常微分方程与控制论

武汉学术讨论会论文集
1987年11月

邓宗琦　吴克乾　梁肇军　廖晓昕　编

Ordinary Differential Equations and Control Theory

Proceedings　WUHAN

1987,11

华中师范大学出版社 · 1988年

常微分方程与控制论

武汉学术讨论会论文集

1987年11月

Ordinary Differential Equations and Control Theory

Proceedings, WUHAN

1987, 11

邓宗琦　吴克乾
梁肇军　廖晓昕　编

华中师范大学出版社

常 微 分 方 程 与 控 制 论

武汉学术讨论会论文集

1987年11月

邓宗琦　吴克乾　编
梁肇军　廖晓昕

*

华中师范大学出版社出版

（武昌桂子山）

开本：787×1092　1/16　印张：18.875　插页4　字数：427千字

1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷

ISBN 7-5622-0242-7/O·25

印数1—1800　定价7.05元

前　言

1987年11月3日至6日常微分方程与控制论学术讨论会在华中师范大学（武汉）召开。出席会议的有复旦大学金福临教授、李训经教授，南京大学何崇佑教授，中科院数学所余澍祥研究员、王联研究员，中山大学朱思铭教授，厦门大学贺建勋教授，安徽大学郑祖庥教授、张书年教授，华南师范大学温立志教授等来自70多个单位的130多位专家、学者和研究生。讨论会收到学术论文100多篇。这些论文的内容涉及到常微分方程与控制论的各个领域。会议期间举行了四次大会，由金福临、王联、余澍祥、朱思铭、郑祖庥、贺建勋、何崇佑、李训经等教授分别作了综合报告。本论文集是这次讨论会上交流的论文的一个选集，由四部分组成：一是综合报告，共10篇；二是专题论文，共16篇；三是论文摘要，共27篇；四是只列论文题目的题录，共66篇（这部分论文多半已投其他刊物发表）。会议感谢叶彦谦教授、秦元勋教授，的关心和支持。会议还要感谢湖北省暨武汉市数学学会路见可教授、齐民友教授、胡迪鹤教授、俞玉森教授的指导和帮助。本次学术讨论会由华中师范大学提供了全部经费资助，受到了与会代表的一致称赞。

本文集所有人名排列，均以作者、编者的姓氏笔划多少为序。

编　者

1988年4月

Proface

A Conference on Ordinary Differential Equations and Control Theory was held in Central China Normal University (Wuhan) during November 3-6, 1987. More than one hundred and thirty experts, scholars and postgraduates who came from more than seventy units attended this conference. Among these representations, there were Professors Jin Fulin, Li Xunjing of Fudan University, Professor He Chongyou of Nanjing University, Professors Yu Shuxiang, Wang Lian of Institute of Mathematics, Academia Sinica, Professor Zhu Siming of Zhongshan University, Professor He Jianxun of Xiamen University, Professors Zheng Zuxiu, Zhang Shunian of Anhui University, Professor Wen Lizhi of South China Normal University. In this conference more than one hundred papers were received. The contents of these papers concerned every field of ordinary differential equations and control theory. During the conference, Professors Jin Fulin, Wang Lian, Yu Shuxiang, Zhu Siming, Zheng Zuxiu, He Jianxun, He Chongyou, Li Xunjing and so on, gave invited special reports respectively. The present volume is a symposium of this conference. It includes four parts: survey papers, studies, research letters and list of tittles of other papers which had been mostly submitted to other publications. We wish to express thanks to professors Ye Yanqian, Qin Yuanxun for their care and support. We also thank professors Lu Jianke, Qi Minyou, Yu Yusen, Hu Dihe of Mathematical Society of Hubei Province and Wuhan City for their directions and help. All funds of this conference were supported by Central China Normal University. This conference was identically acclaimed by the participants.

Editors

April 1988

目 录

综合报告

专题论文

论文摘要

论文题录

CONTENTS

Research Letters

List of Tittles of Other Papers

Gronwall-Bellman 不等式综述

邓宗琦 阮士贵
（华中师范大学，武汉）

摘 要

本文分别从线性不等式、Bihari 型非线性不等式、关于分布的不等式、含多个自变量的不等式、Wendroff 型偏积分不等式、带有时滞的不等式、离散型不等式、矩阵型不等式以及抽象空间的不等式等几个方面总结和综述了 Gronwall-Bellman 积分不等式的发展。

§1 前 言

1919 年 Gronwall 在文[47]中给出如下结果：

引理 1.1 若当 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 时，连续函数 $x(t)$ 满足不等式

$$0\leqslant x(t)\leqslant\int_{t_0}^{t}[Mx(\tau)+A]d\tau, \tag{1.1}$$

其中 M 和 A 是非负常数，则

$$0\leqslant x(t)\leqslant Ahe^{Mh},\ (t_0\leqslant t\leqslant t_0+h). \tag{1.2}$$

这个不等式的特殊情形早在 1885 年 Peano 的论文[108]中就已出现，因此，可以说这种数学思想的出现已有 100 多年了。然而，1943 年以前并未引起数学家们的注意。1943 年 Bellman 在文[17]中又独立地得到如下结果：

引理 1.2 如果

$$|x(t)|\leqslant M(1+K\int_0^t|x(\tau)||f(\tau)|d\tau), \tag{1.3}$$

成立，其中 M,K 为非负常数，则

$$|x(t)|\leqslant M\exp\left(KM\int_0^t|f(\tau)|d\tau\right). \tag{1.4}$$

这个不等式比 Gronwall 不等式更广。Bellman 的贡献还在于以这个不等式为工具，对线性常微分方程组，高阶线性方程的稳定性和二阶线性方程解的有界性、渐近性质进行了开创性研究，并得到了一系列重要结果[16,17,18]。正因为如此，这一不等式通常被称为 Gronwall-Bellman 不等式。

1956 年以前关于 Gronwall-Bellman 不等式的工作主要是应用领域不断扩大，不等式的推广仅见 1946 年 Guiliano 的工作[48]，进展不大。1956 年 Bihari[20] 将不等式由线性推广到非线性情形。

引理 1.3 设 $x(t)$ 是在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上定义的连续正函数，k,M 为非负常数，$W(u)$ 当 $u\geqslant$

0 时是非负非减连续函数，如果

$$x(t)\leqslant k+M\int_a^t f(\tau)W(x(\tau))\,d\tau, \tag{1.5}$$

则

$$x(t)\leqslant \Omega^{-1}\left[\Omega(k)+M\int_a^t f(\tau)d\tau\right],\quad 0\leqslant t\leqslant b'\leqslant b, \tag{1.6}$$

其中 $\Omega(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{W(s)}$，$u_0>0$，$u\geqslant u_0$，$\Omega^{-1}$ 是 Ω 的反函数，b' 选得当 $a\leqslant t\leqslant b'$ 时

$$\Omega(k)+M\int_a^t f(\tau)d\tau\in \mathrm{Dom}(\Omega^{-1}),$$

这里 $\mathrm{Dom}(\Omega^{-1})$表示 Ω^{-1} 的定义域。

Bihari 对 Gronwall 不等式作了突破性的工作，同时为不等式的进一步发展和应用开创了一个新的局面。因此，关于非线性情形的积分不等式通常被称为 Gronwall-Bellman-Bihari 型积分不等式。

1957 年 Opial[71] 将不等式推广到 n 个未知函数的不等式组：

引理 1.4 设映射 f：$[0,\tau]\times R^n\to R^n$ 是连续的且对任何 $x,y\in R^n$，满足

$$x\leqslant y\Longrightarrow f(t,x)\leqslant f(t,y),$$

其中任意两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$之间的关系“$\leqslant$”意指

$$x\leqslant y \text{ 当且仅当 } x_i\leqslant y_i,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

如果连续函数 $u(t)$将$[0,\tau]$映射到 R^n 内，满足不等式

$$u(t)\leqslant \eta+\int_0^t f(s,u(s))ds, \tag{1.7}$$

其中 $\eta\in R^n$，则

$$u(t)\leqslant \phi(t), \tag{1.8}$$

其中 $\phi(t)$是积分方程

$$x(t)=\eta+\int_0^t f(s,x(s))ds \tag{1.9}$$

的最大解。

Opial 的贡献不仅把 Gronwall-Bellman 不等式推广到 n 个未知函数的情形，而且还第一次跟积分方程的最大解联系起来，这种形式的不等式通常称为 Opial 不等式。

1960 年 Langenhop[59] 在估计微分方程解的模的界限时给出了如下形式的 Gronwall-Bellman-Bihari 型反方向积分不等式

引理 1.5 设 $x(t)$，$f(t)$是定义在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续函数且$|x(t)|>0$，$f(t)\geqslant 0$，$W(u)$ 当 $u\geqslant 0$ 时是非负非减连续函数，如果

$$x(t)\geqslant x(t_0)-\int_{t_0}^t f(\tau)W(x(\tau))d\tau, \tag{1.10}$$

$a\leqslant t_0<t\leqslant b$，则有

$$|x(t)|\geqslant \Omega^{-1}\left(\Omega(|x(a)|)-\int_a^t f(\tau)d\tau\right) \tag{1.11}$$

对 $t\in[a,b]$，只要

$$\Omega(|x(a)|)-\int_a^t f(\tau)d\tau\in \mathrm{Dom}(\Omega^{-1}), \tag{1.12}$$

其中 $\Omega(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{W(s)}$，$u_0>0$，$u\geqslant u_0$.

Langenhop 的贡献不仅在于建立了反方向的积分不等式，而且成功地将此不等式用于估计微分方程解的下界。

1963年 Beekenback 和 Bellman 在专著[10]中给出了四个没有证明的不等式：

引理 1.6 设 $u(x,y)$，$v(x,y)$为定义在 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 上的非负连续函数，$a(x)>0, b(y)>0$；$a'(x)\geqslant0$，$b'(y)\geqslant0$ 在 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 上连续，$c\geqslant0$ 为常数。

I. 如果

$$u(x,y)\leqslant c+\int_0^y\int_0^x v(r,s)u(r,s)drds, \tag{1.13}$$

则有

$$u(x,y)\leqslant c\exp\int_0^y\int_0^x v(r,s)dr\,ds; \tag{1.14}$$

II. 如果

$$u(x,y)\leqslant a(x)+b(y)+\int_0^y\int_0^x v(r,s)u(r,s)drds, \tag{1.15}$$

则有

$$u(x,y)\leqslant\frac{[a(0)+b(y)][a(x)+b(0)]}{a(0)+b(0)}\exp\int_0^y\int_0^x v(r,s)dr\,ds; \tag{1.16}$$

III. 如果

$$u(x,y)\leqslant c+a\int_0^x u(s,y)ds+b\int_0^y u(x,s)ds, \tag{1.17}$$

则有

$$u(x,y)\leqslant c\exp(ax+by+abxy); \tag{1.18}$$

IV. 如果

$$u(x,y)\leqslant a(x)+b(y)+a\int_0^x u(s,y)ds+b\int_0^y u(x,s)ds, \tag{1.19}$$

则有

$$u(x,y)\leqslant\frac{\left[a(0)+b(0)+\int_0^y\exp(-by_1)b'(y_1)dy_1\right]\left[a(0)+b(0)+\int_0^x\exp(-ax_1)a'(x_1)dx_1\right]}{a(0)+b(0)}\times\exp(ax+by+abxy).$$

这四个不等式就是所谓的 Gronwall-Bellman-Wendroff 不等式。Wendroff 不等式不仅将 Gronwall-Bellman 不等式的变量由一个发展到两个，并且使得 Gronwall-Bellman 不等式成为研究偏微分方程和积分方程解的性态的一个十分重要的工具。

六十年代以后，Gronwall-Bellman 不等式已引起数学家们的广泛注意，关于不等式本身的研究工作十分活跃也十分吸引人，已发表的大量研究工作对不等式作了各式各样的推广：由线性到非线性，由连续到离散，由 Riemann 积分到 Stieltjes 积分，由连续变量到时滞变量，由一个积分项到多个积分项，由一个自变量到多个自变量，由单个方程到矩阵方程，由一般方程到算子方程等等。同时，不等式也被广泛用于研究常微分方程[16,56,63,113,147]，差分方程[125]，测度微分方程[170]，微分差分方程[19]，中立型微分方程[52;64;118;139-141;171-173]，

积分方程[107,134,148]，积分微分方程[85,149,150]，泛函微分方程[9]及偏微分方程[68,96,98]等解的各种性态，如存在性、唯一性、连续依赖性、扰动性、有界性、稳定性、解的界限估计及误差估计等等有关定性性质。

本文试图对 Gronwall-Bellman 不等式进行总结和综述，内容安排如下：§2 线性 Gronwall-Bellman 不等式；§3 Gronwall-Bellman-Bihari 不等式；§4 分布型 Gronwall-Bellman 不等式；§5 含多个自变量的 Gronwall-Bellman 不等式；§6 Gronwall-Bellman-Wendroff 不等式；§7 时滞型 Gronwall-Bellman 不等式；§8 离散型 Gronwall-Bellman 不等式；§9 矩阵型 Gronwall-Bellman 不等式；§10 抽象空间的 Gronwall-Bellman 不等式。

§2 线性 Gronwall-Bellman 不等式

1974年，Dhongade 和 Deo 专门讨论了适合于 Volterra 积分方程的线性Gronwall-Bellman 不等式：

定理2.1[41] 设 $x(t)$，$h(t)$：$(0,\infty)\to(0,\infty)$；$f(t)$：$(0,\infty)\to(0,\infty)$且单调非减；$g(t)$：$(0,\infty)\to(1,\infty)$且 $x(t)$，$h(t)$，$f(t)$和 $g(t)$在$(0,\infty)$上是连续的，若

$$x(t)\leqslant f(t)+g(t)\int_0^t h(\tau)x(\tau)d\tau, \tag{2.1}$$

则

$$x(t)\leqslant f(t)g(t)\exp\int_0^t h(\tau)g(\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

早在1965年，Willett[135]就将 Gronwall-Bellman 不等式推广到 n 个线性项的情形，如下我们仍引述 Dhongade 和 Deo 改进了的结果：

定理2.2[41] 设 $x(t)$，$f(t)$同定理2.1，$g_i(t)$：$(0,\infty)\to(1,\infty)$；$h_i(t)$：$(0,\infty)\to(0,\infty)$且 g_i，h_i 连续，若

$$x(t)\leqslant f(t)+\sum_{i=1}^{n} g_i(t)\int_0^t h_i(\tau)x_i(\tau)d\tau, \tag{2.3}$$

则

$$x(t)\leqslant E^n f, \tag{2.4}$$

其中 $E^i(i=1,2,\cdots,n)$定义为：

$$E^0 f=f,$$

$$E^k f=f(E^{k-1}g_k)\exp\left(\int_0^t h_k E^{k-1} g_k d\tau\right),\quad k=1,2,\cdots,n.$$

1964年 Jones 给出如下结果：

定理2.3[54] 设 $x(t)$，$f(t)$和 $g(t)$为 $0\leqslant t\leqslant\tau$ 上的实值连续函数，且 $g(t)$ 非负，如果

$$x(t)\leqslant f(t)+\int_0^t g(s)x(s)ds,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau, \tag{2.5}$$

则

$$x(t)\leqslant f(t)+\int_0^t g(s)f(s)\exp\left[\int_s^t g(\theta)\,d\theta\right]ds,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau. \tag{2.6}$$

1975年 Pachpatte 将定理2.3推广为：

定理2.4[80] 设 $x(t)$，$g(t)$和$h(t)$为定义在$I=[0,\infty)$上的实值非负连续函数，$f(t)$是I上的单调非减连续正函数，如果

$$x(t)\leqslant f(t)+h(t)\left(\int_0^t g(s)\,x(s)\,ds\right),\quad t\in I, \tag{2.7}$$

则

$$x(t)\leqslant f(t)\left[\,1+h(t)\left(\int_0^t g(s)\exp\left(\int_s^t h(\theta)g(\theta)\,d\theta\right)ds\right)\right],\quad t\in I. \tag{2.8}$$

Pachpatte 的进一步工作还有：

定理2.5[74] 设 $x(t)$，$f(t)$和$g(t)$是定义在I上的实值非负连续函数，如果

$$x(t)\leqslant x_0+\int_0^t f(\tau)x(\tau)d\tau+\int_0^t f(\tau)\left(\int_0^\tau g(\theta)x(\theta)\,d\theta\right)d\tau,\quad t\in I, \tag{2.9}$$

其中 x_0 是非负常数，则

$$x(t)\leqslant x_0\left\{1+\int_0^t f(\tau)\exp\left[\int_0^\tau (f(\theta)+g(\theta))d\theta\right]d\tau\right\},\quad t\in I. \tag{2.10}$$

最近(1987年)，孔庆凯和张炳根将定理2.4推广到多个积分项的情形。

定理2.6[55] 设 $f(t)$，$g_i(t)\geqslant 0$，$h_i(t)\geqslant 0$在I上连续，如果

$$x(t)\leqslant f(t)+\sum_{i=1}^n g_i(t)\int_0^t h_i(s)g_i(s)\,ds, \tag{2.11}$$

则

$$x(t)\leqslant A_n(f)+A_n(g_n)\int_0^t h_n A_n(f)\exp\left(\int_s^t h_n A_n(g_n)d\theta\right)ds, \tag{2.12}$$

其中 $A_k(u)(k=1,2,\cdots,n)$定义为：

$$A_1(u)=u,$$

$$A_{k+1}(u)=A_k(u)+A_k(g_k)\int_0^t h_k A_k(u)\exp\left(\int_s^t h_k A_k(g_k)\,d\theta\right)ds$$

Chu和 Metcalf 于1967年作了如下的

定理2.7[32] 设 x，$f\in C(I)$，$I=[0,1]$，$K(t,y)\in C(I\times I)$且非负，如果

$$x(t)\leqslant f(t)+\int_0^t K(t,s)x(s)ds,\quad t\in I, \tag{2.13}$$

则

$$x(t)\leqslant f(t)+\int_0^t H(t,s)f(s)ds,\ t\in I, \tag{2.14}$$

其中$H(t,s)=\sum_{i=1}^\infty K_i(t,s), 0\leqslant\tau\leqslant 1$是预解核，而$K_i$是$K$的迭代核。

1981年杨恩浩改进了以上结果。

定理2.8[145] 设 $x(t)$，$m(t)$，$f(t)\in C[R_+,R_+]$，且$f(t)>0$单调非减，$K(t,s)\in C[R_+\times R_+,R_+]$且当$s$固定时关于$t$单调不减，如果

$$x(t)\leqslant m(t)\left\{f(t)+\int_0^t K(t,s)x(s)ds\right\},\quad t\in R_+, \tag{2.15}$$

则

$$x(t)\leqslant f(t)m(t)\exp\int_0^t K(t,s)m(s)ds,\quad t\in R_+. \tag{2.16}$$

同一篇文章中，杨恩浩还把定理2.5推广到含有 n 个积分项的情形。

定理2.9[145] 设 $a(t)>0$，$b(t)>0$，$x(t)$，$c_i(t)\in C[R_+,R_+]$都单调不减，$h_i(t,s)\in C[R_+\times R_+,R_+]$且当 s 固定时对 t 单调不减，$f(t)>0$ 及 $g_i(t)\in C[R_+,R_+]$且满足 $\frac{d}{dt}\left(\frac{g_i(t)}{f(t)}\right)\leqslant 0$，当 $t\in R_+$时。如果

$$x(t)\leqslant a(t)+b(t)\int_0^t f(s)x(s)ds+\sum_{i=1}^n c_i(t)\int_0^t g(\tau)\left(\int_0^\tau h_i(\tau,s)x(s)ds\right)d\tau \tag{2.17}$$

则

$$x(t)\leqslant a(t)\left\{1+b(t)\int_0^t f(\tau)\exp\left[b(t)\int_0^\tau f(s)ds+\sum_{i=1}^n\frac{c_i(t)}{b(t)}\int_0^\tau\frac{g_i(s)}{f(s)}h_i(t,s)ds\right]d\tau\right\} \tag{2.18}$$

关于线性型 Gronwall-Bellman 不等式的很多结果还可在 Jones[54]，Willett[135]，Agarwal[3]，Beesack[11, 13]，Chandra 和 Davis[29]，Deo 和 Murdeshwar[38]，Losonczi[69]，彭如苗[107]，杨恩浩[147]等文献中找到。以上结果还被广泛地推广到 n 个自变量情形，我们在后面再作介绍。

§3 Gronwall-Bellman-Bihari 不等式

非线性积分不等式的最早推广工作是李岳生1960年进行的。

定理3.1[62] 设

(i) $p(t)$，$q(t)\in C(I)$，$I=[-h,h]$，$p,q\geqslant 0$；$h>0$是常数

(ii) $\left\{1+(1-\alpha)x_0^{\alpha-1}\left|\int_{t_0}^t q(\tau)\exp(\alpha-1)\int_{t_0}^\tau p(s)ds\right|d\tau\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}>0, \alpha\geqslant 0, \neq 1, x_0>0, t_0\in I$;

(iii) $x(t)\in C(I)$，$x(t)\geqslant 0$，如果

$$x(t)\leqslant x_0+\left|\int_{t_0}^t p(\tau)x(\tau)d\tau\right|+\left|\int_{t_0}^t q(\tau)x^\alpha(\tau)d\tau\right|, \tag{3.1}$$

则

$$x(t)\leqslant x_0\exp\left(\left|\int_{t_0}^t p(\tau)d\tau\right|\right)\left\{1+(1-\alpha)x_0^{\alpha-1}\left|\int_{t_0}^t q(\tau)\exp(\alpha-1)\left|\int_{t_0}^\tau p(s)ds\right|d\tau\right|\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}, \tag{3.2}$$

1963年 Viswanatham 在一般情况下用逐步逼近法证明了如下结果：

定理3.2[130] 设 $f(t,x)$在区域 R：$|t-t_0|\leqslant a$，$|x-\eta|\leqslant b$ 中（a,b 是正实数）是 x 的单调增加的连续函数；$\phi(t)$在$|t-t_0|\leqslant a$ 中连续，$M(t)$是初值问题

$$y'(t)=f(t,y),\quad y(t_0)=\eta \tag{3.3}$$

的最大解，又不等式

$$\phi(t)\leqslant\eta+\int_{t_0}^t f(\tau,\phi(\tau))d\tau \tag{3.4}$$

成立，则

$$\phi(t)\leqslant M(t). \tag{3.5}$$

以前的很多结果均是本定理的特例，事实上，(i) 当$f(t,x)=|f(t)|-x$，$t_0=0$，$\eta=M$ 时，就得 Bellman 不等式；(ii) 当 $f(t,x)=f(t)g(x)$，$f(t)$ 是非负函数，$g(x)$ 是单调函

数时，就是Bihari和Langenhop[59]不等式；(iii) 当$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant w(t,|x_1-x_2|$时，则本定理仍然成立，这里$w(t,v)$性质与$f(t,x)$相同；(iv) 以上定理还改进了Ziebur[166]的结果。

1971年Butler和Rogers[28]将Bihari不等式推广到如下形式：

定理3.3[28] 设$x(t)$，$a(t)$，$b(t)$为$c\leqslant t\leqslant d$上的有界正函数，$k(t,s)$在$c\leqslant t\leqslant d$，$c\leqslant s\leqslant d$上非负有界；又设$x(t)$可测，$k(t,s)$对每个t在$c\leqslant s\leqslant d$上关于s可测，$f(u)>0$，$g(u)>0$，$u\geqslant 0$；且$f(t)$严格增加，$g(t)$非减，记$A(t)=\sup\limits_{c\leqslant s\leqslant t}a(s)$，$B(t)=\sup\limits_{c\leqslant s\leqslant t}b(s)$，$K(t,s)=\sup\limits_{s\leqslant\sigma\leqslant t}k(\sigma,s)$. 如果

$$f(x(t))\leqslant a(t)+b(t)\int_c^t k(t,s)g(x(s))ds,\quad c\leqslant t\leqslant d, \tag{3.6}$$

则

$$x(t)\leqslant f^{-1}\left\{\Omega^{-1}\left[\Omega(A(t))+B(t)\int_c^t K(t,s)\,ds\right]\right\},\quad c\leqslant t\leqslant d'\leqslant d, \tag{3.7}$$

其中$\Omega(u)=\int_\varepsilon^u\dfrac{ds}{g(f^{-1}(s))}$，$\varepsilon>0$，$u>0$，而

$$d'=\max\left\{c\leqslant\tau\leqslant d:\ \Omega(A(\tau))+B(\tau)\int_c^\tau K(\tau,s)ds\leqslant\Omega(f(\infty))\right\}.$$

不等式(3.7)改进了Gollwitzer[46]，Willett[134]的有关结果，Rogers的进一步工作还有[113,114]。

1973年Lakshmikantham[57]利用常数变易法和比较原理[58]推广了定理3.3。

定理3.4[57] 设$x(t)$，$a(t)$，$b(t)$，$c(t)\in C[I,R_+]$，$I=[t_0,T_0]$，$f,h\in C[R_+,R_+]$，f严格增加，g非减，$k\in C[I\times I,\ R_+]$，$W\in C[I\times R_+,R_+]$且对每个t关于u非减，记$A(t)=\sup\limits_{t_0\leqslant s\leqslant t}a(s)$，$B(t)=\sup\limits_{t_0\leqslant s\leqslant t}b(s)$，$C(t)=\sup\limits_{t_0\leqslant s\leqslant t}c(s)$，$K(t,s)=\sup\limits_{s\leqslant\sigma\leqslant t}k(\sigma,s)$，如果

$$f(x(t))\leqslant a(t)+b(t)h\left[c(t)+\int_c^t k(t,s)W(s,x(s))ds\right],t\in I, \tag{3.8}$$

则

(Ⅰ) $x(t)\leqslant f^{-1}\{a(t)+b(t)h[r_1(t,t_0,C(t))]\},t\in I_{10}\subset I$,

其中$I_0=\{t\in I: a(t)+b(t)h(r_1(t,t_0,C(t)))\in\mathrm{Dom}f^{-1}\}$，$r_1(T,t_0,r_{10})$是初值问题

$$r_1'=K(T,t)W[t,f^{-1}(a(t)+b(t)h(r_1))],\ r_1(t_0)=r_{10},t_0\in I_{10}$$

的最大解（在$I_1\subset I$上）；

(Ⅱ) 若另外设$h_u(u)$存在，连续且非减，则

$$x(t)\leqslant f^{-1}[r_2(t,t_0,A(t)+B(t)h(C(t))],t\in I_{20}\subset I, \tag{3.9}$$

其中$r_2(T,t_0,r_{20})$是初值问题

$$r_2'=B(T)h_u\left[h^{-1}\left(\frac{r_2-A(T)}{B(T)}\right)\right]K(T,t)W(t,f^{-1}(r_2)),\ r_2(t_0)=r_{20},t_0\in I_{20}$$

的最大解（在$I_1\subset I$上）。

Lakshmikantham将这种类型的不等式称为Gronwall-Bellman-Reid型不等式，Lakshmikantham[57]的方法后来被广泛地用于推广和发展各式各样的Gronwall-Bellman不等式，如1977年Beesack[12]考虑形如

$$f(x(t))\leqslant a(t)+H\left(t,\int_a^t W(t,\tau,x(\tau))d\tau\right),\quad t\in I=[a,b]$$

的不等式，$f(t)$连续单调，于是可推出

$$x(t)\leqslant f^{-1}[\alpha(t)+H(t,\bar{r}(t))],\ a\leqslant t\leqslant b_1\leqslant b,$$

其中$\bar{r}(t)=r(t,T,a)$是初值问题

$$r'=W(T,t,f^{-1}[\alpha(t)+H(t,r)]),\ r(a)=0$$

的最大解。Beesack[13]还介绍了许多其他有趣的结果。

1973 年 Pachpatte 也建立了如下 Reid 型不等式：

定理3.5[74] 设$x(t),a(t),b(t)\in C[I,R^+]$,$T$是连续算子映$C(I)$到$C(I)$,对任意两个连续函数 $u,v\in C[I,R^+]$,T满足$u(t)\leqslant v(t)\Longrightarrow Tu\leqslant Tv$, $o\leqslant t\leqslant t_1,t_1\in I$；又设$f,h\in C[R_+,R_+]$,$f$严格增加，$h$非减，$k\in C[I\times I,R^+]$，如果

$$f(x(t))\leqslant a(t)+b(t)h[c(t)+\int_{t_0}^{t}k(\tau,s)g(s,x(s),Tx(s))ds] \tag{3.10}$$

其中$g(t,x,y)\in C[I\times R_+\times C(I),R_+]$且对每个固定的$t\in I$关于$x,y$单增,则

$$x(t)\leqslant f^{-1}[a(t)+b(t)h(c(t)+r(t))],t\in I_0 \tag{3.11}$$

$I_0=\{t\in I;\ a(t)+b(t)h(c(t)+r(t))\in \mathrm{Dom}f^{-1}\}$,$r(t)$是初值问题

$$r'(t)=k(\tau,t)g(t,f^{-1}[a(t)+b(t)h(c(t)+r(t)],Tf^{-1}[a(t)+b(t)h(c(t)+r(t))]),$$

$r(t_0)=0,t_0\in I_0$的最大解。

1973 年 Dhongade 和 Deo 沿 Bihari 的方向得到如下结果：

定理3.6[40]设

(i) $x(t),f(t)$，$g(t)$：$(0,\infty)\to(0,\infty)$且在$I=(0,\infty)$内连续；

(ii) $W(u)$连续、非负、单调非减且次可乘$(u>0)$；

(iii) $x(t)\leqslant k+\int_0^t f(\tau)x(\tau)d\tau+\int_0^t g(\tau)W(x(\tau))d\tau,t\in I,k>0$为常数；

则

$$x(t)\exp\left(-\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\leqslant \Omega^{-1}[\Omega(k)+\int_0^t g(\tau)\exp\left(\int_0^\tau f(s)ds\right)d\tau] \tag{3.12}$$

其中$\Omega(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{W(s)},u\geqslant u_0>0,0<t\leqslant b,b$选得当$0<t\leqslant b$时有

$$\Omega(k)+\int_0^t g(\tau)\exp\left(\int_0^\tau f(s)ds\right)d\tau\in \mathrm{Dom}(\Omega^{-1}).$$

定理 3.7[40] (i),(ii)同定理 3.5,(iii)$W(u)$次可加，$p(t)>0,\Psi(t)\geqslant 0$非减，连续$(t>0)$,如果

$$x(t)\leqslant p(t)+\int_0^t f(\tau)x(\tau)d\tau+\Psi\left(\int_0^t g(\tau)W(x(\tau))d\tau\right) \tag{3.13}$$

则

$$x(t)\exp\left(-\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\leqslant p(t)+\Psi\Big\{\Omega^{-1}\Big(\Omega\Big[\int_0^t g(s)W(p(s)\exp\int_0^s f(\tau)d\tau)ds\Big]$$
$$+\int_0^t g(s)W\left(\exp\int_0^s f(\tau)d\tau\right)ds\Big)\Big\},0\leqslant x\leqslant b, \tag{3.14}$$

其中 $\Omega(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{W(\Psi(s))},0<u_0\leqslant u$,只要

$$\Omega\Big[\int_0^t g(s)W(p(s)\exp\int_0^s f(\tau)d\tau)ds\Big]+\int_0^x g(s)W(\exp\int_0^s f(\tau)d\tau)ds\in \mathrm{Dom}(\Omega^{-1})$$