国家教育部
规划教材

中等师范学校数学教科书（试用本）

小学数学教材教法

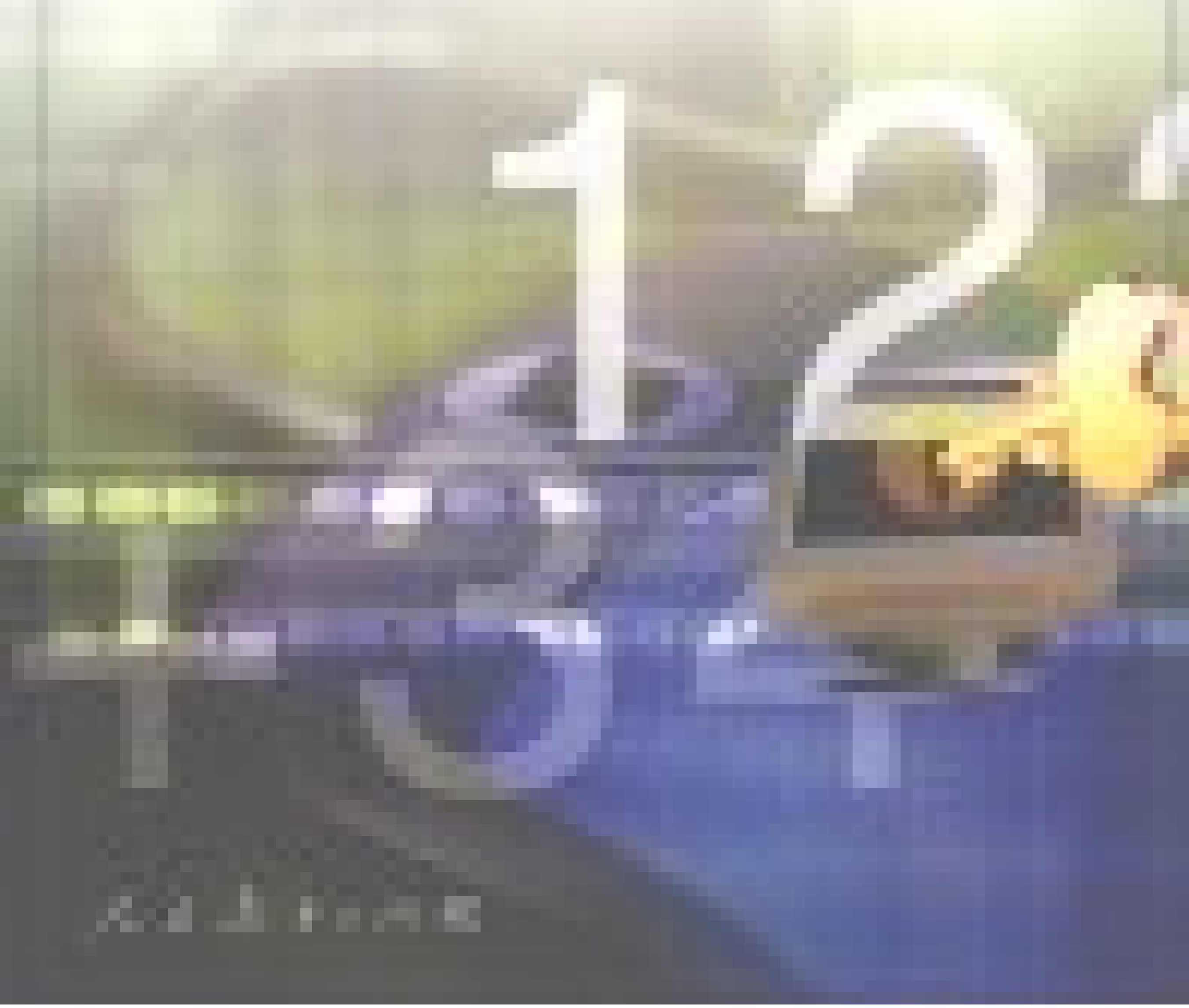
第一册

人民教育出版社小学数学室 编著

人民教育出版社

小学数学教材教法

第一册



中等师范学校数学教科书（试用本）

小学数学教材教法

第一册

人民教育出版社小学数学室　编著

人民教育出版社

中等师范学校数学教科书（试用本）
小学数学教材教法
第一册
人民教育出版社小学数学室　编著
*
人民教育出版社出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
益利印刷有限公司印装　全国新华书店经销
*
开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：12.5　字数：200 000
2001 年 12 月第 1 版　2008 年 5 月第 8 次印刷
印数：315 001 ~ 330 000
ISBN 978-7-107-14880-4
G·7970（课）　定价：10.40 元
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

目　录

第一章 整 数

第一节 整数的概念和计数法

一 自然数和自然数列

1. 自然数的产生和概念

自然数是在人类的生产和生活实践中逐渐产生的. 上古时代，人们在狩猎、捕鱼、采集果实等活动中，逐渐有了判断物体多少的需要，数的概念才开始萌生.

起初人们还不会用数来表示物体的多少，而是用现在所说的“一一对应”的方法来进行比较. 例如，狩猎时要判断工具够不够分，就把工具和猎人搭配起来（一人一件），根据搭配结果来判断工具是多是少，或者是和猎人同样多，经过反复实践，人们逐渐形成了多和少的概念.

在长期重复进行这样比较的过程中，人们慢慢认识到有很多物体集合可以建立一一对应的关系. 在这些集合中，物体个数是同样多的. 例如，一个人的眼睛和他的耳朵、手、脚都是同样多的. 于是把这些同样多的物体集合归为一类，就是现在所说的等价集合类，并开始从同一类等价集合中，选出一个大家最熟悉、最方便、又不易变化（有固定的元素）的集合作为代表，来表示这类等价集合的共同特征. 例如看到两只鹿或两只山羊，就用两只耳朵来表示；看到五匹马或五只兔子，就用五个手指来表示. 这种被选作代表的集合，我们现在称之为标准集合. 起初，标准集合只是用作形象地表示数量多少的一种方法，还没有从物体集合中抽象出数来.

随着生产和交换的不断增多，以及语言的发展，人们在世世代代反复应用

标准集合来表示多少的过程中，渐渐把数从具体物体的集合中抽象出来．开始，有些数的名称就采用了标准集合的名称．现在，有的原始部族仍然保留着这种痕迹．例如，表示五个，就说“一只手”，表示十个就说“两只手”．以后，随着语言文字的发展，逐渐创造了符号来表示这些抽象出来的数．例如，用“|”、“‖”等符号来表示“一”、“二”等．这样，在长期的实践中，自然数也就逐渐产生了．

从数的产生过程可以知道：**自然数是一切等价有限集合共同特征的标记**．这就是说，自然数表示有限集合中的元素的个数．不含任何元素的集合叫做空集．我们用“零”来表示空集中元素的个数，也就是说“零”是一切空集的标记．

以上关于自然数的定义，与通常所说的“用来表示物体个数的一、二、三……就是自然数；一个物体也没有，就用自然数零表示．”是一致的．当数系进一步扩大以后，“零”不仅可以表示“没有”，还可以作为某些数量的界限．例如，在摄氏温度计上它又是零上温度和零下温度的界限．温度是零摄氏度，并不是“没有”温度，而是在通常情况下水结冰的温度．所以我们说零是一个有确定意义的数．引入负数以后，零是正数和负数的界限，所以自然数又叫做非负整数．*

2. 自然数的大小

根据两个有限集合之间的关系，可以给出关于两个自然数大小关系的定义．

定义 设自然数 a 与 b 分别表示有限集合 A 与 B 的元素的个数，那么：

(1) 当集合 A 与集合 B 等价时，就叫做 a 等于 b，记作 $a=b$，就是：

如果 $A\sim B$，那么 $a=b$；（$A\sim B$ 表示集合 A 与 B 等价）

(2) 当集合 A 的一个真子集 A' 与集合 B 等价时，就叫做 a 大于 b，记作 $a>b$，就是：

$$\text{如果 } A\supsetneqq A'\sim B\text{，那么 } a>b;$$

(3) 当集合 A 与集合 B 的一个真子集 B' 等价时，就叫做 a 小于 b，记作 $a<b$，就是：

$$\text{如果 } A\sim B'\subsetneqq B\text{，那么 } a<b.$$

自然数“零”添上“一”就得到自然数“一”，“一”再添上“一”就得到

---

* 本书中用字母表示的数、叙述中所说的“整数”，以及第一、二两章中的“数”，都指的是非负整数，即自然数．以后各章叙述中的“数”，随着数概念的扩展，也扩大所表示的数的范围．

自然数“二”，“二”再添上“一”（即“一”添上“一”，再添上“一”）就得到自然数“三”，等等. 所以“一”是自然数的单位.

3. 自然数列及其性质

从“零”起，逐次添上一个单位，就得到从小到大顺序排列着的一列数：

零、一、二、三……

这样由全体自然数依次排列的一列数叫做**自然数列**.

自然数列有下面的性质：

（1）有始：自然数列最前面的一个自然数是零.

（2）有序：在自然数列里，每一个自然数后面都有一个而且只有一个后继数（即紧挨在它后面一个自然数），并且除了零以外，每一个自然数都有一个而且只有一个先行的数（即紧挨在它前面的一个自然数）.

（3）无限：自然数列里没有最后的一个自然数，因此，它是一个无限的数列.

在自然数列里，排在后面的数，比它前面任何一个数都大；排在前面的数，比它后面任何一个数都小.

4. 数数

有了自然数列，就可以更加方便地数出物体的个数. 例如，要知道教室里有多少学生，我们可以一个一个地指着学生，一、二、三……和所指的学生一一对应. 在数的过程中，只要不重复也不遗漏，数到最后一个学生所对应的那个数就是教室里学生的人数. 这就是说，数数的过程就是把要数的那个集合里的元素，与自然数列里从“一”开始的自然数依次建立起一一对应.

从数数的过程可以看出：

（1）数数的结果总是唯一的，与所数事物的次序无关.

例如，在上面的例子里，数教室里有多少学生，无论是按行数，还是按列数，只要每个学生都数到，并且都数一次，那么数的结果都是相同的.

（2）数一种事物可以用另一种事物代替，然后再数，数得的结果是相同的.

例如，数一个班学生的人数可以用数这些学生的名字代替，数学生名字的结果与直接数学生人数的结果相同.

（3）只要继续有事物可数，数数是永远数不完的.

5. 基数和序数

自然数作为一切等价有限集合共同特征的标记，可以表示集合中元素的个数，通常称为**基数**. 另一方面，由于自然数在自然数列中是有序的，所以自然数还可以用来给集合中的元素编号，表示某个有序集合中每个元素所占的位

置，通常称为**序数**.

例如，我们让一队学生从排头开始报数，那么报出“一”的，就可以看作是第一个学生，即第一号；报出“二”的就是第二个学生，即第二号；如果排尾的报出“十二”，那么这个学生就是第十二号. 这里的“十二”既可以表示这队学生有十二个人，也可以表示排尾的学生是第十二号.

因此可以说，自然数有两重意义：

一个数当用来表示集合中元素的个数时，用的是基数的意义.

一个数当用来表示集合中元素的排列次序时，用的是序数的意义.

上例中的“十二”同时兼有基数和序数的两种意义.

二 十进制计数法

1. 命数法

随着生产力的发展，人们遇到的数目越来越多，越来越大，这就产生了一个如何给每一个自然数命名的问题. 由于自然数有无限多个，如果每一个自然数都给一个独立的名称，不仅不方便，而且也不可能. 于是，很多民族在文化发展的最初阶段，都创造了分组计数的方法来计数. 例如，有的以五个为一组，有的以十个为一组，也有的以十二个为一组. 可能由于人们常用十个手指来计数的缘故，许多民族都采用了“满十进一”的计数方法，这就是**十进制计数法**.

按照十进制计数法，我国是这样给自然数命名的.

(1) 自然数列的前十个数各给以单独的名称，即零、一、二、三、四、五、六、七、八、九.

(2) 按照“满十进一”规定计数单位. 十个一叫做**十**，十个十叫做**百**，十个百叫做**千**，十个千叫做**万**；万以上的计数单位不是满十逐一给以新的名称，而是十个万叫做十万，十个十万叫做百万，十个百万叫做千万，十个千万也就是万万，再给以新的名称叫做**亿**；亿以上又有十亿、百亿、千亿等. 这样，每四个计数单位组成一级，个、十、百、千称为个级，万、十万、百万、千万称为万级，亿、十亿、百亿、千亿称为亿级，等等.

(3) 其他自然数的命名，都由前十个数和计数单位组合而成. 例如，一个数含有五个万、二个千、四个百、三个十、七个一，就读作五万二千四百三十七. 对于个级以上的数，每一级的级名只在这一级的末尾给出. 例如，一个数

含有六个千万、四个百万、三个十万、一个万，就读作六千四百三十一万．一个数除每一级末尾有空单位以外，中间的几个单位如果是空的就称“零”，无论空几个都只读一个零．例如，一个数含有五个亿、六个千万、二个万、三个十，就读作五亿六千零二万零三十．

世界上许多国家的命数法不是四位一级，而是三位一级．十个千不给新的名称，就叫十千，到千个千才给新的名称—密（译音），这样从低到高，依次是：个、十、百是个级；千、十千、百千是千级；密、十密、百密是密级，等等．

2. 记数法

自然数的记法和自然数的命名类似，也不可能每一个数都给一个单独的符号，最好用尽可能少的几个符号，把所有的数都表示出来．

按照十进制计数法来记数，只需要十个符号就够了．用来记数的符号叫做**数字**，或叫做**数码**．阿拉伯数字是当今世界各国通用的数字，最早起源于印度，八世纪前后传到阿拉伯，中世纪传入欧洲以后，欧洲人称之为阿拉伯数字，以后逐渐推广到世界各国．阿拉伯数字共有以下十个：

0，1，2，3，4，5，6，7，8，9．

自然数列中最前面的十个数分别用这十个数字来表示．

用阿拉伯数字记数是把所用的数字排成一横行，每个数字所在的位置不同，表示所含的计数单位就不同．从右起第一位上的数字表示几个一，这一位叫做个位；第二位上的数字表示几个十，这一位叫做十位；以下依次是百位、千位、万位……用这种方法记数，每个数字除了它本身所表示的数值以外，还有位置值，这就是记数的**位值原则**．应用位值原则使得记数变得很简单，进行计算也很方便，因而能为世界各国所采用．

应用位值原则记数时，数字所占的位置：个位、十位、百位……统称为**数位**．数位的排列顺序如下表．

数位顺序表

级名		亿级	万级	个级
数位名称	……	千亿位 百亿位 十亿位 亿位	千万位 百万位 十万位 万位	千位 百位 十位 个位
计数单位	……	千亿 百亿 十亿 亿	千万 百万 十万 万	千 百 十 一

有了这个数位顺序表，一切自然数都可以很方便地用阿拉伯数字写出来．写数的时候，从左到右，即从高位到低位，顺次写出各数位上的数字，如果某个数位上一个单位也没有，就在这一位上写“0”．例如：

四万五千零四十一　　写作 45041.

五十亿零三百四十五万一千零四　　写作 5003451004.

由于世界上许多国家是按三位一级命数的，所以写数采用三位分节法，即从个位向左每三位分成一节，相邻两节中间用分节号“,”分开（也有的把间隔拉大一些）．例如，上面的数分节为 5,003,451,004（或 5 003 451 004）．这种三位分节法已在国际上通用．为和国际习惯一致，并取得全国统一，我国写数也“规定数字的分位方法为三位制”，但不使用分节号，只在相邻两节中间空出半个数字的位置．

用几个数字写出的自然数（最左端数字不是零）就叫做几位数．例如，1、4 是一位数，10、34 是两位数，等等．通常又把两位和两位以上的数称为多位数．

除了国际通用的阿拉伯数字以外，我们还经常见到一些其他的数字．例如：

(1) 中国数字

中国数字分小写和大写两种．

小写数字包括：〇、一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万……

大写数字包括：零、壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖、拾、佰、仟、万……

(2) 罗马数字

罗马数字是罗马人创造的记数符号，基本符号共有七个：

	I	V	X	L	C	D	M
表示：	一	五	十	五十	一百	五百	一千

罗马数字中没有表示零的数字．记数时不采用位置原则，而是采用加减法原则．如果要表示一个数，就把几个罗马数字写成一列，从左到右，先写表示较大数的数字，后写表示较小数的数字，把这些数字所表示的数加在一起，就是所要表示的数．

例如：$\mathrm{XXII}=10+10+2=22$

$\mathrm{CCXV}=100+100+10+5=215$

LXXII＝50＋10＋10＋2＝72

当一个数需要连续写出四个相同数字才能表示时，就先写出表示较小的数的数字，再写出表示较大数的数字，再把它们相减作为它们所表示的数．这种数只有六个：IV 表示四，IX 表示九，XL 表示四十，XC 表示九十，CD 表示四百，CM 表示九百．

按照这个原则，一千四百八十九写作 MCDLXXXIX．

十三世纪以前，罗马数字曾盛行于欧洲．由于读写和计算都很不方便，后来就用得很少了，现在只在一些特殊的场合才可以见到．

3．读数法

根据十进制的记数法和我国的命数法，可以得到如下的读数法：

（1）四位和四位以内的数，从最高位起，顺着位次一位一位读出来．例如：

483	读作	四百八十三
2596	读作	二千五百九十六

（2）四位以上的数，先从右向左四位分级，再从最高位起，顺次读出各级里的数和它们的级名．例如：

24543689	读作	二千四百五十四万三千六百八十九
3572834512	读作	三十五亿七千二百八十三万四千五百一十二

（3）一个数末尾的“0”不读出来，每一级末尾的“0”也不读出来；其他的数位上有一个“0”或连续几个“0”，都只读一个“零”．例如：

3500	读作	三千五百
208000	读作	二十万八千
4030050	读作	四百零三万零五十
5040025000	读作	五十亿四千零二万五千

4．数的大小比较

两个多位数可以根据位值原则，按下述法则比较它们的大小．

设两个多位数是 $A=\overline{a_m a_{m-1}\cdots a_1}$，$B=\overline{b_n b_{n-1}\cdots b_1}$（这里的 a_m，a_{m-1}，…，a_1 与 b_n，b_{n-1}，…，b_1，分别表示十个数字中的某一个，其中 a_m、b_n 都不是 0；字母上面所加横线表示是按照位值原则写出的数．）显然，A 是 m 位数，B 是 n 位数．

当 $m>n$ 时，　$A>B$；

当 $m<n$ 时，　$A<B$；

当 $m=n$ 时，可依下面方法比较：

如果 a_k 和 b_k 是从左起第一对相同数位上的不相同的数字，那么，

当 $a_k>b_k$ 时， $A>B$，

当 $a_k<b_k$ 时， $A<B$，

如果 a_k 和 b_k 不存在，也就是说 A 与 B 的任何相同数位上的数字都相同，那么就是 $A=B$.

例如，$A=435786$，$B=435297$，它们都是六位数，但是

$a_3=7$，$b_3=2$，

$\because$ $7>2$， $\therefore$ $A>B$.

※三 其他进位制

1. 进位制的一般概念

在计数制度中，除“满十进一”的十进制外，有的民族还曾采用过“满五进一”的五进制，“满十二进一”的十二进制和“满六十进一”的六十进制等. 现在在某些方面仍然保留着十二进制和六十进制的痕迹. 例如，有些商品十二个是一打，十二打是一罗；在时间单位方面，六十秒是一分，六十分是一小时；弧和角的单位也有六十进的.

在一种进位制中，某一单位满一定个数就组成一个相邻较高的单位，这个一定个数叫做这种进位制的**底数**. 例如，十进制的底数是 10，八进制的底数是 8. 进位制的底数可以是 1 以外的任何正整数.

每一种进位制都可以按照位值原则来记数，由于每种进位制底数不同，所用数字个数也不同. 例如，十进制要有包括 0 在内的十个数字，而五进制只要有五个数字（0，1，2，3，4），十二进制则要有十二个数字（包括 0).

一般地，k（$k>1$）进制的计数单位就是 k^0，k^1，k^2，k^3……. 例如，十进制的计数单位一、十、百、千……就是 10^0，10^1，10^2，10^3……；五进制的计数单位就是 5^0，5^1，5^2，5^3…….

k 进制的数可以写成不同计数单位的数之和（k 的幂的和）的形式：

$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1}_{(k)}$ $\quad (a_n \neq 0)$

$=a_n k^{n-1}+a_{n-1} k^{n-2}+\cdots+a_2 k^1+a_1$.

十进制的 2459 可以写成：

$2459=2\times10^3+4\times10^2+5\times10+9$.

用几进制写出的数，我们就简称它是几进数．例如用十进制写出的数就叫做十进数，用五进制写出的数就叫做五进数．为了区别不同的进位制，在写数时常在数的右下角注出进位制的底数．例如，五进数 342 就记作 342_5．十进数除特殊需要以外，一般不记底数．

2．二进制

(1) 二进数的写法

因为二进制的特点是"满二进一"，所以二进数的计数单位从右起第一位是一（2^0），第二位是二（2^1），第三位是四（2^2）……写二进数只用 0 和 1 两个数字．例如，一写作 1_2，二写作 10_2，三写作 11_2，四写作 100_2，五写作 101_2.

由于二进制只有 1 和 0 两个数字，所以用通电和断电这两种状态就能把它们表示出来．这样，如果用几组电路的通、断，就可以表示出任意的一个二进数，并且能进行四则运算．因此，在电子计算机中广泛采用二进制．

(2) 二进数与十进数互相改写

例 1　把 110111_2 改写成十进数．

解：　因为二进数的各个数位所表示的计数单位，从右至左依次是 2^0，2^1，2^2，2^3……，可以把 110111_2 先写成它的不同计数单位的数之和的形式，再写成十进数．

$$\begin{aligned}110111 &=1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0\\&=1\times32+1\times16+0+1\times4+1\times2+1\times1\\&=32+16+4+2+1\\&=55.\end{aligned}$$

例 2　把 49 改写成二进数．

解：根据二进制数"满二进一"的原则，可以用 2 连续除 49.

$49\div2=24$（余 1）……把 24 进到第二位，余下的 1 是右起第一位数字．

$24\div2=12$（余 0）……把 12 进到第三位，余下的 0 是右起第二位数字．

$12\div2=6$（余 0）……把 6 进到第四位，余下的 0 是右起第三位数字．

$6\div2=3$（余 0）……把 3 进到第五位，余下的 0 是右起第四位

数字.

$3\div2=1$（余 1）…… 这时把 1 进到第六位，余下的 1 是右起第五位数字.

用竖式计算比较方便：

		余数	
2	49		
2	24 ……	1	（右起第一位数字）
2	12 ……	0	（右起第二位数字）
2	6 ……	0	（右起第三位数字）
2	3 ……	0	（右起第四位数字）
2	1 ……	1	（右起第五位数字）
	0 ……	1	（右起第六位数字）

∴ $49=110001_2$.

这种方法通常叫做“二除取余法”.

(3) 二进数的四则运算

二进数的四则运算与十进数的四则运算法则基本相同，只是用“满二进一”来代替“满十进一”. 运算时也要先熟悉两个一位数相加和相乘的结果.

一位数加法：

$0+0=0$

$0+1=1$

$1+0=1$

$1+1=10$

一位数乘法：

$0\times0=0$

$0\times1=0$

$1\times0=0$

$1\times1=1$

应用上述结果就可以进行多位数四则运算.

例如：

$$\begin{array}{r} 101101\\ +\quad 1111\\ \hline 111100 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 100101\\ \times\quad 101\\ \hline 100101\\ 000000\\ 100101\\ \hline 10111001 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 101101\\ -\quad 1111\\ \hline 11110 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 111\\ 110\,\overline{)101010}\\ \underline{110}\\ 1001\\ \underline{110}\\ 110\\ \underline{110}\\ 0 \end{array}$$

习题一

1. 举例说明自然数是一切等价有限集合共同特征的标记.
2. 自然数和自然数列有什么联系和区别？