与普通高等教育"十一五"国家级规划教材《高等数学》配套

张志强 编著

高等数学
强化与考研教程

第一册 一元微积分

兰州大学出版社

与普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学》配套

张志强　编著

高等数学
强化与考研教程

第一册　一元微积分

蘭州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学强化与考研教程.第1册,一元微积分/张志强编著.—兰州:兰州大学出版社,2008.10

ISBN 978-7-311-03114-5

Ⅰ.高... Ⅱ.张... Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料②微积分—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 156314 号

责任编辑 陈红升 魏春玲

封面设计 张友乾

书　　名	高等数学强化与考研教程 第一册　一元微积分
作　　者	张志强　编著
出版发行	兰州大学出版社　(地址:兰州市天水南路 222 号　730000)
电　　话	0931－8912613(总编办公室)　0931－8617156(营销中心) 0931－8914298(读者服务部)
网　　址	http://www.onbook.com.cn
电子信箱	press@onbook.com.cn
印　　刷	兰州新华印刷厂
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	27.25
字　　数	430 千字
印　　数	1～2000 册
版　　次	2008 年 10 月第 1 版
印　　次	2008 年 10 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-311-03114-5
定　　价	35.00 元

前　　言

本书是作者编著的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学》微积分部分的习题解答，也是高等数学习题课教程、强化提高教程、考研辅导教程和独具特色的高等数学复习资料.

原教材是为了将教学与考研相结合，全面提高教学质量和考研率而编写的. 在编写过程中特意将作者多年从事高等数学考研辅导班的教学经验、典型题和研究成果一部分融入例题中，另一部分列入 B 类习题，希望大多数学生能够早动手、早准备，有更多的机会和条件全方位、更系统、更深入地接近考研，在时间上做到抢占先机，在资源上做到拥有优势，在题型上做到穷尽可能，在方法上做到知变应变.

原教材在使用中受到了广大学生的热烈欢迎和高度肯定，通过与其它多种教材和考研资料的反复比较，一致认为独具特色，十分难得，特别是题型的典型性、全面性、系统性和层次性都是其它同类教材无法媲美的，一本书的含金量远远超过了十几本高等数学教材和考研资料的综合. 许多优秀学生非常认真地将 B 类习题从头至尾地做了一遍，极大地增加了考研的自信心并且取得了十分理想的考研效果. 由于多数学生在做 B 类习题时会遇到不少困难，所以强烈要求再出版配套的习题指导，以节省学习时间和提高学习效率.

本书既可以配合原教材使用，也可以独立用于考研复习. 作为习题解答，善用之则有益；依赖之则有害. 希望初学高等数学者坚持在独立思考的基础上使用本书，切不可抄袭以应付作业.

作为强化和考研教程，拥有本书就拥有考研资料优势，精通本书就掌握考研规律. 本书对于考研的各种热点问题作了深入分析和研究、有效拓展和强化；对于考研题型的变化和发展作了科学预测和探索、成功开发和设计；对于考研的历史用题作了系统总结和分类、合理取舍和安排. 本书后面的参考试题是为考研自测和期末复习设计的，期末考试样题的难度高于实际试题.

本书错误和不足在所难免，希望使用者多提批评意见，以便不断完善和改进.

编　者

2008 年 9 月于兰州大学

目　录

第一章　极限理论

§1.1　函数与数列

习 题 1.1 A

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{1-x^2}$;　　(2) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$;

(3) $f(x+3)$;　　(4) $f(2x)$.

其中 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ -2, & 1<x\le 2\end{cases}$.

解　(1)　解不等式组 $\begin{cases}x+2\ge 0,\\ 1-x^2\ne 0\end{cases}$ 可得函数的定义域为

$$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

(2)　解不等式组 $\begin{cases}x-1>0,\\ x-1\ne 1,\\ 16-x^2>0\end{cases}$ 可得函数的定义域为 $(1,2)\cup(2,4)$.

(3)　解不等式组 $0\le x+3\le 2$ 可得函数的定义域为 $[-3,-1]$.

(4)　解不等式组 $0\le 2x\le 2$ 可得函数的定义域为 $[0,1]$.

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;　　(2) $y=\dfrac{x\sin x}{2+\cos x}$;

(3) $y=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$; (4) $y=F(x)\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$.

其中 $F(x)$ 为奇函数.

解 (1) 由于

$$\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

所以 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

(2) 由于 $x\sin x,\cos x$ 为偶函数，所以 $\dfrac{x\sin x}{2+\cos x}$ 为偶函数.

(3) 由于 2^x-2^{-x} 为奇函数， 2^x+2^{-x} 为偶函数，所以 $\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ 为奇函数.

(4) 令 $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}$, 则 $f(-x)=-\dfrac{2^x}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}$. 由此可知

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{2^x}{2^x-1}+\frac{1}{2}=0.$$

因此 $f(x)$ 为奇函数，于是 $F(x)\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 为偶函数.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内 __________.

(A) 有上界无下界； (B) 有下界无上界；

(C) 有界且 $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$; (D) 有界且 $-2\le f(x)\le 2$.

解 由于 $2|x|\le 1+x^2$, 所以 $|f(x)|\le\dfrac{1}{2}$, 选 C.

4. 函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在定义区间 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上 __________.

(A) 有上界无下界； (B) 有下界无上界；

(C) 有界且 $2\lg\dfrac{1}{2}\le f(x)\le 0$; (D) 有界且 $\lg\dfrac{1}{2}\le f(x)\le-\dfrac{1}{4}$.

解 1 由于 $\dfrac{\lg1/2}{x}\le f(x)\le\dfrac{\lg1}{x}=0$ 且 $f(\dfrac{1}{2})=2\lg\dfrac{1}{2}$, $f(1)=0$, 所以排除 A, B, D 选 C.

解 2 由于 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时，$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\lg \mathrm{e} - \lg x) > 0$, 所以 $f(\frac{1}{2}) \le f(x) \le f(1)$, 因此选 C.

5. 函数 $y = \frac{ax-b}{cx-d}$ 的反函数是 ＿＿＿＿＿＿.

(A) $y = \frac{ax-b}{cx-d}$; (B) $y = \frac{ax-d}{cx-b}$;

(C) $y = \frac{cx-d}{ax-b}$; (D) $y = \frac{dx-b}{cx-a}$.

解 由 $y = \frac{ax-b}{cx-d}$ 可得 $x = \frac{dy-b}{cy-a}$, 故选 D.

6. 设 $f_n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(x)$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解 根据

$$f_2(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

依次类推可得

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

7. 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x+|x|)$, $\quad g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}$, 求 $f[g(x)]$.

解 由于 $f(x) = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} f(\mathrm{e}^{-x}), & x < 0 \\ f(x^2), & x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \ge 0. \end{cases}$$

8. 设 $x_n = \frac{1}{n}$, 当 $\varepsilon > 0$ 时，证明区间 $(0, \varepsilon)$ 必包含 $\{x_n\}$ 的一个截断子列.

证 若 $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$, 则 $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. 令 $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, 则

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+n}, \cdots \in (0, \varepsilon).$$

9. 设 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 当 $\varepsilon > 0$ 时，证明区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 必包含 $\{x_n\}$ 的一个截断子列.

证 若 $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \geq \varepsilon$, 则 $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. 令 $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, 则

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots, x_{N+n}, \cdots \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

10. 设 $x_n = (-1)^n$, 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时，证明区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 不包含 $\{x_n\}$ 的任何截断子列.

证 由于 $0 < \varepsilon < 1$, 所以 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 或者不含 $\{x_n\}$的偶数项，或者不含 $\{x_n\}$的奇数项，因而 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 不含 $\{x_n\}$的任何截断子列.

习 题 1.1 B

1. 设对一切实数 x, 有 $f(\frac{1}{2}+x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为________的周期函数.

解 由于

$$\begin{aligned} f[\frac{1}{2} + (\frac{1}{2}+x)] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(\frac{1}{2}+x) - f^2(\frac{1}{2}+x)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = f(x), \end{aligned}$$

所以 1 是 $f(x)$ 的周期.

2. 设 $f(x) = 2x^2+1$, $g(x) = (x+1)(x-2)$, 则函数 $f[g(x)]$ 的单调递增区间是

(A) $[-1, 2]$; (B) $[-2, 0]$; (C) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$; (D) $[0, 2]$.

解 1　由于

$$
\begin{aligned}
&f\circ g(-1)=f\circ g(2)=1,\\
&f\circ g(-2)=33>f\circ g(0)=9,\\
&f\circ g(-1)=1<f\circ g(\frac{1}{2})=2\cdot(\frac{9}{4})^2+1,\\
&f\circ g(0)>f\circ g(2),
\end{aligned}
$$

所以选 C.

解 2　根据

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)=4(x+1)(x-2)(2x-1)$$

可知，$[-1,\frac{1}{2}]$ 是 $f[g(x)]$ 的单调递增区间，所以选 C.

3. 证明没有最大项的数列必有严格增子列.

证　设数列 $\{x_n\}$ 没有最大项,则对 $x_{k_1}=x_1$,截断子列 $x_{k_1+1},x_{k_1+2},\cdots,x_{k_1+n},\cdots$ 存在项 x_{k_2},使得 $x_{k_2}>x_{k_1}$. 同理截断子列 $x_{k_2+1},x_{k_2+2},\cdots,x_{k_2+n},\cdots$ 存在项 x_{k_3},使得 $x_{k_3}>x_{k_2}$. 依次类推即可得到一个严格增子列 $x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_n},\cdots$.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上无上界，试证明存在数列 $x_n\in[a,b]$, 使得 $f(x_n)>n$ 对一切 n 成立.

证　由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上无上界, 所以对任意的 n, 不等式 $f(x)>n$ 必有一个解，可记为 x_n. 否则 n 为 $f(x)$ 的上界.

5. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界当且仅当对每个数列 $x_n\in[a,b]$, 复合数列 $\{f(x_n)\}$ 都有界.

证　由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上无界 $\iff$ 存在数列 $x_n\in[a,b]$, 使得 $|f(x_n)|>n$ 对一切 n 成立，所以否命题成立，即函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界当且仅当对每个数列 $x_n\in[a,b]$, 复合数列 $\{f(x_n)\}$ 都有界.

6. 设 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. 证明当 $0<x_1\le\sqrt{3}$ 时，$\{x_n\}$ 递增; 当 $x_1>\sqrt{3}$ 时，$\{x_n\}$ 递减.

证 假设 $x_n > 0$, 则有 $0 < x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n} < 3$. 根据

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n},$$

有

(1) 当 $x_1 < \sqrt{3}$ 时, $x_2 > x_1$, 且

$$x_2 = \frac{3(1+x_1)}{3+x_1} < \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

于是 $x_3 > x_2$ 且

$$x_3 = \frac{3(1+x_2)}{3+x_2} < \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

依次类推必有 $\{x_n\}$ 单调增.

(2) 当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时, 类似地可证 $\{x_n\}$ 单调减.

[注] 可根据 $x_{n+1} = 3 - \dfrac{6}{3+x_n}$, 利用归纳法证明 $\{x_n\}$ 的单调性.

7. 设 $x_1 \geq \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{1+x_n}$. 试证 $\{x_{2n}\}$ 递增, $\{x_{2n-1}\}$ 递减.

证 设 $f(x) = \dfrac{2+x}{1+x}$, 则由 $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$ 可知, $f(x)$ 递减. 由 $x_1 \geq \sqrt{2}$ 可得,

$$x_2 = f(x_1) \leq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2};$$

由 $x_2 \leq \sqrt{2}$ 可得,

$$x_3 = f(x_2) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

依次类推, 有

$$x_{2n} \leq \sqrt{2} \leq x_{2n-1}.$$

于是, 根据

$$x_{n+2} - x_n = \frac{2(2-x_n^2)}{3+2x_n}$$

可知, $\{x_{2n}\}$ 递增, $\{x_{2n-1}\}$ 递减.

[注] 可根据 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+x_n}$, 利用归纳法证明 $\{x_n\}$ 的单调性.

8. 证明下列不等式：

(1) $2^n < n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n\ (n > 4)$;　　　　(2) $n! \geq n^{n/2}$.

证　(1) 用归纳法. 当 $n = 5$ 时，有 $32 = 2^5 < 5! = 120$. 若 $n > 4, 2^{n-1} < (n-1)!$, 则有 $2^n < (n-1)! \cdot 2 < n!$.

根据平均不等式，有

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

由此可知，当 $n > 1$ 时，$n! < (\dfrac{n+1}{2})^n$.

(2) 当 $n < 5$ 时，直接验证可知结论成立. 根据平均不等式，有

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}.$$

令 $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \sqrt{n}$, 则有 $x_5 < 0$, 并当 $n > 3$ 时，有

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{2-\sqrt{n+1}}{2(n+1)} < 0. \end{aligned}$$

由此可知，当 $n \geq 5$ 时，$1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} < \sqrt{n}$, 因此，当 $n \geq 5$ 时，$\sqrt[n]{n!} > \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. 这表明 $n! \geq n^{n/2}$.

9. 设 $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, 证明 $\{x_n\}$ 为递增数列.

证　由平均不等式，有

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{x_n} &= \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+1}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是 $x_n < x_{n+1}$.

10. 如果数列 $\{x_n\}$ 可以重排为单调增数列，证明 $\{x_n\}$ 的每个截断子列都有最小项.

证 由于 $\{x_n\}$ 可以重排为单调增数列，所以 $\{x_n\}$ 不含严格减子列，由此可知 $\{x_n\}$ 的每个截断子列都有最小项.

§1.2 数列的极限

习题 1.2 A

1. 考察数列 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的变化趋势和极限 A, 并按要求填写下表.

要 $\|x_n - A\| <$	0.1	0.0001	0.000001
只要 $n >$			

解 $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$. 当 $\varepsilon = 0.1,\ 0.0001,\ 0.000001$ 时，可取

$$N = 10^2,\ 10^8,\ 10^{12}.$$

2. 用定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n+1} = 1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}) = 1$.

证 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left|\dfrac{n-2}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, 只要 $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$. 取 $N = \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, 则当 $n > N$ 时，必有 $\left|\dfrac{n-2}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-2}{n+1} = 1$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$, 根据

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1\right| = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1} + n)} < \frac{1}{n},$$