他刊物发表)。会议感谢叶彦谦教授、秦元勋教授, 的关心和支持。会议还要感谢湖北省暨武汉市数学学会路见可教授、齐民友教授、胡迪鹤教授、俞玉森教授的指导和帮助。本次学术讨论会由华中师范大学提供了全部经费资助, 受到了与会代表的一致称赞。

本文集所有人名排列, 均以作者、编者的姓氏笔划多少为序。

编 者

1988年4月

Preface

A Conference on Ordinary Differential Equations and Control Theory was held in Central China Normal University (Wuhan) during November 3-6, 1987. More than one hundred and thirty experts, scholars and postgraduates who came from more than seventy units attended this conference. Among these representations, there were Professors Jin Fulin, Li Xunjing of Fudan University, Professor He Chongyou of Nanjing University, Professors Yu Shuxiang, Wang Lian of Institute of Mathematics, Academia Sinica, Professor Zhu Siming of Zhongshan University, Professor He Jianxun of Xiamen University, Professors Zheng Zuxiu, Zhang Shunian of Anhui University, Professor Wen Lizhi of South China Normal University. In this conference more than one hundred papers were received. The contents of these papers concerned every field of ordinary differential equations and control theory. During the conference, Professors Jin Fulin, Wang Lian, Yu Shuxiang, Zhu Siming, Zheng Zuxiu, He Jianxun, He Chongyou, Li Xunjing and so on, gave invited special reports respectively. The present volume is a symposium of this conference. It includes four parts: survey papers, studies, research letters and list of titles of other papers which had been mostly submitted to other publications. We wish to express thanks to professors Ye Yanqian, Qin Yuanxun for their care and support. We also thank professors Lu Jianke, Qi Minyou, Yu Yusen, Hu Dihe of Mathematical Society of Hubei Province and Wuhan City for their directions and help. All funds of this conference were supported by Central China Normal University. This conference was identically acclaimed by the participants.

Editors

April 1988

目 录

综合报告

Gronwall—Bellman 不等式 综述	邓宗琦 阮士贵 (1)
常差分方程稳定性理论中的若干课题	王 联 (31)
微分方程定性理论的几个研究课题	叶彦谦 (57)
近年来国内常微分方程稳定性理论的发展	朱思铭 (71)
最优控制理论的发展	李训经 (81)
生物动力学系统中的几个研究问题	陈兰荪 梁肇军 (87)
关于连结轨线问题	余澍祥 (99)
不连续大系统的有限时间稳定性、实用稳定性与强实用稳定性	贺建勋 (103)
平面多项式微分系统分界线环研究近况	梁肇军 (119)
关于稳定性理论中若干问题的进展	廖晓昕 (137)

专题论文

一类二阶微分方程解的有界性	王国安 (147)
关于二阶非线性微分系统的振动性	关治洪 (153)
泛函微分方程稳定性的多个V函数法	李克难 (160)
直流电机运行的稳定性与可控性研究	张昌波 (167)
关于离散大系统的结构扰动与关联稳定	肖建海 (171)
关于平面二次系统极限环的(1,3)分布	杜星福 (176)
广义 Lasalle 不等式的一个应用	肖淑贤 (182)
论滞后系统的初始时刻	郑祖庥 (187)
n 阶非线性泛函微分方程解的渐近性质	俞元洪 (191)
区间矩阵稳定性理论在时变系统的稳定性中的应用	钟益林 (195)
时变线性系统的稳定性	高克强 (201)
关于线性时滞系统的稳定性	徐道义 (206)
具有 $(n-1)(n+2)/2$ 条直线解的 n 次微分系统不存在极限环	索光俭 孙纪方 (216)
无限时滞泛函微分方程的弱指数渐近稳定性	温立志 谢彦麟 (221)
一类中立型大系统的稳定性	谢胜利 (227)
一类一阶变系数时滞微分方程的振动性	廖六生 (237)

论文摘要

实矩阵 $A(a_{ij})_{n \times n}$ V—L 稳定的充要条件	方水金 罗 琦 (245)
关于自治系统的Ляпунов 定理的推广	王林山 (245)

一类离散动力系统的周期解与紊动 (chaos).....	王林山 (246)
一类变系数 n 阶线性方程的稳定性.....	尹录中 (247)
非自治系统的全局稳定性.....	王秉洪 (250)
几类时滞直接控制系统的绝对稳定性.....	王鹏国 (253)
二阶线性微分系统的振动性.....	阮士贵 邓宗琦 (254)
泛函微分方程描述的大系统的稳定性.....	阮士贵 (255)
Samuelson 问题 全局 稳定性.....	任永泰 王常潘 (256)
动力系统不变集的分歧.....	朱思铭 冯昭枢 (256)
微分方程的解关于部分变元的稳定性与有界性.....	刘碧玉 (258)
时变线性系统关于部分变元的稳定性.....	吴卫华 (259)
没有无限远奇点的平面二次向量场的仿射分类及全局结构.....	陈广卿 梁肇军 (260)
大系统的关联稳定性.....	肖冬梅 (261)
一类非线性系统关于部分变元的稳定性.....	肖会敏 (264)
泛函微分方程的 Liapunov 函数法.....	陈伯山 (266)
Banach 空间中一类微分方程的 整体 解.....	李 炜 (269)
关于直接控制系统的绝对稳定性准则.....	张 维 (268)
关于时滞控制系统的绝对稳定性.....	肖殿荒 (270)
一类三阶非线性微分方程解全局渐近稳定的充要条件.....	苏 醒 (271)
关于变系数殆线性系统的渐近等价性的进一步探讨.....	周正新 (274)
一类非齐次高阶抽象 Cauchy 问题的可解性和正则性.....	郑 权 (275)
无界时滞中立型系统的稳定性.....	唐忠宪 特古斯 (279)
几类中立型微分方程的稳定性.....	黄志刚 (280)
含参变量矩阵的稳定性.....	梁法驯 (282)
关于泛函微分方程的 Lipschitz 稳定性.....	傅予力 (277)
非线性系统的概周期解的存在性.....	曾唯尧 (284)

论文题录

CONTENTS

Survey Papers

- A Survey of Gronwall—Bellman Inequalities.....Deng Zongqi and Ruan Shigui (1)
- Some Problems on the Theory of Stability of Ordinary Difference Equations
.....Wang Lian (31)
- Several Problems on the Qualitative Theory of Differential Equations.....Ye Yanqian (57)
- The Development of Theory of Stability of Ordinary Differential Equations in China
for Recent Years.....Zhu Siming (71)
- The Development of Theory of Optimal Control.....Li Xunjing (81)
- Several Problems for Dynamic Systems in Biology
.....Chen Lansun and Liang Zhaojun (87)
- On the Problems for Trajectories Joining Critical Points.....Yu Shuxiang (99)
- Finite Time Stability, Practical Stability and Strong Practical Stability of Discontinuous
Large Scale Systems.....He Jianxun(103)
- The Recent Developments in the Studies of Separatrix Cycles of Plane Polynomial
Differential Systems.....Liang Zhaojun(119)
- The Progress of Some Problems on the Theory of Stability.....Liao Xiaoxin(137)

Studies

- Boundedness of Solutions for a Kind of Second Order Differential Equations
.....Wang Guoan(147)
- Oscillation Criteria for Second Order Nonlinear Differential Systems
.....Guan Zhihong(153)
- The Multi—V—Function Method on Stability of Functional Differential Equations
.....Li Kenan(160)
- Research for Stability and Controllability of Direct Current Machine Systems
.....Zhang Changbo(167)
- On Structural Perturbation and Connective Stability of Discrete Large Scale Systems
.....Xiao Jianhai (171)
- The (1,3)—Distribution of Limit Cycles of Plane Quadratic Systems.....Du Xingfu(176)
- Application of Extended Lasalle InequalityXiao Shuxian(182)
- On the Initial Time for Retarded Systems.....Zheng Zuxiu(187)
- Asymptotic Properties of Solutions of n -th Order Nonlinear Functional Differential
Equations.....Yu Yuanhong(191)
- Application of Theory for Stability of Interval Matrices to Stability of Time-Varying
Systems.....Zhong Yiling(195)
- Stability of Time-Varying Linear Systems.....Gao Keqiang(201)
- On the Stability of Retarded Linear Systems.....Xu Daoyi(206)
- The n —Degree Differential System with $(n-1)(n+2)/2$ Straight Line Solutions Has
No Limit Cycles.....Suo Guangjian and Sun Jifang(216)
- The Weakly Exponential Asymptotical Stability of Functional Differential Equations
with Infinite Delay.....Wen Lizhi and Xie Yanlin(221)
- Stability for a Kind of Large Scale Systems of Neutral Type.....Xie Shengli(227)

Oscillation Properties of a Class of First Order Retarded Differential Equations
.....Liao Liusheng(237)

Research Letters

The Necessary and Sufficient Condition of V—L Stability of Real Matrix $A(a_{ij})_{n \times n}$
.....Fang Shuijing and Luo Qi(245)

Generalization of Liapunov's Theorem on Stability.....Wang Linshan(245)

The Periodic Solutions and Chaos for a Class of Discrete Systems.....Wang Linshan(246)

Stability of a Class of n-th Order Time-Varying Linear Systems.....Yin Luzhong(247)

The Globally Asymptotic Stability of Some Non-autonomous Systems
.....Wang Binghong(250)

Absolute Stability of Several Kinds of Retarded Direct Control Systems
.....Wang Pengguo(253)

Oscillation for Second Order Linear Differential Systems
.....Ruan Shigui and Deng Zongqi(254)

Stability of Large Scale Systems Described by Functional Differential Equations
.....Ruan Shigui(255)

Overall Stability of Samuelson Problem.....Ren Yongtai and Wang Changpan(256)

Bifurcation for Invariant Sets of Dynamical Systems...Zhu Siming and Feng Zhaoshu(256)

Partial Stability and Boundedness of Solutions of Differential Equations.....Liu Biyu(258)

Partial Stability of Time-Varying Linear Systems.....Wu Weihua(259)

Affine Classification and Global Structure of Plane Quadratic Vector Field without
any Infinite Singular Points.....Chen Guangqin and Liang Zhaojun(260)

Connective Stability of Large Scale SystemsXiao Dongmei(261)

Partial Stability of a Class of Nonlinear Systems.....Xiao Huimin(264)

Liapunov Functions Method for Functional Differential Equations.....Chen Baishan(266)

Global Solutions of a Kind of Ordinary Differential Equations in Banach
Spaces.....Li Wei(269)

Absolute Stability Criteria for Direct Control Systems.....Zhang Wei(268)

On the Absolute Stability of Retarded Control Systems.....Xiao Dianhuang(270)

The Necessary and Sufficient Condition for Global Asymptotic Stability of Solutions
of a Kind of Third Order Nonlinear Differential Equations.....Su Xing(271)

Discussion on the Asymptotic Equivalence of Time-Varying Almost Linear Systems
.....Zhou Zhengxin(274)

On Solvability and Regularity of a Nonhomogeneous Higher Order Abstract Cauchy
Problem.....Zheng Quan(275)

Stability of Neutral Differential Systems with Unbounded Delay
.....Tang Zhongxian and Te Gusi(279)

Stability of Several Classes of Neutral Differential Equations.....Huang Zhigang(280)

Stability of Matrices Depending on Parametric Variables.....Liang Faxun(282)

On Lipschitz Stability for F. D. E.Fu Yuli(277)

The Existence of Almost Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations
.....Zeng Weiyao(284)

List of Tittles of Other Papers

Gronwall-Bellman 不等式综述

邓宗琦 阮士贵

(华中师范大学, 武汉)

摘 要

本文分别从线性不等式、Bihari 型非线性不等式、关于分布的不等式、含多个自变量的不等式、Wendroff 型偏积分不等式、带有时滞的不等式、离散型不等式、矩阵型不等式以及抽象空间的不等式等几个方面总结和综述了 Gronwall-Bellman 积分不等式的发展。

§1 前 言

1919 年 Gronwall 在文[47]中给出如下结果:

引理 1.1 若当 $t_0 \leq t \leq t_0 + h$ 时, 连续函数 $x(t)$ 满足不等式

$$0 \leq x(t) \leq \int_{t_0}^t [Mx(\tau) + A] d\tau, \quad (1.1)$$

其中 M 和 A 是非负常数, 则

$$0 \leq x(t) \leq Ah e^{Mh}, \quad (t_0 \leq t \leq t_0 + h). \quad (1.2)$$

这个不等式的特殊情形早在 1885 年 Peano 的论文[108]中就已出现, 因此, 可以说这种数学思想的出现已有 100 多年了。然而, 1943 年以前并未引起数学家们的注意。1943 年 Bellman 在文[17]中又独立地得到如下结果:

引理 1.2 如果

$$|x(t)| \leq M(1 + K \int_0^t |x(\tau)| |f(\tau)| d\tau), \quad (1.3)$$

成立, 其中 M, K 为非负常数, 则

$$|x(t)| \leq M \exp \left(KM \int_0^t |f(\tau)| d\tau \right). \quad (1.4)$$

这个不等式比 Gronwall 不等式更广。Bellman 的贡献还在于以这个不等式为工具, 对线性常微分方程组, 高阶线性方程的稳定性和二阶线性方程解的有界性、渐近性质进行了开创性研究, 并得到了一系列重要结果^[16, 17, 18]。正因为如此, 这一不等式通常被称为 Gronwall-Bellman 不等式。

1956 年以前关于 Gronwall-Bellman 不等式的工作主要是应用领域不断扩大, 不等式的推广仅见 1946 年 Guiliano 的工作[48], 进展不大。1956 年 Bihari^[20] 将不等式由线性推广到非线性情形。

引理 1.3 设 $x(t)$ 是在 $a \leq t \leq b$ 上定义的连续正函数, k, M 为非负常数, $W(u)$ 当 $u \geq$

0 时是非负非减连续函数, 如果

$$x(t) \leq k + M \int_a^t f(\tau) W(x(\tau)) d\tau, \quad (1.5)$$

则

$$x(t) \leq \Omega^{-1} \left[\Omega(k) + M \int_a^t f(\tau) d\tau \right], \quad 0 \leq t \leq b' \leq b, \quad (1.6)$$

其中 $\Omega(u) = \int_u^{\infty} \frac{ds}{W(s)}$, $u_0 > 0$, $u \geq u_0$, Ω^{-1} 是 Ω 的反函数, b' 选得当 $a \leq t \leq b'$ 时

$$\Omega(k) + M \int_a^t f(\tau) d\tau \in \text{Dom}(\Omega^{-1}),$$

这里 $\text{Dom}(\Omega^{-1})$ 表示 Ω^{-1} 的定义域。

Bihari 对 Gronwall 不等式作了突破性的工作, 同时为不等式的进一步发展和应用开创了一个新的局面。因此, 关于非线性情形的积分不等式通常被称为 Gronwall-Bellman-Bihari 型积分不等式。

1957 年 Opial^[71] 将不等式推广到 n 个未知函数的不等式组:

引理 1.4 设映射 $f: [0, \tau] \times R^n \rightarrow R^n$ 是连续的且对任何 $x, y \in R^n$, 满足

$$x \leq y \implies f(t, x) \leq f(t, y),$$

其中任意两点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 之间的关系 “ $\leq$ ” 意指

$$x \leq y \text{ 当且仅当 } x_i \leq y_i, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

如果连续函数 $u(t)$ 将 $[0, \tau]$ 映射到 R^n 内, 满足不等式

$$u(t) \leq \eta + \int_0^t f(s, u(s)) ds, \quad (1.7)$$

其中 $\eta \in R^n$, 则

$$u(t) \leq \phi(t), \quad (1.8)$$

其中 $\phi(t)$ 是积分方程

$$x(t) = \eta + \int_0^t f(s, x(s)) ds \quad (1.9)$$

的最大解。

Opial 的贡献不仅把 Gronwall-Bellman 不等式推广到 n 个未知函数的情形, 而且还第一次跟积分方程的最大解联系起来, 这种形式的不等式通常称为 Opial 不等式。

1960 年 Langenhop^[59] 在估计微分方程解的模的界限时给出了如下形式的 Gronwall-Bellman-Bihari 型反方向积分不等式

引理 1.5 设 $x(t)$, $f(t)$ 是定义在 $a \leq t \leq b$ 上的连续函数且 $|x(t)| > 0$, $f(t) \geq 0$, $W(u)$ 当 $u \geq 0$ 时是非负非减连续函数, 如果

$$x(t) \geq x(t_0) - \int_{t_0}^t f(\tau) W(x(\tau)) d\tau, \quad (1.10)$$

$a \leq t_0 < t \leq b$, 则有

$$|x(t)| \geq \Omega^{-1} \left(\Omega(|x(a)|) - \int_a^t f(\tau) d\tau \right) \quad (1.11)$$

对 $t \in [a, b]$, 只要

$$\Omega(|x(a)|) - \int_a^t f(\tau) d\tau \in \text{Dom}(\Omega^{-1}), \quad (1.12)$$

其中 $\Omega(u) = \int_{u_0}^u \frac{ds}{W(s)}$, $u_0 > 0$, $u \geq u_0$.

Langenhop 的贡献不仅在于建立了反方向的积分不等式, 而且成功地将此不等式用于估计微分方程解的下界。

1963年 Beekenback 和 Bellman 在专著[10]中给出了四个没有证明的不等式:

引理 1.6 设 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 为定义在 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 上的非负连续函数, $a(x) > 0$, $b(y) > 0$; $a'(x) \geq 0$, $b'(y) \geq 0$ 在 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 上连续, $c \geq 0$ 为常数。

I. 如果

$$u(x, y) \leq c + \int_0^y \int_0^x v(r, s) u(r, s) dr ds, \quad (1.13)$$

则有

$$u(x, y) \leq c \exp \int_0^y \int_0^x v(r, s) dr ds; \quad (1.14)$$

II. 如果

$$u(x, y) \leq a(x) + b(y) + \int_0^y \int_0^x v(r, s) u(r, s) dr ds, \quad (1.15)$$

则有

$$u(x, y) \leq \frac{[a(0) + b(y)][a(x) + b(0)]}{a(0) + b(0)} \exp \int_0^y \int_0^x v(r, s) dr ds; \quad (1.16)$$

III. 如果

$$u(x, y) \leq c + a \int_0^x u(s, y) ds + b \int_0^y u(x, s) ds, \quad (1.17)$$

则有

$$u(x, y) \leq c \exp(ax + by + abxy); \quad (1.18)$$

IV. 如果

$$u(x, y) \leq a(x) + b(y) + a \int_0^x u(s, y) ds + b \int_0^y u(x, s) ds, \quad (1.19)$$

则有

$$u(x, y) \leq \frac{\left[a(0) + b(0) + \int_0^y \exp(-by_1) b'(y_1) dy_1 \right] \left[a(0) + b(0) + \int_0^x \exp(-ax_1) a'(x_1) dx_1 \right]}{a(0) + b(0)} \times \exp(ax + by + abxy).$$

这四个不等式就是所谓的 Gronwall-Bellman-Wendroff 不等式。Wendroff 不等式不仅将 Gronwall-Bellman 不等式的变量由一个发展到两个, 并且使得 Gronwall-Bellman 不等式成为研究偏微分方程和积分方程解的性态的一个十分重要的工具。

六十年代以后, Gronwall-Bellman 不等式已引起数学家们的广泛注意, 关于不等式本身的研究工作十分活跃也十分吸引人, 已发表的大量研究工作对不等式作了各式各样的推广: 由线性到非线性, 由连续到离散, 由 Riemann 积分到 Stieltjes 积分, 由连续变量到时滞变量, 由一个积分项到多个积分项, 由一个自变量到多个自变量, 由单个方程到矩阵方程, 由一般方程到算子方程等等。同时, 不等式也被广泛用于研究常微分方程^[16, 56, 63, 113, 147], 差分方程^[125], 测度微分方程^[170], 微分差分方程^[19], 中立型微分方程^[52, 64, 118, 139-141, 171-173],

积分方程^[107,134,148], 积分微分方程^[85,149,150], 泛函微分方程^[9]及偏微分方程^[68,98,99]等解的各种性态, 如存在性、唯一性、连续依赖性、扰动性、有界性、稳定性、解的界限估计及误差估计等等有关定性性质。

本文试图对 Gronwall-Bellman 不等式进行总结和综述, 内容安排如下: §2 线性 Gronwall-Bellman 不等式; §3 Gronwall-Bellman-Bihari 不等式; §4 分布型 Gronwall-Bellman 不等式; §5 含多个自变量的 Gronwall-Bellman 不等式; §6 Gronwall-Bellman-Wendroff 不等式; §7 时滞型 Gronwall-Bellman 不等式; §8 离散型 Gronwall-Bellman 不等式; §9 矩阵型 Gronwall-Bellman 不等式; §10 抽象空间的 Gronwall-Bellman 不等式。

§2 线性 Gronwall-Bellman 不等式

1974年, Dhongade 和 Deo 专门讨论了适合于 Volterra 积分方程的线性 Gronwall-Bellman 不等式:

定理2.1^[41] 设 $x(t), h(t): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$; $f(t): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 且单调非减; $g(t): (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ 且 $x(t), h(t), f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $(0, \infty)$ 上是连续的, 若

$$x(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t h(\tau) x(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

则

$$x(t) \leq f(t) g(t) \exp \int_0^t h(\tau) g(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

早在1965年, Willett^[135]就将 Gronwall-Bellman 不等式推广到 n 个线性项的情形, 如下我们仍引述 Dhongade 和 Deo 改进了的结果:

定理2.2^[41] 设 $x(t), f(t)$ 同定理2.1, $g_i(t): (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$; $h_i(t): (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 且 g_i, h_i 连续, 若

$$x(t) \leq f(t) + \sum_{i=1}^n g_i(t) \int_0^t h_i(\tau) x_i(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

则

$$x(t) \leq E^n f, \quad (2.4)$$

其中 $E^i (i=1, 2, \dots, n)$ 定义为:

$$E^0 f = f,$$

$$E^k f = f(E^{k-1} g_k) \exp \left(\int_0^t h_k E^{k-1} g_k d\tau \right), \quad k=1, 2, \dots, n.$$

1964年 Jones 给出如下结果:

定理2.3^[54] 设 $x(t), f(t)$ 和 $g(t)$ 为 $0 \leq t \leq \tau$ 上的实值连续函数, 且 $g(t)$ 非负, 如果

$$x(t) \leq f(t) + \int_0^t g(s) x(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (2.5)$$

则

$$x(t) \leq f(t) + \int_0^t g(s) f(s) \exp \left[\int_s^t g(\theta) d\theta \right] ds, \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (2.6)$$

1975年 Pachpatte 将定理2.3推广为:

定理2.4^[80] 设 $x(t)$, $g(t)$ 和 $h(t)$ 为定义在 $I=[0, \infty)$ 上的实值非负连续函数, $f(t)$ 是 I 上的单调非减连续正函数, 如果

$$x(t) \leq f(t) + h(t) \left(\int_0^t g(s) x(s) ds \right), \quad t \in I, \quad (2.7)$$

则

$$x(t) \leq f(t) \left[1 + h(t) \left(\int_0^t g(s) \exp \left(\int_s^t h(\theta) g(\theta) d\theta \right) ds \right) \right], \quad t \in I. \quad (2.8)$$

Pachpatte 的进一步工作还有:

定理2.5^[74] 设 $x(t)$, $f(t)$ 和 $g(t)$ 是定义在 I 上的实值非负连续函数, 如果

$$x(t) \leq x_0 + \int_0^t f(\tau) x(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) \left(\int_0^\tau g(\theta) x(\theta) d\theta \right) d\tau, \quad t \in I, \quad (2.9)$$

其中 x_0 是非负常数, 则

$$x(t) \leq x_0 \left\{ 1 + \int_0^t f(\tau) \exp \left[\int_0^\tau (f(\theta) + g(\theta)) d\theta \right] d\tau \right\}, \quad t \in I. \quad (2.10)$$

最近(1987年), 孔庆凯和张炳根将定理2.4推广到多个积分项的情形。

定理2.6^[55] 设 $f(t)$, $g_i(t) \geq 0$, $h_i(t) \geq 0$ 在 I 上连续, 如果

$$x(t) \leq f(t) + \sum_{i=1}^n g_i(t) \int_0^t h_i(s) g_i(s) ds, \quad (2.11)$$

则

$$x(t) \leq A_n(f) + A_n(g_n) \int_0^t h_n A_n(f) \exp \left(\int_s^t h_n A_n(g_n) d\theta \right) ds, \quad (2.12)$$

其中 $A_k(u)$ ($k=1, 2, \dots, n$) 定义为:

$$A_1(u) = u,$$

$$A_{k+1}(u) = A_k(u) + A_k(g_k) \int_0^t h_k A_k(u) \exp \left(\int_s^t h_k A_k(g_k) d\theta \right) ds$$

Chu和Metcalf于1967年作了如下的

定理2.7^[32] 设 $x, f \in C(I)$, $I=[0, 1]$, $K(t, s) \in C(I \times I)$ 且非负, 如果

$$x(t) \leq f(t) + \int_0^t K(t, s) x(s) ds, \quad t \in I, \quad (2.13)$$

则

$$x(t) \leq f(t) + \int_0^t H(t, s) f(s) ds, \quad t \in I, \quad (2.14)$$

其中 $H(t, s) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t, s)$, $0 \leq \tau \leq 1$ 是预解核, 而 K_i 是 K 的迭代核。

1981年杨恩浩改进了以上结果。

定理2.8^[48] 设 $x(t)$, $m(t)$, $f(t) \in C[R_+, R_+]$, 且 $f(t) > 0$ 单调非减, $K(t, s) \in C[R_+ \times R_+, R_+]$ 且当 s 固定时关于 t 单调不减, 如果

$$x(t) \leq m(t) \left\{ f(t) + \int_0^t K(t, s) x(s) ds \right\}, \quad t \in R_+, \quad (2.15)$$

则

$$x(t) \leq f(t) m(t) \exp \int_0^t K(t, s) m(s) ds, \quad t \in R_+. \quad (2.16)$$

同一篇文章中, 杨恩浩还把定理2.5推广到含有 n 个积分项的情形。

定理2.9^[145] 设 $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, $x(t)$, $c_i(t) \in C[R_+, R_+]$ 都单调不减, $h_i(t, s) \in C[R_+ \times R_+, R_+]$ 且当 s 固定时对 t 单调不减, $f(t) > 0$ 及 $g_i(t) \in C[R_+, R_+]$ 且满足 $\frac{d}{dt} \left(\frac{g_i(t)}{f(t)} \right) \leq 0$, 当 $t \in R_+$ 时。如果

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t f(s) x(s) ds + \sum_{i=1}^n c_i(t) \int_0^t g_i(\tau) \left(\int_0^\tau h_i(\tau, s) x(s) ds \right) d\tau \quad (2.17)$$

则

$$x(t) \leq a(t) \left\{ 1 + b(t) \int_0^t f(\tau) \exp \left[b(t) \int_0^\tau f(s) ds + \sum_{i=1}^n \frac{c_i(t)}{b(t)} \int_0^\tau \frac{g_i(s)}{f(s)} h_i(t, s) ds \right] d\tau \right\} \quad (2.18)$$

关于线性型 Gronwall-Bellman 不等式的很多结果还可在 Jones^[54], Willett^[135], Agarwal^[3], Beesack^[11, 13], Chandra 和 Davis^[20], Deo 和 Murdeshwar^[38], Losonczi^[69], 彭如苗^[107], 杨恩浩^[147]等文献中找到。以上结果还被广泛地推广到 n 个自变量情形, 我们在后面再作介绍。

§3 Gronwall-Bellman-Bihari 不等式

非线性积分不等式的最早推广工作是李岳生1960年进行的。

定理3.1^[62] 设

(i) $p(t), q(t) \in C(I)$, $I = [-h, h]$, $p, q \geq 0$; $h > 0$ 是常数。

(ii) $\left\{ 1 + (1 - \alpha) x_0^{\alpha-1} \left| \int_{t_0}^t q(\tau) \exp(\alpha - 1) \int_{t_0}^\tau p(s) ds \right| d\tau \right\}^{\frac{1}{\alpha-1}} > 0$, $\alpha \geq 0, \alpha \neq 1, x_0 > 0, t_0 \in I$;

(iii) $x(t) \in C(I)$, $x(t) \geq 0$, 如果

$$x(t) \leq x_0 + \left| \int_{t_0}^t p(\tau) x(\tau) d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^t q(\tau) x^\alpha(\tau) d\tau \right|, \quad (3.1)$$

则

$$x(t) \leq x_0 \exp \left(\left| \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \right| \right) \left\{ 1 + (1 - \alpha) x_0^{\alpha-1} \left| \int_{t_0}^t q(\tau) \exp(\alpha - 1) \left| \int_{t_0}^\tau p(s) ds \right| d\tau \right| \right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (3.2)$$

1963年 Viswanatham 在一般情况下用逐步逼近法证明了如下结果:

定理3.2^[130] 设 $f(t, x)$ 在区域 $R: |t - t_0| \leq a, |x - \eta| \leq b$ 中 (a, b 是正实数) 是 x 的单调增加的连续函数; $\phi(t)$ 在 $|t - t_0| \leq a$ 中连续, $M(t)$ 是初值问题

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = \eta \quad (3.3)$$

的最大解, 又不等式

$$\phi(t) \leq \eta + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau \quad (3.4)$$

成立, 则

$$\phi(t) \leq M(t). \quad (3.5)$$

以前的很多结果均是本定理的特例, 事实上, (i) 当 $f(t, x) = |f(t)| - x$, $t_0 = 0$, $\eta = M$ 时, 就得 Bellman 不等式; (ii) 当 $f(t, x) = f(t)g(x)$, $f(t)$ 是非负函数, $g(x)$ 是单调函

数时, 就是 Bihari 和 Langenhop^[59] 不等式; (iii) 当 $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq w(t, |x_1 - x_2|)$ 时, 则本定理仍然成立, 这里 $w(t, v)$ 性质与 $f(t, x)$ 相同; (iv) 以上定理还改进了 Ziebur^[168] 的结果。

1971年 Butler 和 Rogers^[28] 将 Bihari 不等式推广到如下形式:

定理3.3^[28] 设 $x(t)$, $a(t)$, $b(t)$ 为 $c \leq t \leq d$ 上的有界正函数, $k(t, s)$ 在 $c \leq t \leq d$, $c \leq s \leq d$ 上非负有界; 又设 $x(t)$ 可测, $k(t, s)$ 对每个 t 在 $c \leq s \leq d$ 上关于 s 可测, $f(u) > 0$, $g(u) > 0$, $u \geq 0$; 且 $f(t)$ 严格增加, $g(t)$ 非减, 记 $A(t) = \sup_{c \leq s \leq t} a(s)$, $B(t) = \sup_{c \leq s \leq t} b(s)$, $K(t, s) = \sup_{s \leq \sigma \leq t} k(\sigma, s)$. 如果

$$f(x(t)) \leq a(t) + b(t) \int_c^t k(t, s) g(x(s)) ds, \quad c \leq t \leq d, \quad (3.6)$$

则

$$x(t) \leq f^{-1} \left\{ \Omega^{-1} \left[\Omega(A(t)) + B(t) \int_c^t K(t, s) ds \right] \right\}, \quad c \leq t \leq d' \leq d, \quad (3.7)$$

其中 $\Omega(u) = \int_c^u \frac{ds}{g(f^{-1}(s))}$, $s > 0$, $u > 0$, 而

$$d' = \max \left\{ c \leq \tau \leq d: \Omega(A(\tau)) + B(\tau) \int_c^\tau K(\tau, s) ds \leq \Omega(f(\infty)) \right\}.$$

不等式(3.7)改进了 Gollwitzer^[46], Willett^[134] 的有关结果, Rogers 的进一步工作还有[113, 114]。

1973年 Lakshmikantham^[57] 利用常数变易法和比较原理^[58] 推广了定理3.3。

定理3.4^[57] 设 $x(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t) \in C[I, R_+]$, $I = [t_0, T_0]$, $f, h \in C[R_+, R_+]$, f 严格增加, g 非减, $k \in C[I \times I, R_+]$, $W \in C[I \times R_+, R_+]$ 且对每个 t 关于 u 非减, 记 $A(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t} a(s)$, $B(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t} b(s)$, $C(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t} c(s)$, $K(t, s) = \sup_{s \leq \sigma \leq t} k(\sigma, s)$, 如果

$$f(x(t)) \leq a(t) + b(t) h[c(t) + \int_c^t k(t, s) W(s, x(s)) ds], \quad t \in I, \quad (3.8)$$

则

$$(I) \quad x(t) \leq f^{-1} \{ a(t) + b(t) h[r_1(t, t_0, C(t))] \}, \quad t \in I_0 \subset I,$$

其中 $I_0 = \{t \in I: a(t) + b(t) h(r_1(t, t_0, C(t))) \in \text{Dom} f^{-1}\}$, $r_1(T, t_0, r_{10})$ 是初值问题

$$r_1' = K(T, t) W[t, f^{-1}(a(t) + b(t) h(r_1))], \quad r_1(t_0) = r_{10}, \quad t_0 \in I_{10}$$

的最大解 (在 $I_1 \subset I$ 上);

(II) 若另外设 $h_u(u)$ 存在, 连续且非减, 则

$$x(t) \leq f^{-1} [r_2(t, t_0, A(t) + B(t) h(C(t)))], \quad t \in I_{20} \subset I, \quad (3.9)$$

其中 $r_2(T, t_0, r_{20})$ 是初值问题

$$r_2' = B(T) h_u \left[h^{-1} \left(\frac{r_2 - A(T)}{B(T)} \right) \right] K(T, t) W(t, f^{-1}(r_2)), \quad r_2(t_0) = r_{20}, \quad t_0 \in I_{20}$$

的最大解 (在 $I_1 \subset I$ 上)。

Lakshmikantham 将这种类型的不等式称为 Gronwall-Bellman-Reid 型不等式, Lakshmikantham^[57] 的方法后来被广泛地用于推广和发展各式各样的 Gronwall-Bellman 不等式, 如 1977 年 Beesack^[12] 考虑形如

$$f(x(t)) \leq a(t) + H(t, \int_a^t W(t, \tau, x(\tau)) d\tau), \quad t \in I = [a, b]$$

的不等式, $f(t)$ 连续单调, 于是可推出

$$x(t) \leq f^{-1}[\alpha(t) + H(t, \bar{r}(t))], \alpha \leq t \leq b_1 \leq b,$$

其中 $\bar{r}(t) = r(t, T, \alpha)$ 是初值问题

$$r' = W(T, t, f^{-1}[\alpha(t) + H(t, r)]), r(\alpha) = 0$$

的最大解。Beesack^[13]还介绍了许多其他有趣的结果。

1973年 Pachpatte 也建立了如下 Reid 型不等式:

定理 3.5^[74] 设 $x(t), \alpha(t), b(t) \in C[I, R^+]$, T 是连续算子映 $C(I)$ 到 $C(I)$, 对任意两个连续函数 $u, v \in C[I, R^+]$, T 满足 $u(t) \leq v(t) \Rightarrow Tu \leq Tv, 0 \leq t \leq t_1, t_1 \in I$; 又设 $f, h \in C[R^+, R_+]$, f 严格增加, h 非减, $k \in C[I \times I, R^+]$, 如果

$$f(x(t)) \leq \alpha(t) + b(t)h[c(t) + \int_0^t k(\tau, s)g(s, x(s), Tx(s))ds] \quad (3.10)$$

其中 $g(t, x, y) \in C[I \times R_+ \times C(I), R_+]$ 且对每个固定的 $t \in I$ 关于 x, y 单增, 则

$$x(t) \leq f^{-1}[\alpha(t) + b(t)h(c(t) + r(t))], t \in I_0 \quad (3.11)$$

$I_0 = \{t \in I: \alpha(t) + b(t)h(c(t) + r(t)) \in \text{Dom} f^{-1}\}$, $r(t)$ 是初值问题

$$r'(t) = k(\tau, t)g(t, f^{-1}[\alpha(t) + b(t)h(c(t) + r(t))], Tf^{-1}[\alpha(t) + b(t)h(c(t) + r(t))]), \\ r(t_0) = 0, t_0 \in I_0 \text{ 的最大解。}$$

1973年 Dhongade 和 Deo 沿 Bihari 的方向得到如下结果:

定理 3.6^[40] 设

(i) $x(t), f(t), g(t): (Q, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 且在 $I = (0, \infty)$ 内连续;

(ii) $W(u)$ 连续、非负、单调非减且次可乘 ($u > 0$);

(iii) $x(t) \leq k + \int_0^t f(\tau)x(\tau)d\tau + \int_0^t g(\tau)W(x(\tau))d\tau, t \in I, k > 0$ 为常数;

则

$$x(t) \exp\left(-\int_0^t f(\tau)d\tau\right) \leq \Omega^{-1}[\Omega(k) + \int_0^t g(\tau) \exp\left(\int_0^\tau f(s)ds\right)d\tau] \quad (3.12)$$

其中 $\Omega(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{W(s)}, u \geq u_0 > 0, 0 < t \leq b, b$ 选得当 $0 < t \leq b$ 时有

$$\Omega(k) + \int_0^t g(\tau) \exp\left(\int_0^\tau f(s)ds\right)d\tau \in \text{Dom}(\Omega^{-1}).$$

定理 3.7^[40] (i), (ii) 同定理 3.5, (iii) $W(u)$ 次可加, $p(t) > 0, \Psi(t) \geq 0$ 非减, 连续 ($t > 0$), 如果

$$x(t) \leq p(t) + \int_0^t f(\tau)x(\tau)d\tau + \Psi\left(\int_0^t g(\tau)W(x(\tau))d\tau\right) \quad (3.13)$$

则

$$x(t) \exp\left(-\int_0^t f(\tau)d\tau\right) \leq p(t) + \Psi\left\{\Omega^{-1}\left(\Omega\left[\int_0^t g(s)W(p(s) \exp\int_0^s f(\tau)d\tau)ds\right] + \int_0^t g(s)W\left(\exp\int_0^s f(\tau)d\tau\right)ds\right)\right\}, 0 \leq x \leq b, \quad (3.14)$$

其中 $\Omega(u) = \int_u^\infty \frac{ds}{W(\Psi(s))}, 0 < u_0 \leq u$, 只要

$$\Omega\left[\int_0^t g(s)W(p(s) \exp\int_0^s f(\tau)d\tau)ds\right] + \int_0^t g(s)W\left(\exp\int_0^s f(\tau)d\tau\right)ds \in \text{Dom}(\Omega^{-1})$$