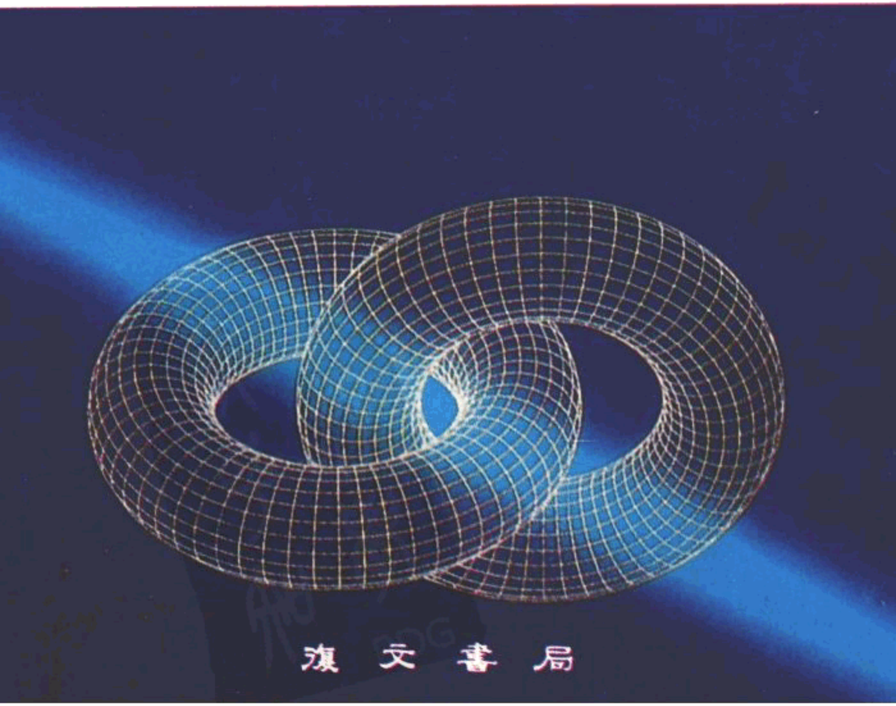
科技用書

線性代數理論與應用

李紹舜 編著



復文書局

序

線性代數被應用到的範圍實已越來越廣，其重要性也是與日俱增。舉凡理、工、商各學科，均無不廣泛的應用到線性代數的理論及其求解方法。因此，不論是教學或自習，均需要有一本內容完整、陳述清晰，理論與實用並重，以及理論的闡述能夠深入淺出的線性代數教本。相信我們費時甚久所編寫的這本“線性代數理論與應用”一書正就是這樣的一本合乎上面要求的線性代數教本。這也是我們在教學之餘傾全力翻譯它的主要目的。

本書對於線性代數的所有重要部分，舉凡向量空間，線性變換，矩陣與行列式，聯立方程組，固有值與固有向量以及向量空間的幾何化等等，均做了精簡而完整的介紹，同時還舉了不少實際的應用例子，以與所闡述的理論相印證。並且其理論的闡述均能由淺入深，推演過程也能由具體到抽象。使得具有一學期微積分基礎的學生均能以自習方式看懂本書。同時，其份量雖不重，但內容詳實，很適合做為一學期，兩學分或三學分的線性代數課的教本。

本書作者編纂本書的態度非常的嚴謹，除了對課本內容精心設計之外，並虛心求教於相關的學者專家，而且在付梓之前，並經過兩次的試教。因此，譯者翻譯本書時亦不敢掉以輕心，除了正式採用為線性代數課的教本之外，在翻譯過程中，逐字斟酌，深怕有所疏忽，同時譯者並親自校訂打字稿，希望能夠忠實的把本書內容以我們的語言呈現在各位讀者的面前。然而疏漏之處在所難免，尚祈先進賢達多加指正。

目　錄

第〇章

預備知識

本章是為建立一些熟悉的事實以做為出發點而設計的，而且介紹一些時常用在線性代數上的表示法與術語，這些正是此課程的眞正目標。

0-1 實 數

在整本書中，我們假設讀者是熟悉實數的基本性質。這些包括加、減、乘及除的一般算術性質，及關係“大於”，>；“大於或等於”，≥；“小於”，<；及“小於或等於”，≤。

對於任意實數 α，$|\alpha|$ 表示 α 的**絕對值**(absolute value)且表為

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha \text{ 若 } \alpha \geq 0 \\ -\alpha \text{ 若 } \alpha < 0 \end{cases}$$

因此，$|2| = |-2| = 2$。

我們將永遠考慮 $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$。若同意，則此即是，$\sqrt{4} = 2$，雖然 $(-2)^2 = 4$ 同時為眞。同樣地，$\sqrt{2} = 1.414213\cdots\cdots$，不是 $-1.414213\cdots\cdots$。

0-2 集 合

我們將利用一些集合符號，在此欲以直覺名詞描述之。

集合(set)是物體的聚合體。例如，我們可以說實數的集合，或整數的集合，或偶數的集合，或象的集合。在一集合中的物體稱爲它的**元素**(elements)或**份子**(members)。若A是偶數的集合，則-2，6及24均爲A的元素，而$\sqrt{2}$，3及π却不是。

通常一集合由一所給予的規則或檢定其關係所表示。通過檢定的物體就在A中，失敗的就不在A中。例如，令$p(x)$爲其檢定句子：“x是一偶數”。可以擺入由x所代表的空白處的物體，可以產生一個爲眞的句子，組成偶數的集合。因此，$p(-2)$，$p(6)$及$p(24)$爲眞。另一方面，$p(\sqrt{2})$，$p(3)$，及$p(\pi)$爲假，故$\sqrt{2}$，3及π不在此集合中。

對於任何檢定句子$p(x)$，我們可以利用符號表示使得$p(x)$爲眞的物體x所成的集合爲$\{x \mid p(x)\}$。因此

$$\{x \mid x \text{ 是一實數}\}$$

是一實數集合；

$$\{x \mid x \text{ 是一偶數}\}$$

是一偶數集合；等等。

在此表示法中，x不是扮演唯一的角色，而且可以換成任何的方便符號。它祇是簡單的檢定句子中的場所記錄者。因此，

$$\{t \mid t \text{ 是一實數}\}$$

也是實數的集合。

指定出排除一個物體的會員資格的規則是可能的，此產生一個沒

有份子的集合，這樣的集合稱爲**空集合**（empty）。例如，$\{x \mid x \neq x\}$將會是包括所有本身不等於本身的物體所成的集合。同樣地，$\{x \mid x^2+1=0$且x爲實數$\}$是空集合，因爲沒有實數會使得它的平方加1等於0。我們將不一定會有時機在本書中用到一空集合，但有時候指出一所給的集合不是空集合或非空集合將會是重要的。此即是我們假設該集合至少有一個份子。

給予兩集合A及B，若A的每一元素均在B中，則稱A爲B的**子集合**（subset），並寫成$A \subset B$。例如，$\{x \mid x$是一偶數$\}$是$\{x \mid x$是一實數$\}$的子集合，因爲每一偶數都是實數。我們可以寫成

$$\{x \mid x \text{是一偶數}\} \subset \{x \mid x \text{是一實數}\}$$

注意，$\{x \mid x$是一實數$\} \subset \{x \mid x$是一偶數$\}$是錯的，因爲存在有實數並非是偶數。

一般來說，若$A \subset B$且亦$B \subset A$，我們稱A與B相等，並寫成$A = B$。例如，$\{x \mid x$是一實數且$\sin(x)=0\}$與$\{x \mid x$對於某些n，$x=n\pi\}$是相等的，因爲$\sin(x)=0$恰好祇當x是π的整數倍才成立。

時常，一個具有有限個元素的集合可以表爲把所有元素列在集合括號中。例如，$\{1, 2, 3\}$是一恰有三個元素的集合，而它們就是數字1，2及3，$\{w_1, \cdots\cdots, w_n\}$是一包含有$n$個符號$w_1$至$w_n$的集合；而$\{6\}$是一祇有元素爲數字6的集合。一個祇含有一個元素的集合有時候稱爲**獨身集合**（singleton）。

0-3　函　數

我們將時常應用**函數**（function）的符號於集合之間。若A及B爲集合，從A映至B的一函數f（寫成$f: A \to B$）是把A的每一元素恰祇對應到B的一個元素的規則。若a在A中，且經由f與B中的b相對應，則我們可寫爲$b = f(a)$。在此有一些例子。

(1)令 $A = B =$ 實數集合，而定義 $f : A \to B$ 爲設定 $f(x) = 2x - 1$ 。例如，$f(0) = -1$，$f(3) = 5$，且 $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1$ 。

(2)令 $A = \{1, 2, 3\}$ 及 $B = \{\alpha, \beta\}$ 。定義 $g : A \to B$ 爲 $g(1) = g(2) = \alpha$ 及 $g(3) = \beta$〔有了 $g(1) = g(2)$ 並不會違背定義：我們所不可以的是，例如 $g(1) = \alpha$ 而且又 $g(1) = \beta$ 。〕

(3)令 $A =$ 實數集合且 $B =$ 非負實數集合。定義 $h : A \to B$ 爲 $h(x) = x^2$ 對每一實數均成立。

(4)令 $A = C =$ 實數集合，且對於每一 x 在 A 中，定義 $F : A \to C$ 爲 $F(x) = x^2$ 。此與(3)有些微的不同，且即刻可加以描述的。

(5)令 $P = \{w_1, w_2, w_3\}$ 且 $Q = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 。定義 $G : P \to Q$ 爲 $G(w_1) = u_1$，$G(w_2) = u_2$ 且 $G(w_3) = u_3$ 。

(6)令 A 爲實數集合且 $B = \{x \mid x$ 爲一實數且 $-1 \le x \le 1\}$ 定義 $H : A \to B$ 爲 $H(x) = \sin x$，當 x 在 A 中。

在這些例子中，(1)、(3)、(4)及(6)中的函數爲具有熟悉的規則，而且作用在實數上並產生另一個實數。但(2)及(5)顯示出函數可以定義在抽象集合之間，而實數不一定需要包含在內。此在線性代數中很重要，在那兒我們的集合時常有些所含的元素並不是實數。

一對一及映成函數的概念將會是很重要的。

若 $f : A \to B$ 爲一函數，若對 A 中的任意 a 及 a'，$f(a) = f(a')$ 祇可能發生在當 $a = a'$ 時，〔對等的，若 $a \ne a'$，則 $f(a) \ne f(a')$〕。則稱 f 爲**一對一**(one-to-one)(1-1)函數。

看看上面的例子，我們看到：

(1)中的 f 爲一對一，因爲 $f(a) = 2a - 1$ 及 $f(a') = 2a' - 1$，且 $2a - 1 = 2a' - 1$ 必推導出 $a = a'$ 。

(2)中的 g 不是一對一，因爲 $g(1) = g(2)$，但 $1 \ne 2$ 。

(3)中的 h 不是一對一，〔例如，$h(1) = h(-1) = 1$〕。

同樣地，(4)中的 F 不是一對一。

在(5)中，G 是一對一。

在(6)中，H 不是一對一〔例如，$H(0)=H(2\pi)=0$〕。

一函數 $f: A \to B$，若對於 B 中的每一個 b，均存在有某個 A 中的 a 使得 $f(a)=b$，則稱 f 爲**映成**（onto）。此即，B 中的每一個 b，在 f 之下爲 A 中的某一個 a 的目標。再參考上面的例子：

在(1)中，f 是映成。給予 B 中任一個 y（故 y 爲任意實數），存在有 A 中的某一 x 使得 $f(x)=y$。欲找這樣的 x，設定 $f(x)=2x-1=y$ 且解出得 $x=(y+1)/2$。這在 A 中且 $f((y+1)/2)=y$。

在(2)中，f 是映成。因爲 $\alpha=g(1)$〔且亦是 $g(2)$〕且 $\beta=g(3)$。

在(3)中，h 是映成，因爲每一個非負實數是某一實數的平方。但

在(4)中，F 不是映成，例如，-2 是在 C 中，但如要有某一 A 中的 x 使得 $F(x)=-2$，則我們應需要 $x^2=-2$，但此對於實數 x 是不可能的。

在(5)中，G 不是映成：對於任意 P 中的 x，u_4 均不會是 $G(x)$。

最後，在(6)中，H 是映成。給予任意數 y 且 $-1 \leq y \leq 1$。存在有一實數 x 使得 $y=\sin(x)$。事實上，有無限多這樣的數。

就如例子中所顯示的，一對一及映成是完全獨立的觀念。在(1)中，f 是一對一且映成；在(2)中，g 是映成而不是一對一；在(5)中，G 是一對一但不是映成；且在(4)中，F 不是一對一也不是映成。

第一章

實數向量空間

1-0　向量空間的概念

向量空間是用來鑑定一群物體是否具有某些特定的代數性質，在這一節裏，我們將以非正式的方法，討論所感興趣的基本性質，及由這些性質所衍生的各種事情。

我們從解析幾何中，所熟悉的平面開始，若我們照一般方法標定 x 軸、y 軸及單位長度，則我們可標出點，畫出函數圖及**軌跡**（loci），例如，序對（1，2）及（-1，7），可在平面上表示點，$y = x^2$ 也可畫成如點（x，x^2）的軌跡的圖形，且橢圓 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 4$ 可畫成點（x，y）的軌跡，其中 $y = \pm\sqrt{4 - (x^2/2)}$，如圖 1.1 。

除了這些在點和軌跡方面的熟悉用法外，平面有一種代數結構，給點（x_1，y_1）及（x_2，y_2），在最自然的方式下，我們可將其相加成平面上的另一點：

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

例如，$(1, 2) \oplus (3, 6) = (4, 8)$，我們用特殊的符號⊕表此“和”，因爲它不是一般實數的加法，但是一種新的實數對的加法。

這種加法運算滿足實數的一些加法性質，例如，有一序對，它的

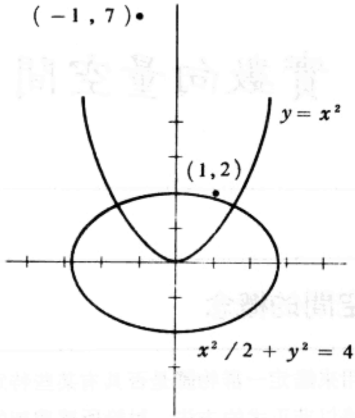


圖　*1.1*

特性就如同 0：(x , y) ⊕ (0 , 0) = (x , y)，且序對有加法反元素：(x , y) ⊕ ($-x$, $-y$) = (0 , 0) 。

除了加法運算外，我們可將一序對乘以一實數 α ，寫爲 α ⊙ (x , y) = (αx , αy) 。結果仍爲一序對，例如 2 ⊙ (3 , 4) = (6 , 8)，像前面一樣，我們用一特殊符號⊙，以提醒我們這不是有關於兩個實數的一般乘法，如同⊕，這種乘法使我們連想起普通實數乘法的幾個簡單的性質，例如，對任一序對 (x , y) ， 1 ⊙ (x , y) = (x , y)。

如同實數的序對，我們可以考慮三元序對 (x , y , z)，或四元序對 (x , y , z , w)，或是 n 元序對 (x_1 , x_2 , …… , x_n)，n 可以大到我們所希望的程度，我們可以看出三元序對，可藉由畫 z 軸，使其垂直於 x 軸及 y 軸的平面，而在三維空間上表示一點 。如圖 1.2 ，當 $n > 3$ 時，我們不再能畫出足夠的軸，以具體表示出點 (x_1 , x_2 , …… , x_n) ，然而，我們仍可以在 n 維空間中處理同樣的代數問題：

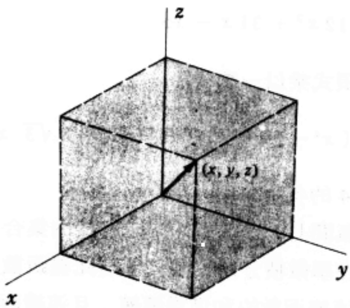


圖 1.2

$$(x_1, \cdots\cdots, x_n) \oplus (y_1, \cdots\cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots\cdots, x_n + y_n)$$

及

$$\alpha \odot (x_1, \cdots\cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots\cdots, \alpha x_n)$$

例如：$(1, -2, 3, 4, -2) \oplus (0, 1, -5, 6, 9) = (1, -1, -2, 10, 7)$ 且 $\sqrt{3} \odot (1, -2, 3, 4, -2) = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$，這些在 n 元序對上的代數運算，保有在二元序對上運算的一些基本性質，例如，在 n 元序對中有“零”元素：$(0, 0, \cdots\cdots, 0) \oplus (x_1, \cdots\cdots, x_n) = (x_1, \cdots\cdots, x_n)$ 及加法反元素 $(x_1, \cdots\cdots, x_n) \oplus (-x_1, \cdots\cdots, -x_n) = (0, \cdots\cdots, 0)$。

n 元序對的運算在實際上及理論上均會有有趣的應用。例如，在物理學和經濟學上，機械系統和貿易市場時常利用實數的 n 元序對來描述，其中 n 很大。

從我們已經看到的對實數的二元序對及 n 元序對的代數運算，可很自然地引出許多其他的內含，例如，考慮次數 ≤ 4 的所有多項式所成的集合，我們可以將兩多項式相加，得到另一多項式，如

$$(x^4+3x^3-2x^2+18x-5)\oplus(3x^4-5x^3-10x^2+13x-10)$$
$$=4x^4-2x^3-12x^2+31x-15$$

我們也可將此一多項式乘以一實數

$$\sqrt{3}\odot(x^4-8x+1)=\sqrt{3}\ x^4-8\sqrt{3}\ x+\sqrt{3}$$

它仍是一個次數 ≤ 4 的多項式。

或者，考慮在區間 $[0,2]$ 連續函數所成的集合（此集合時常以 $C[0,2]$ 表示）。在學微積分時，我們能將此種函數相加，及乘以一實數，我們也發現連續函數的和仍爲連續，且連續函數乘以一實數仍爲連續，因此 $C[0,2]$ 有十分類似於在平面上，n 維空間，或次數 ≤ 4 的多項式所成的集合中的代數運算。

這些例子給了我們將要在本章所探討的基本概念，給予一群體，我們時常可能很自然地採用稱爲“和”及“與實數相乘之積”的兩種代數運算。若這些運算具有某些特定性質，則我們稱這聯結運算的群體，爲一**實數向量空間**（real vector space），在下一節裏，我們將表列出所有我們需要的性質，且很謹慎地開始研究向量空間的概念。

1-1 定義和例題

給予一物體所成的集合，我們已經知道，有時對集合中的任二元素，可以合理的方法定義其和，及以實數乘以集合中的元素，因爲我們的目標是在這些運算的基礎上發展一較廣而實用的理論，因此我們必須加入一些條件，這些條件是設計用來確保一有用的代數法則的集合可以發展，且這些法則和我們經驗中所熟知的一些情況是一致的。

這由集合，連結和與積兩運算的結構，稱爲實數向量空間。

定義

令 V 爲一集合，假設有一運算 $\oplus$ 作用於 V 中任一對元素上，且滿

足：

(1)對任意V中二元素a與b，$a \oplus b$亦在V中。

(2)對任意V中二元素a與b，$a \oplus b = b \oplus a$。

(3)對任意V中的a、b與c，$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$。

(4)在V中存在一θ，使$a \oplus \theta = a$，其中a爲V中任意元素。

(5)對任一在V中的元素a，在V中存在d，使$a \oplus d = \theta$。

並假設在V中的元素與實數間有一運算$\odot$，滿足：

(6)對任意實數α及V中元素a，$\alpha \odot V$在V中。

(7)對實數α及V中元素a、b，$\alpha \odot (a \oplus b) = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b)$。

(8)對實數α、β及V中元素a，$(\alpha\beta) \odot a = \alpha \odot (\beta \odot a)$。

(9)對實數α、β及V中元素a，$(\alpha + \beta) \odot a = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a)$。

(10)對每一V中元素a，$1 \odot a = a$。

則集合V，連結運算$\oplus$與$\odot$爲一實數向量空間，我們以$(V、\oplus、\odot)$表此結構。

雖然V不一定含有如物理的古典含意中所稱的向量，我們仍然時常稱V中的元素爲**向量**(vectors)。我們稱$a \oplus b$爲a與b的**向量和**(vector sum)或**和**(sum)，且稱$\alpha \odot a$爲實數α與V中向量a的**純量積**(scalar product)，其中“**純量**”(scalar)α爲實數，乃是傳統習慣，在第(4)條所定的θ稱爲**零向量**(zero vector)，因爲任何V中向量a加上θ，仍然爲a。向量空間恰有一零向量以後會加以證明。對任意V中的a，使$a + d = \theta$之V中的向量d稱爲a的**加法反元素**(inverse vector)，再由(2)，我們可得$d + a = \theta$，我們以$-a$表如此的d，以後我們將證明V中的每一向量有唯一的加法反元素。

定義很長且包含許多條細目，因此希望容易去了解的話，最好的方法就是看些例子，例題 1.1、1.4、1.5及 1.7，包含了完整的細

節，證明一集合連結一向量和及純量乘積，是否爲一實數向量空間，其他例子省略了一些細節。

例1.1

令$V=R^n$，爲實數n元序對（x_1，……，x_n）所成的集合，定義$\oplus$及$\odot$爲（x_1，……，x_n）$\oplus$（y_1，……，y_n）=（x_1+y_1，……，x_n+y_n），及$\alpha\odot$（x_1，……，x_n）=（αx_1，……，αx_n）。此處，每一x_i+y_i爲實數的一般和，且αx_i爲一般乘積。

在R^n中，θ=（0，……，0）且（x_1，……，x_n）的反元素爲（$-x_1$，……，$-x_n$）。

我們舉$n=2$的情況爲例，來證明合於定義(1)至(10)。

令a=（x_1，y_1），b=（x_2，y_2）在R^2中，且令α爲任一實數，

(1) $a\oplus b$=（x_1+x_2，y_1+y_2）在R^2中，因x_1+x_2及y_1+y_2爲實數。

(2) $a\oplus b$=（x_1+x_2，y_1+y_2）且$b\oplus a$=（x_2+x_1，y_2+y_1），兩者相等，因$x_1+x_2=x_2+x_1$及$y_1+y_2=y_2+y_1$，由實數加法的一般性質可知，在整本書中均做此假設。

(3)令c=（x_3，y_3）在R^2中，則（$a\oplus b$）$\oplus c$=（x_1+x_2，y_1+y_2）$\oplus$（x_3，y_3）=（（x_1+x_2）$+x_3$，（y_1+y_2）$+y_3$），而$a\oplus$（$b\oplus c$）=（x_1，y_1）$\oplus$（x_2+x_3，y_2+y_3）=（x_1+（x_2+x_3），y_1+（y_2+y_3）），上兩式相等，利用熟知的實數加法性質，便可知（x_1+x_2）$+x_3=x_1+$（x_2+x_3）且（y_1+y_2）$+y_3=y_1+$（y_2+y_3）。

(4)令θ=（0，0），則$a+\theta$=（x_1+0，y_1+0）=（x_1，y_1）=a。

(5)令d=（$-x_1$，$-y_1$），則$a\oplus d$=（x_1，y_1）+（$-x_1$，$-y_1$）=（x_1-x_1，y_1-y_1）=（0，0）=θ。

(6) $\alpha\odot$（x_1，y_1）=（αx_1，αy_1）在R^2中，因αx_1及αy_1均爲實