

工技微積分

Technical Calculus

原著者：Dale Ewen

Michael A. Topper

譯述者：沈 添 財

科技圖書股份有限公司

工技微積分

Technical Calculus

原著者：Dale Ewen

譯述者：沈添財

江苏工业学院图书馆

藏书章

科技圖書股份有限公司

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書名：工技微積分
原著者：Ewen and Topper
譯述者：沈添財
發行人：趙國華
發行者：科技圖書股份有限公司
台北市博愛路185號二樓
電話：3110953
郵政劃撥帳號：1569

六十八年六月初版
七十年二月二版

特價新台幣110元

原 序

本書是專為進入工程技術專校進修人們而寫的。以熟練運用微積分為目的。筆者假定讀者僅具代數及三角的數學程度。筆者另編寫一本“技術教育用數學”一書以供讀者能順利學習本書的預備課本，自然亦可使用其他適當的書籍作為準備。本書所列教材，可供一學期之用。

所有章節，均依工程技術專校訓練方案安排，儘量採用直覺的陳述方式，以供技術的應用。列舉詳盡的例題與大量的習題，使學生與教師同感興趣而獲得實益。

本書的第一、二兩章為用於微積分的解析幾何基本部分。第三章是有關極限的直覺式討論與微分法的簡介。第四與第五章為微分技術與應用。第六至第九章為有關積分方法與技術。第十章為基本無窮級數的瞭解。第十一章為近似數值計算法。第十二章為偏導數。第十三章為多重積分。第十四至十五章為微分方程式導引與工程技術上的應用。

作者等，對協助本書準備綱要的兩位友人 P. N. Thompson 與 D. Peterson，以及同僚 L. R. Akers 的提供高見，並代校讀原稿均非常感激。此外對本書直接與間接的貢獻的友人，以及 L. Long 太太代為細心打字，均致謝意。最後對我們兩家家人們的耐心與鼓勵，得順利完成本書，在此附筆致意。

Dale Ewen 愛文

M. A. Topper 杜伴

香檳城，伊利諾州

工技微積分

目 錄

第一章 解析幾何——直線

1.1 直線的斜率	2
1.2 直線方程式	4
1.3 平直線與垂直線	8
1.4 距離公式	11
1.5 中點公式	11
總 複 習	13

第二章 解析幾何——二次曲線

2.1 圓	15
2.2 拋物線	19
2.3 橢 圓	24
2.4 雙曲線	29
2.5 座標軸的平移	35
2.6 一般二次方程式	41
2.7 方程組的圖解法	42
2.8 方程組的代數解法	44
總 複 習	47

第三章 微分簡介

3.1 簡 介	50
3.2 運動問題	50
3.3 瞬時速率	55

3.4 極 限	57
3.5 極限公式	60
3.6 曲線的切線斜率	62
總 複 習	64

第四章 導 數

4.1 導 數	66
4.2 多項式的微分	72
4.3 積與商的導數	75
4.4 函數乘冪的導數	77
4.5 微分公式的證明	81
4.6 微分公式摘要	84
總 複 習	84

第五章 導數的應用

5.1 曲線運動	87
5.2 相關變率	91
5.3 圖形描繪	95
5.4 極大與極小問題	103
總 複 習	107

第六章 積 分

6.1 反微分	109
6.2 不定積分	111
6.3 基本積分公式	112
6.4 求積分常數	117
6.5 曲線下面積	120
6.6 定積分	125
總 複 習	129

第七章 積分的應用

7.1 曲線間面積	131
-----------------	-----

7.2 旋轉體體積	138
7.3 其它應用	146
總 複 習	150

第八章 超越函數的微分與積分

8.1 正弦與餘弦函數的導數	153
8.2 正弦與餘弦函數的不定積分	158
8.3 其它三角函數的導數	160
8.4 $\sec^2 u$ 、 $\csc^2 u$ 、 $\sec u$ 、 $\tan u$ 與 $\csc u \cot u$ 的積分	163
8.5 對數函數	164
8.6 指數函數	169
8.7 反三角函數	172
8.8 應 用	178
總 複 習	183

第九章 積分的方法

9.1 一般冪函數積分式	185
9.2 其它三角函數的積分法	188
9.3 由部分分式求積分	195
9.4 部分積分	202
9.5 用三角函數用代替法求積分	207
9.6 積分公式一覽表	211
9.7 應用積分表求積分	212
總 複 習	215

第十章 級 數

10.1 算術幾數	217
10.2 幾何數列	220
10.3 無窮級數	223
10.4 馬克勞林級數	226
10.5 泰勒級數	229
10.6 近似值計數	231

10.7	特殊冪級數及其應用	232
10.8	富利葉級數	235
10.9	e^{jq}	241
	總複習	242

第十一章 近似的數值計算法

11.1	沿着一直線的資料	245
11.2	牛頓法求方程式根的近似值	251
11.3	積分的數值計算法	253
	總複習	256

第十二章 偏導數

12.1	兩個或兩個以上變數的函數	259
12.2	偏導數	261
12.3	幾何解釋	262
12.4	切面與法線	264
12.5	基本增量公式	266
12.6	連鎖法	270
12.7	方向導數與斜率	272
12.8	隱函數的微分	276
12.9	高階偏導數	278
12.10	最大與最小	280

第十三章 多重積分

13.1	重積分	285
13.2	用重積分求面積法	289
13.3	極坐標中的面積	292
13.4	二次矩與積矩	294
13.5	用重積分求體積	295
13.6	用三重積分法	297
13.7	用三重積分法求矩量	300
13.8	柱面坐標	302

13.9	球面坐標	304
13.10	柱面與球面坐標中的體積	305
13.11	表面面積	307

第十四章 微分方程式

14.1	簡 介	319
14.2	分離變數法	322
14.3	積分因子的用法	328
14.4	一階線性方程式	330
14.5	一階微分方程式的應用	333
	總 複 習	342

第十五章 二階微分方程式

15.1	高級微分方程式	344
15.2	常數係數的齊次微分方程式	345
15.3	重根或複數根	351
15.4	非齊次方程式	355
15.5	拉普拉斯轉換	359
15.6	用拉普拉斯轉換法求解	365
15.7	二階微分方程的應用	370
	總 複 習	377

附 錄

A	二項式定理	380
B	數 表	383
C	習題答案	406

第一章

解析幾何—直線

【主 旨】

本章的主旨，為學習直線的解析幾何的基本觀念。

讀完本章後，你將能夠：

- (a) 由直線上的兩點，定出直線的斜率 (slope)。
- (b) 已知線上一點及其斜率，描繪直線的圖形。
- (c) 用點斜式 (point-slope form)，求直線的方程式。
- (d) 用斜截式 (slope-intercept)，求直線的方程式。
- (e) 求垂直線 (vertical line) 的方程式。
- (f) 由已知的直線方程式，描繪其圖形。
- (g) 由兩個聯立直線方程式，確定其是否互相垂直，或互相平行，或兩者都不是。
- (h) 求兩個已知點間的距離。
- (i) 由已知兩點，求其中點坐標。

1-1 直線的斜率

解析幾何學 (analytic geometry)，是研究代數與幾何間的關係。它的觀念，提供我們用代數的方法來分析幾何問題；同樣，也可用幾何的觀點來解答代數問題。例如，我們求解一組線性方程式 (代數問題) 時，可用圖求解各方程式，並求出它們的交點 (幾何問題)。

現在我們將更進一步地發展方程式與曲線間的關係。這對於技術上的應用很為重要，也是發展微積分技術所必需的。其中之一，是直線的斜率 (slope)。非垂直線 (不垂直於 x 軸) 的斜率，是線上兩點的 y 座標差，與同次序對 x 座標差的比值。且可證明，由這個比值所定義的直線斜率，能以該線上的任意兩點求得，用符號 m 表示此斜率。假如 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 表示一線上的兩點，則

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

【例題 1】

求過 $(-2, 1)$ 與 $(3, 5)$ 的直線的斜率。

若置 $x_1 = -2, y_1 = 1, x_2 = 3, \text{ 與 } y_2 = 5$ ，則

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{3 - (-2)} = \frac{4}{5}$$

注意：若顛倒坐標差的次序，其結果仍然相同。

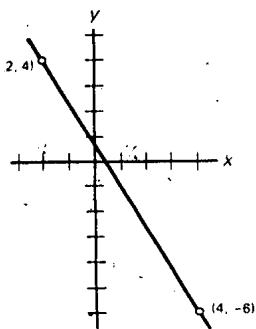
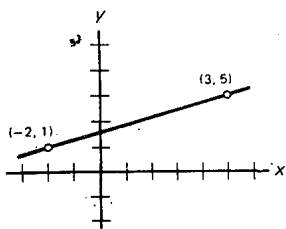
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1 - 5}{-2 - 3} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5} = m$$

【例題 2】

求過 $(-2, 4)$ 與 $(4, -6)$ 的直線的斜率。

若置 $x_1 = -2, y_1 = 4, x_2 = 4, \text{ 與 } y_2 = -6$ ，則

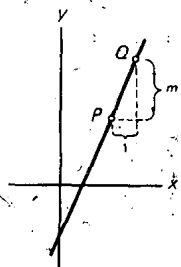
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - 4}{4 - (-2)} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$



在例題 1 中，直線由左向右逐漸上升，而在例題 2 的直線則由左向右逐漸下降。一般來說：

1. 若直線斜率為正值，則直線由左向右逐漸上升。
2. 若直線斜率為負值，則直線由左向右逐漸下降。
3. 若直線斜率為 0，則直線為水平。（與 x 軸平行）。
4. 若直線垂直於 x 軸，則直線沒有斜率。因為 $x_2 = x_1$ 或 $x_2 - x_1 = 0$ ，此比值 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 沒有定義。

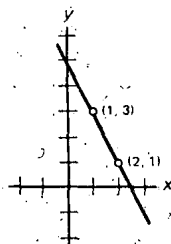
我們可應用以上的觀念，幫助描繪直線。假若已知直線斜率與線上一點 P ，它的畫法是定出 P 點，然後由 P 點向右水平取一個單位，再垂直取 m 個單位，定出 Q 點。連接 PQ 即得。換句話說，沿着直線移動的點，每向右移動一個單位，將會垂直移動 m 個（斜率）單位。



【例題 3】

一直線的斜率為 -2 ，並過點 $(1, 3)$ ，試繪其圖。

因為斜率為 -2 ，所以由點 $(1, 3)$ 向右移動 1 後，向下移動 m ，得一點 $(2, 1)$ ，連接此兩點，即得所求直線。此直線通過 $(1, 3)$ ， $(2, 1)$ 兩點。



【習題】

求通過下列兩點的各直線斜率

1. $(4, 2), (3, 1)$
2. $(-3, 2), (-1, -2)$
3. $(4, -5), (2, 3)$
4. $(-6, -4), (5, -3)$
5. $(-3, 2), (6, 2)$
6. $(4, -7), (4, 3)$
7. $(5, 7), (-3, 2)$
8. $(-3, 6), (-1, 3)$

已知直線通過下列各點及其斜率，試分別繪其圖

9. $(2, -1), m = 2$
10. $(0, 1), m = -3$
11. $(-3, -2), m = \frac{1}{2}$
12. $(4, 4), m = -\frac{1}{3}$
13. $(4, 0), m = -2$
14. $(-3, 1), m = 4$
15. $(0, -3), m = -\frac{3}{4}$
16. $(5, -2), m = \frac{3}{2}$

1-2 直線方程式

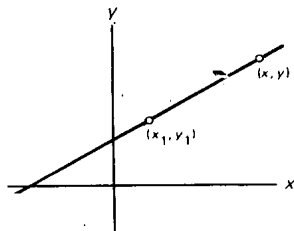
前節已述及由直線上的一點與其斜率，就可描繪其直線圖形。
。同理，也可定出該直線的方程式。

置 m 為直線（除了垂直線）的斜率，線上一點的坐標為 (x_1, y_1) 。若 (x, y) 是該線上異於 (x_1, y_1) 的另一點，則

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

將等式兩邊各乘 $(x - x_1)$ ，則得

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



若已知直線的斜率及線上一點，此方程式〔稱為直線的點斜式（point-slope form）〕，可用來求出直線的方程式。

【例題 1】 求過點 $(-1, 2)$ ，斜率為 3 的直線方程式。

此處， $m = 3$ ， $x_1 = -1$ ，與 $y_1 = 2$ 。用點斜式，得

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 3[x - (-1)]$$

簡化結果

$$y - 2 = 3x + 3$$

或

$$3x - y + 5 = 0$$

點斜式，也可用來求通過已知兩點的直線方程式。

【例題 2】 求過兩點 $(2, -3)$ 與 $(-2, 5)$ 的直線方程式。

首先，求出斜率

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-3)}{-2 - 2} = \frac{8}{-4} = -2$$

然後用 $m = -2$ ，點 $(2, -3)$ 用點斜式定出方程式。

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -2(x - 2)$$

$$y + 3 = -2x + 4$$

或

$$2x + y - 1 = 0$$

注意：在本例中，也可用 $m = -2$ 點 $(-2, 5)$ ，求得相同的直線方程式。

$$y - 5 = -2(x - (-2))$$

可簡化成

$$2x + y - 1 = 0$$

任一非垂直線，將會與 y 軸交於點 $(0, b)$ ，此 y 座標（縱座標） b ，稱為該直線的 y 截距（ y -intercept）。若直線的斜率為 m ，則

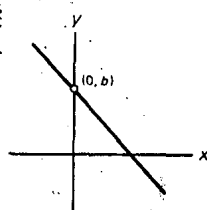
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y - b = mx$$

或

$$y = mx + b$$



此為直線的斜截式（slope-intercept form），若已知直線斜率與 y 截距，即可用來求得直線方程式。

【例題3】一直線的斜率為 $1/2$ ，與 y 軸交於 $b = -3$ 。
試求其方程式。用斜截式，可得

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{1}{2}x + (-3)$$

或

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

一直線與 x 軸平行，其斜率 $m = 0$ ，因此其方程式為

$$y = mx + b$$

$$y = (0)x + b$$

或

$$y = b$$

【例題 4】 求與 x 軸平行並在 x 軸上方 3 個單位的直線方程式。此方程式為 $y = 3$

若直線用斜截式表示其方程式，它能快速地提供直線的斜率與線上一點（交 y 軸的點）。由此，可用前節所述方法，繪出直線圖形。

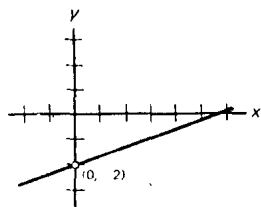
【例題 5】 求 $3y - x + 6 = 0$ 的斜率及 y 截距，並繪其圖。寫出方程式的斜截式，並解 y

$$3y - x + 6 = 0$$

$$3y = x - 6$$

$$y = \frac{x}{3} - 2$$

$$y = \frac{1}{3}x + (-2)$$



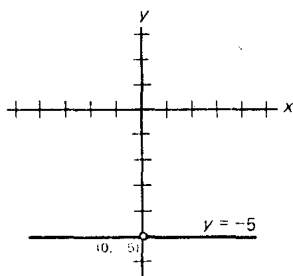
或

因此 $m = \frac{1}{3}$ 且 $b = -2$.

【例題 6】

描出直線方程式 $y = -5$ 的圖形。

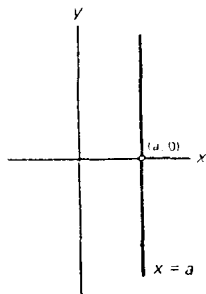
此直線與 x 軸平行，並在 x 軸下方 5 個單位。



假如直線是垂直的，我們將無法用上述方法來表示出。因為垂直線沒有斜率。但已知垂直線與 x 軸（橫軸）交於點 $(a, 0)$ ，且直線上所有點的橫座標均為 a 。

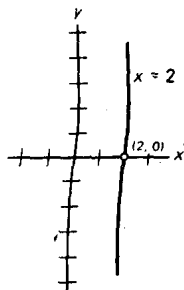
由此特性，可寫出垂直線的方程式

$$x = a$$



【例題 7】 描出直線方程式 $x=2$ 的圖形。

此線垂直於 x 軸，交 x 軸於點 $(2, 0)$ 。



【例題 8】 求垂直於 x 軸並交 x 軸於 $(-3, 0)$ 的直線方程式。此方程式為 $x=-3$ 。

注意：在本節中，所有的直線方程式，均可表成

$$Ax + By + C = 0$$

此為直線的一般式 (general form)，能符合前面所定義的直線的線性方程式。

【習題】

已知下列各直線的性質，試求其方程式。

1. 過點 $(-2, 8)$ ，其斜率為 -3 。
2. 過點 $(3, -5)$ ，其斜率為 2 。
3. 過點 $(-3, -4)$ ，其斜率為 $1/2$ 。
4. 過點 $(6, -7)$ 其斜率為 $-3/4$ 。
5. 過兩點 $(-2, 7)$ 與 $(1, 4)$ 。
6. 過兩點 $(1, 6)$ 與 $(4, -3)$ 。
7. 過兩點 $(6, -8)$ 與 $(-4, -3)$ 。
8. 過兩點 $(-2, 2)$ 與 $(7, -1)$ 。
9. 交 y 軸於 -2 ，其斜率為 -5 。
10. 交 y 軸於 8 ，其斜率為 $1/3$ 。
11. y 截距為 7 ，其斜率為 2 。
12. y 截距為 -4 ，其斜率為 $-3/4$ 。
13. 與 x 軸平行，並在其上方 5 個單位。
14. 與 x 軸平行並在其下方 2 個單位。
15. 與 x 軸垂直並交 x 軸於 $(-2, 0)$ 。
16. 與 x 軸垂直並交 x 軸於 $(5, 0)$ 。

求下列各直線的斜率與 y 截距

17. $x + 4y - 12 = 0$

18. $-2x + 3y + 9 = 0$

19. $4x - 2y + 14 = 0$

20. $y = 6$

描繪下列諸直線的圖形

21. $y = 3x - 2$

22. $y = -2x + 5$

23. $5x - 2y + 4 = 0$

24. $4x + 3y + 6 = 0$

25. $x = 7$

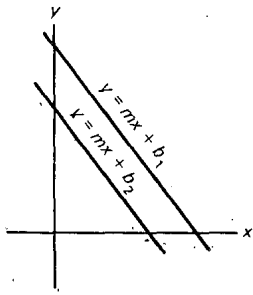
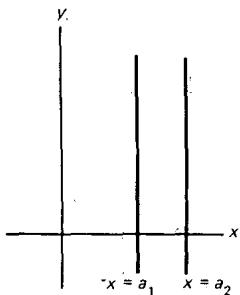
26. $x = -2$

27. $y = -3$

28. $y = 2$

1-3 平直線與垂直線

若兩線互相平行，可能為；(1)均垂直於 x 軸，或(2)均有相同的斜率。



另一方面，若兩線互相垂直，可能為；(1)一線為垂直的，其方程式 $x = a$ ，另一線為水平的，其方程式為 $y = b$ ，或(2)一線的斜率為另一線斜率的負倒數，亦即兩線的方程式各為

$$L_1: y = m_1x + b_1 \quad \text{與} \quad L_2: y = m_2x + b_2$$

因此

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

為解上式關係，可參看下列的三角形，其中 L_1 垂直於 L_2 。