碧海书道 BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

微积分
全程学习指导

配人大三版

王丽燕　梁　平　秦禹春　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

微积分
全程学习指导

配人大三版

王丽燕　梁　平　秦禹春　编著

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分全程学习指导 / 王丽燕，梁平，秦禹春编著.
大连：大连理工大学出版社，2008. 7
配人大三版
ISBN 978-7-5611-4288-2

Ⅰ. 微…　Ⅱ. ①王…　②梁…　③秦　Ⅲ. 微积分—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 099385 号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路 80 号　邮政编码：116023
电话：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp. cn　URL：http://www. dutp. cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：147mm×210mm　印张：13. 125　字数：544 千字
2008 年 7 月第 1 版　2008 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑：梁　锋　王　伟　责任校对：碧　海
封面设计：宋　蕾

ISBN 978-7-5611-4288-2　定　价：22. 00 元

前 言

从事大学数学教学已接近20年。在此过程中，我深深感受到了数学的理性之美，力量之美，乃至清柔之美。她远不只是工具，更像是一位哲人，启发你，熏陶你，伴你追寻人生的理想。我在讲台上，自然地，将这种意境传递给了学生，使他们在学习大学数学的过程中以新的角度体味“数学”，体味学习。作为教师我愿意将我的教学经验与大家共享，与大家共同学习，共同提高，这就是我写作《全程学习指导》系列图书的初衷。

《微积分》是大学各门类、各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书的目的是帮助广大学生扩大课堂信息量，提高应试能力。本书严格按照教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”（教学大纲），以及教育部最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求编写。

本书与被全国许多高校采用的《微积分》（人大三版）配套，共9章，每章有4个版块。

知识点考点精要 列出基本概念、重要定理、主要内容，突出必须掌握或考试出现频率高的核心内容。

典型题真题精解 精选具有代表性的例题进行详尽解析。这些例题涉及内容广，类型多，技巧性强，旨在提高大家分析问题、解决问题的能力，帮助大家掌握基本概念和理论，开拓解题思路，熟练掌握解题技巧。

教材习题同步解析 本版块为教材习题全解，为大家提供一种比较规范的解题思路和方法，以便读者对照和分析。

模拟试题自测 模拟试题力争反映考试的重点、难点，帮助大家进一步强化训练解题能力，巩固和提髙学习效果。

在“典型题真题精解”和“模拟试题自测”版块中采用了大量历年考研真题。为增加信息量，考研真题采用“年代/类别/分值”的标注方式，如

"080406",说明此题是2008年数学四的考题,分值6分。

常言道,熟能生巧。剖析一定数量的范例,做一定数量的练习,无疑是应试的有效途径。在此过程中扎实掌握基本概念、基础理论、常用方法,注重科学思维方式的培养,才能掌握"数学力",并将之转化为一种"数学素质"和"竞争力"。希望本书在这方面对读者能有所帮助,不足之处请指正。

王丽燕

2008年7月

目 录

第一章　函　数

知识点考点精要

函数的概念及其表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数、隐函数、分段函数、基本初等函数的性质及其图形，初等函数。

一元函数的概念，函数的单调性、奇偶性、周期性以及基本初等函数的性质及其图形在中学数学中早已熟悉了，这里不再赘述，希望读者务必理解和掌握。下面我们仅对值得提醒的内容作一复述。

1. 函数的有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在数 k，对于所有 $x \in X$，恒有

$$f(x) \leqslant k \quad (f(x) \geqslant k)$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界（下界）。数 k 称为函数 f 在 X 上的一个上界（下界）。如果存在一个数 $M > 0$，对于任何 $x \in X$，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称函数 f 在 X 上有界，数 M 称为函数 f 在 X 上的一个界。否则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界。注意，如果 M 是函数 f 在 X 上的一个界，则任何比 M 更大的正数也是它在 X 上的界，所以一个有界函数必有无穷多个界。易知，函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是它在 X 上既有上界又有下界。

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D，值域是 Z。如果对于每个 $y \in Z$，存在惟一的 $x \in D$ 满足 $f(x) = y$，把 y 看做自变量，把 x 看做因变量，则 x 是一个定义在 $y \in Z$ 上的函数，记此函数为 $x = f^{-1}(y)(y \in Z)$，并称之为 $y = f(x)\ (x \in D)$ 的反函数。

习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，故常将函数 $y = f(x)\ (x \in D)$ 的反函数表示成 $y = f^{-1}(x)\ (x \in Z)$，它与 $x = f^{-1}(y)\ (y \in Z)$ 表示同一个函数，因为二者具有相同的定义域和相同的对应规则。因而，在同一个直角坐标系中，函数 $y = f(x)\ (x \in D)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)\ (x \in Z)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称。

函数 $y = f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不具有反函数。如果考虑函数 $y = f_1(x) = x^2, x \in D_1 = [0, +\infty)$ 或函数 $y = f_2(x) = x^2, x \in D_2 = (-\infty, 0]$，常使用术语：称函数 $f_1(x)$（或 $f_2(x)$）为“函数 f 在 D_1（或 D_2）上的限制”或“函数 f 限制在 D_1（或 D_2）

上”，且记做 $f\Big|_{D_1}$（或 $f\Big|_{D_2}$），其本质是一个新的函数。于是，就本例 $y=f(x)=x^2$ 在 $D_2=(-\infty,0]$ 上的限制 $f\Big|_{D_2}$ 就具有反函数 $y=f^{-1}\Big|_{D_2}(x)=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$。同样，反正切函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的限制的反函数，所以 $\tan(\arctan x)=x$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f，值域是 Z_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D_g，值域是 Z_g。如果 $Z_g\cap D_f\neq\varnothing$，则称函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in D=\{x\mid g(x)\in D_f\}$$

是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，变量 u 称为中间变量。

4. 初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这六类函数是研究其他各种函数的基础，统称为基本初等函数。基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数。

初等函数有很多好的性质，它们是微积分的重要研究对象。

5. 分段函数

在自变量的不同变化范围中，自变量与因变量的对应规则用不同的式子来表示的函数称为分段函数。

一般来说，分段函数不是初等函数。

6. 隐函数

设 $F(x,y)$ 是一个已知二元函数，I 是一个区间，如果对于每个 $x\in I$，都存在惟一的 y 满足方程 $F(x,y)=0$，则称这个函数 $y=f(x)$ 为由 $F(x,y)=0$ 在区间 I 上确定的隐函数。因此，如果把隐函数 $y=f(x)$ 代入方程 $F(x,y)=0$，便得到在区间 I 上成立的恒等式

$$F(x,f(x))\equiv 0,\quad x\in I$$

在大多数情况下，不能从方程 $F(x,y)=0$ 中解出隐函数 $y=f(x)$ 的显式表达式。但是，却可利用上述恒等式来研究隐函数的许多性质。

典型题真题精解

本章主要是对中学数学知识的复习和充实，为以后学习微积分奠定基础，因此，它在考研数学试题中所占分值极小。但是，值得强调的是，分段函数和第六章的积分上限的函数在考研数学试题中还是会经常出现，必须引起重视。

【例 1】 确定函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性。

解 因为

$$\begin{aligned} y(-x) &= \ln(\sqrt{1+x^2}-x) \\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \\ &= -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -y(x) \end{aligned}$$

所以函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数。

【例 2】 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\,(x>0)$，求 $f(x)$。

解 令 $\frac{1}{x}=t$，则

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \\ &= \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t} \end{aligned}$$

所以

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \quad (x>0)$$

【例 3】 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域。

解 由 $f(x)=e^{x^2}$ 及 $f[\varphi(x)]=1-x$，有 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，所以 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$。又 $\varphi(x)\geqslant 0$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$。令 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$，从而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 0$。

【例 4】 证明定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

证明 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的函数，显然

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

则

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$$

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\psi(x)$$

说明 $\varphi(x)$ 是偶函数，$\psi(x)$ 是奇函数。

故 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ 是一个偶函数与一个奇函数之和。

教材习题同步解析

(A)

1. (1)$A=\{x \mid x$ 为太阳系九大行星$\}$

(2)$B=\{x \mid x$ 为自然数$\}$

(3)$C=\{x \mid x>0$ 且 $x<-1\}$

(4)$D_1=\{x \mid x$ 为整数$\}$,$D_2=\{x \mid x$ 为奇数$\}$,则 $D_2 \subset D_1$

2. (1)$A=\{x \mid x>5, x \in \mathbf{R}\}$

(2)$A=\{x \mid x^2-7x+12=0\}$

(3)$B=\{(x,y) \mid x^2+y^2<25, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$

(4)$C=\{(x,y) \mid y=x^2$ 且 $x-y=0, x,y \in \mathbf{R}\}$

3. (1)$A=\{3,4\}$

(2)$B=\{(1,1),(0,0)\}$

(3)$C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

4. $\{0\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{1\},\{2\},\{0,1,2\},\varnothing$ 为$\{0,1,2\}$ 的子集。

5. (1)$A \cup B=\{1,2,3,5\}$

(2)$A \cap B=\{1,3\}$

(3)$A \cup B \cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$

(4)$A \cap B \cap C=\{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} \cap \{2,4,6\}=\varnothing$

(5)$A-B=\{1,2,3\}-\{1,3,5\}=\{2\}$

6. (1)$A \cup B=\{x \mid x>3\}$

(2)$A \cap B=\{x \mid 4<x<5\}$

(3)$A-B=\{x \mid 3<x \leqslant 4\}$

7. 解方程组$\begin{cases}x+y-1=0\\x-y+1=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$,所以 $A \cap B=\{(0,1)\}$。

8. $x-y+2 \geqslant 0$, 即 $y \leqslant x+2$

$2x+3y-6 \geqslant 0$, 即 $y \geqslant \dfrac{6-2x}{3}$

$x-4 \leqslant 0$, 即 $x \leqslant 4$

所以 $A \cap B \cap C$ 为图 1-1 中阴影部分的三角形区域。

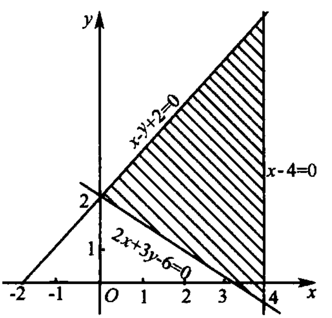

图 1-1

9. (1)$\overline{A}=\{4,5,6\}$

(2)$\overline{B}=\{1,3,5\}$

(3)$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1,3,4,5,6\}$

(4)$\overline{A} \cap \overline{B} = \{5\}$

10. 因　$A \cap B = \{a,3,b\} = \{1,2,3\}$，所以 A 和 B 中必包括 1,2,3 三个元素。

所以　$a = 1, b = 2$

11.

$$X \cup (\overline{X \cap Y}) \cup Y = X \cup (\overline{X} \cup \overline{Y}) \cup Y = [(X \cup \overline{X}) \cup \overline{Y}] \cup Y$$
$$= [U \cup \overline{Y}] \cup Y = U \cup Y = U$$

12. $A \times B = \{a,b,c,d\} \times \{a,b,c\}$

$= \{(a,a),(b,a),(c,a),(d,a),(a,b),(b,b),(c,b),(d,b),(a,c),(b,c),(c,c),(d,c)\}$

13. $X \times Y = \{(3,3),(0,3),(2,3),(3,0),(0,0),(2,0),(3,2),(0,2),(2,2)\}$

14. $A \times B =$ {(北京,南京),(北京,广州),(北京,深圳),(上海,南京),(上海,广州),(上海,深圳)}

$B \times A =$ {(南京,北京),(南京,上海),(广州,北京),(广州,上海),(深圳,北京),(深圳,上海)}

15. $X \times Y \times Z = \{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_1,z_1),(x_3,y_1,z_1),(x_1,y_2,z_1),(x_2,y_2,z_1),(x_3,y_2,z_1),(x_1,y_2,z_2),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_2,z_2),(x_1,y_1,z_2),(x_2,y_1,z_2),(x_3,y_1,z_2)\}$

16. (1)$-3 < x < 3$

(2)$-7 < x - 4 < 7$，　从而$-3 < x < 11$。

(3)$(x-2)^2 - 4 < 0, x(x-4) < 0, 0 < x < 4$，

因为$(x-2)^2 > 0$，所以 $x \neq 2$，从而 $0 < x < 4$ 且 $x \neq 2$。

(4)$-\delta < ax - x_0 < \delta, x_0 - \delta < ax < x_0 + \delta$

因为 $a > 0$，所以$\dfrac{x_0 - \delta}{a} < x < \dfrac{x_0 + \delta}{a}$。

17. (1)$[-3,3]$；　(2)$[1,3]$；　(3)$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$；　(4)$(-\infty,-5] \cup [5,+\infty)$；　(5)$(-\infty,-3) \cup (1,+\infty)$。

18. (1)$(-5,-1)$(如图 1-2 所示)　　(2)$(-1,1) \cup (3,5)$(如图 1-3 所示)

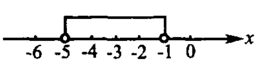

图 1-2

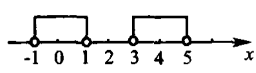

图 1-3

(3)$\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$(如图 1-4 所示)

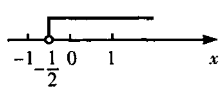

图 1-4

19. (1) 是函数关系。因为函数的定义域与对应关系都是确定的。即函数在 $x \leqslant 0$ 都有意义。

(2) 不是函数关系。因为 x 无论为何实数，$-x^2 \leqslant 0$，而 $\log_a x$ 的定义域为 $x > 0$。又因为定义域不能是空集，所以不是函数关系。

(3) 不是函数关系。因为 $-x^2-1<0$，$\sqrt{x}$ 的定义域为 $x \geqslant 0$，由于定义域不能是空集，所以不是函数关系。

(4) 是函数关系。因为 $\sqrt{-x^2+1}$ 在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上都是有意义的。

(5) 不是函数关系。因为 $x^2+2 \geqslant 2$，而 $\arcsin x$ 的定义域为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$。因此 x 无论为何实数，$y=\arcsin(x^2+2)$ 都没有意义，所以不是函数关系。

(6) 是函数关系。因为 $y^2=x+1$ 在 $x \geqslant -1$ 都是有意义的。

20. (1) 不是相同的函数。因为 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $x \neq 1$，而 $y=x+1$ 的定义域为 $x \in \mathbf{R}$，定义域不同，所以不是相同的函数。

(2) 不是相同的函数。因为 $y=\lg x^2$ 的定义域为 $x \neq 0$，$y=2\lg x$ 的定义域为 $x>0$，定义域不同，所以不是相同的函数。

(3) 不是相同的函数。因为 $y=\sqrt{x^2(x-1)}=|x|\sqrt{x-1}$，其定义域为 $x \geqslant 1$；$y=x\sqrt{1-x}$ 的定义域为 $x \leqslant 1$，两个函数的定义域和对应关系都不相同。所以不是相同的函数。

(4) 是相同的函数。因为两个函数的定义域与对应关系均相同。

(5) 不是相同的函数关系。因为两个函数的定义域不同。$y=\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域为 $x \geqslant 1$ 或 $x \leqslant 0$，而 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $x \geqslant 1$。

(6) 是相同的函数关系。因为定义域与对应关系均相同。

21.
$$f(0)=2,f(1)=0,f(2)=0,f(-x)=x^2+3x+2$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2$$
$$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x$$

22.
$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$
$$f\{f[f(x)]\}=f\left(\frac{x}{1-2x}\right)=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$$

23.
$$f(-x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{(e^x-1)e^{-x}}{(e^x+1)e^{-x}}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-f(x)$$

24.
$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{\cos(-x)}=\frac{1-x^2}{\cos x}=f(x)$$

25.
$$f(x)\cdot f(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=f(x+y)$$
$$\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}=f(x-y)$$

26.
$$f(x)+f(y)=\log_a x+\log_a y=\log_a xy=f(xy)$$
$$f(x)-f(y)=\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}=f\left(\frac{x}{y}\right)$$

27. (1) 因为 $9-x^2\geqslant 0$，　所以 $-3\leqslant x\leqslant 3$。

(2) 由 $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$，有 $\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases}$，所以 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq\pm 1$。

(3) 因为 $x^2+4\neq 0$，所以 $x\in\mathbf{R}$。

(4) 因为 $-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 3$。

(5) x 取任意实数，函数均有意义，所以定义域为 $x\in\mathbf{R}$。

(6) 由 $\begin{cases}3-x>0\\ |x|-1>0\end{cases}$，　$\begin{cases}x<3\\ |x|>1\end{cases}$，　有 $\begin{cases}x<3\\ x>1 \text{ 或 } x<-1\end{cases}$

所以定义域为 $1<x<3$ 或 $x<-1$。

(7) 由 $\begin{cases}\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0\\ \frac{5x-x^2}{4}>0\end{cases}$，　$\begin{cases}\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1\\ x(5-x)>0\end{cases}$，　有 $\begin{cases}x^2-5x+4\leqslant 0\\ 0<x<5\end{cases}$

所以 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 4\\ 0<x<5\end{cases}$，即定义域为 $1\leqslant x\leqslant 4$。

(8) 由 $\begin{cases}-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1\\ x^2-x-6>0\end{cases}$，　有 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\ x<-2 \text{ 或 } x>3\end{cases}$

所以定义域为 $-3\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 4$。

(9) 由 $\lg(\lg x)>0$，有 $\lg x>1$，从而 $x>10$，即定义域为 $x>10$。

28. 由 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)$，知使 $f(x^2-1)$ 有意义的 x 应满足 $-1<x^2-1<0$，从而求得 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$。

29. (1) 定义域为 $x\in\mathbf{R}$，图形如图 1-5 所示。

(2) 定义域为 $-2<x<2$，图形如图 1-6 所示。

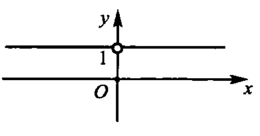

图 1-5

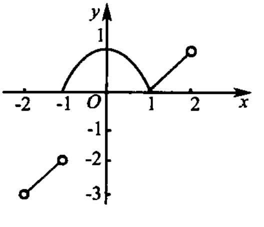

图 1-6

30. $x<1$ 时，$f(x)=x^2-1$，所以 $f(0)=0^2-1=-1$

$x\geqslant 1$ 时，$f(x)=x+3$，所以 $f(2)=2+3=5$

$$f(x-1)=\begin{cases}x-1+3, & x-1\geqslant 1\\ (x-1)^2-1, & x-1<1\end{cases}=\begin{cases}x+2, & x\geqslant 2\\ x^2-2x, & x<2\end{cases}$$

31. $$f(x+1)=\begin{cases}1, & x+1<0\\ 0, & x+1=0\\ 1, & x+1>0\end{cases}=\begin{cases}1, & x<-1\\ 0, & x=-1\\ 1, & x>-1\end{cases}$$

$$f(x^2-1)=\begin{cases}1, & x^2-1<0\\ 0, & x^2-1=0\\ 1, & x^2-1>0\end{cases}=\begin{cases}1, & -1<x<1\\ 0, & x=\pm 1\\ 1, & x>1 \text{ 或 } x<-1\end{cases}$$

32. $$\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x-1\leqslant 1\\ 2(x-1), & 1<x-1\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3\end{cases}$$

33. $$y=\begin{cases}5-(2x-1), & 2x-1\geqslant 0\\ 5-(1-2x), & 2x-1<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}6-2x, & x\geqslant \dfrac{1}{2}\\ 4+2x, & x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

图形如图 1-7 所示。

34. 因为

$$x^2+(y-3)^2=1,y=3\pm\sqrt{1-x^2}$$

所以

$$y_1=3+\sqrt{1-x^2}$$

$$y_2=3-\sqrt{1-x^2}$$

图形如图 1-8 所示。

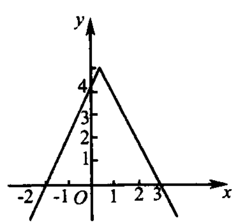

图 1-7

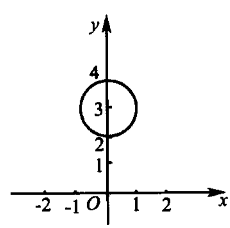

图 1-8

35. $$S=2x+\frac{2A}{x}\quad(x>0)$$

36. 设 V 为圆柱体积，h 为圆柱的高，r 为球半径，r' 为圆柱底面半径。

则 $$r'=\sqrt{r^2-\frac{h^2}{4}},V=\pi(r')^2h=\pi h\left(r^2-\frac{h^2}{4}\right)$$

因为 $r^2-\frac{1}{4}h^2>0$，所以 $0<h<2r$ 为 $V=\pi h\left(r^2-\frac{h^2}{4}\right)$ 的定义域。

37. 设全面积为 S，底面半径为 r，高为 h，$h=\frac{V}{\pi r^2}$

$$S=2\pi rh+2\pi r^2=2\left(\frac{V}{r}+\pi r^2\right)\quad(r>0)$$

38. 设总造价为 T，底边长为 a，高 h，容积 V，面积 S，单位面积造价 b，

则
$$V=a^2h,h=\frac{V}{a^2}$$

$$T=a^2\cdot 2b+4ah\cdot b=\left(2a^2+\frac{4V}{a}\right)b\quad(a>0)$$

39. 因为 R 是 x 的二次函数，所以设 $R=ax^2+bx+c$，则

$$\begin{cases}0=a\times 0+b\times 0+c\\6=a\times 2^2+b\times 2+c,\\8=a\times 4^2+b\times 4+c\end{cases}\quad 得\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=4\\c=0\end{cases}$$

所以
$$R=-\frac{1}{2}x^2+4x$$

40. 因为 $Q=a+b\cdot c^P$，所以
$$\begin{cases}30=a+b\cdot c^2 & ①\\50=a+b\cdot c^3 & ②\\90=a+b\cdot c^4 & ③\end{cases}$$

③－② 得 $\quad 40=b\cdot c^3(c-1)\quad$ ④

②－① 得 $\quad 20=b\cdot c^2(c-1)\quad$ ⑤

④÷⑤ 得 $\quad 2=c$

所以 $a=10$，$b=5$，从而 $Q=10+5\times 2^P$。

41. 设销售总收益为 R，总销售量为 x，则

$$R=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 700\\130\times[700+0.9(x-700)], & 700<x\leqslant 1\,000\end{cases}$$

42. (1)
$$f(-x)=\frac{|-x|}{-x}=-\frac{|x|}{x}=-f(x)$$

所以 $f(x)=\frac{|x|}{x}$ 是奇函数。

(2)
$$f(-x)=-xa^{(-x)^2}=-xa^{x^2}=-f(x)$$

所以 $f(x)=xa^{x^2}$ 为奇函数。

(3)
$$f(-x)=2^{-x}=\frac{1}{2^x}$$

所以 $y=2^x$ 为非奇非偶函数。

(4) $$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=f(x)$$

所以 $f(x)=\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{2}$ 为偶函数。

(5) $$f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{1-a^{x}}{1+a^{x}}=-\frac{a^{x}-1}{a^{x}+1}=-f(x)$$

所以 $f(x)=\dfrac{a^{x}-1}{a^{x}+1}$ 为奇函数。

(6) $$f(-x)=(-x)^{2}\cos(-x)=x^{2}\cos x=f(x)$$

所以 $f(x)=x^{2}\cos x$ 为偶函数。

(7) $$f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-f(x)$$

所以 $f(x)=x+\sin x$ 为奇函数。

(8) $$f(-x)=\lg(\sqrt{x^{2}+1}+x)=\lg\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}-x}=-f(x)$$

所以 $f(x)=\lg(\sqrt{x^{2}+1}-x)$ 为奇函数。

(9) $$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 为奇函数。

(10) $$f(-x)=\begin{cases}1+x, & -x\leqslant 0\\ 1-x, & -x>0\end{cases}=\begin{cases}1+x, & x\geqslant 0\\ 1-x, & x<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1+x, & x>0\\ 1-x, & x\leqslant 0\end{cases}=f(x)$$

所以 $f(x)$ 是偶函数。

(11) $$f(-x)=\begin{cases}1, & -x\geqslant 0\\ -1, & -x<0\end{cases}=\begin{cases}1, & x\leqslant 0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数。

(12) $$f(-x)=\begin{cases}-x^{2}-x, & -x>0\\ x^{2}-x, & -x<0\end{cases}=\begin{cases}-x^{2}-x, & x<0\\ x^{2}-x, & x>0\end{cases}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数。

43. (1),(5),(7) 必为偶函数;(2),(8) 必为奇函数;(3),(4),(6) 无法确定。

44. 由 $f(x)$ 是奇函数,有 $f(-x)=-f(x)$。

从而
$$\begin{aligned}F(-x)&=f(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)\\&=-f(x)\left(\frac{2^{x}}{1+2^{x}}-\frac{1}{2}\right)\\&=-f(x)\left(\frac{1+2^{x}-1}{1+2^{x}}-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$