

与普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学》配套

张志强 编著

高等数学 强化与考研教程

第一册 一元微积分



兰州大学出版社

与普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学》配套

张志强 编著

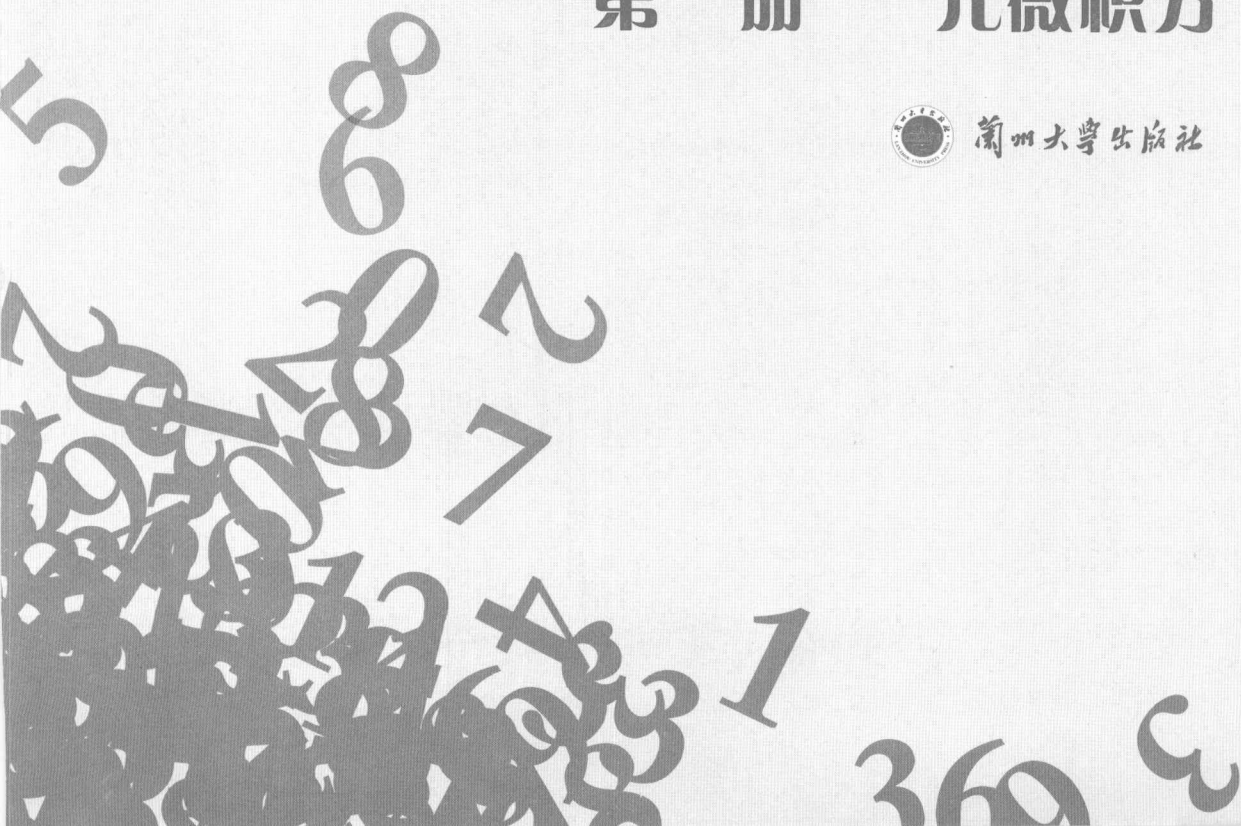
高等数学

强化与考研教程

第一册 一元微积分



兰州大学出版社



图书在版编目(CIP)数据

高等数学强化与考研教程.第1册,一元微积分/张志强编著. —兰州:兰州大学出版社,2008.10
ISBN 978-7-311-03114-5

I. 高... II. 张... III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料②微积分—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. 013 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 156314 号

责任编辑 陈红升 魏春玲
封面设计 张友乾

书 名	高等数学强化与考研教程 第一册 一元微积分
作 者	张志强 编著
出版发行	兰州大学出版社 (地址:兰州市天水南路 222 号 730000)
电 话	0931-8912613(总编办公室) 0931-8617156(营销中心) 0931-8914298(读者服务部)
网 址	http://www.onbook.com.cn
电子信箱	press@onbook.com.cn
印 刷	兰州新华印刷厂
开 本	787×1092 1/16
印 张	27.25
字 数	430 千字
印 数	1~2000 册
版 次	2008 年 10 月第 1 版
印 次	2008 年 10 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-311-03114-5
定 价	35.00 元

(图书若有破损、缺页、掉页可随时与本社联系)

前 言

本书是作者编著的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学》微积分部分的习题解答,也是高等数学习题课教程、强化提高教程、考研辅导教程和独具特色的高等数学复习资料.

原教材是为了将教学与考研相结合,全面提高教学质量和考研率而编写的.在编写过程中特意将作者多年从事高等数学考研辅导班的教学经验、典型题和研究成果一部分融入例题中,另一部分列入B类习题,希望大多数学生能够早动手、早准备,有更多的机会和条件全方位、更系统、更深入地接近考研,在时间上做到抢占先机,在资源上做到拥有优势,在题型上做到穷尽可能,在方法上做到知变应变.

原教材在使用中受到了广大学生的热烈欢迎和高度肯定,通过与其它多种教材和考研资料的反复比较,一致认为独具特色,十分难得,特别是题型的典型性、全面性、系统性和层次性都是其它同类教材无法媲美的,一本书的含金量远远超过了十几本高等数学教材和考研资料的综合.许多优秀学生非常认真地将B类习题从头至尾地做了一遍,极大地增加了考研的自信心并且取得了十分理想的考研效果.由于多数学生在做B类习题时会遇到不少困难,所以强烈要求再出版配套的习题指导,以节省学习时间和提高学习效率.

本书既可以配合原教材使用,也可以独立用于考研复习.作为习题解答,善用之则有益;依赖之则有害.希望初学高等数学者坚持在独立思考的基础上使用本书,切不可抄袭以应付作业.

作为强化和考研教程,拥有本书就拥有考研资料优势,精通本书就掌握考研规律.本书对于考研的各种热点问题作了深入分析和研究、有效拓展和强化;对于考研题型的变化和发展作了科学预测和探索、成功开发和设计;对于考研的历史用题作了系统总结和分类、合理取舍和安排.本书后面的参考试题是为考研自测和期末复习设计的,期末考试样题的难度高于实际试题.

本书错误和不足在所难免，希望使用者多提批评意见，以便不断完善和改进。

编 者

2008 年 9 月于兰州大学

目 录

第一章 极限理论	5
§1.1 函数与数列	5
习题 1.1 A	5
习题 1.1 B	8
§1.2 数列的极限	12
习题 1.2 A	12
习题 1.2 B	16
§1.3 函数的极限	19
习题 1.3 A	19
习题 1.3 B	24
§1.4 无穷小与无穷大	28
习题 1.4 A	28
习题 1.4 B	31
§1.5 连续函数	40
习题 1.5 A	40
习题 1.5 B	43
总习题一	48
第二章 导数与微分	56
§2.1 导数的概念	56
习题 2.1 A	56
习题 2.1 B	60
§2.2 求导法则	66
习题 2.2 A	66
习题 2.2 B	69
§2.3 高阶导数与隐式导数	72
习题 2.3 A	72
习题 2.3 B	77
§2.4 函数微分	93

习题 2.4 A	93
习题 2.4 B	99
总习题二	107
第三章 中值定理及其应用	117
§3.1 微分中值定理	117
习题 3.1 A	117
习题 3.1 B	121
§3.2 罗必达法则	128
习题 3.2 A	128
习题 3.2 B	131
§3.3 泰勒公式	138
习题 3.3 A	138
习题 3.3 B	143
§3.4 导数的应用	149
习题 3.4 A	149
习题 3.4 B	158
总习题三	174
第四章 定积分与不定积分	183
§4.1 定积分概念	183
习题 4.1 A	183
习题 4.1 B	186
§4.2 微积分基本定理	191
习题 4.2 A	191
习题 4.2 B	195
§4.3 积分方法	201
习题 4.3 A	201
习题 4.3 B	211
§4.4 变限积分与分段积分	217
习题 4.4 A	217
习题 4.4 B	224
总习题四	232

第五章 分类积分与积分应用	240
§5.1 可有理类积分	240
习题 5.1 A	240
习题 5.1 B	248
§5.2 定积分的应用	258
习题 5.2 A	258
习题 5.2 B	265
§5.3 广义积分	279
习题 5.3 A	279
习题 5.3 B	281
总习题五	288
第六章 无穷级数	302
§6.1 数项级数	302
习题 6.1 A	302
习题 6.1 B	309
§6.2 函数项级数	317
习题 6.2 A	317
习题 6.2 B	320
§6.3 幂级数	327
习题 6.3 A	327
习题 6.3 B	336
§6.4 傅立叶级数	343
习题 6.4 A	343
习题 6.4 B	350
总习题六	355
第七章 微分方程 I	364
§7.1 微分方程的基本概念	364
习题 7.1 A	364
习题 7.1 B	368
§7.2 一阶微分方程	371

习题 7.2 A	371
习题 7.2 B	376
§7.3 高阶微分方程	386
习题 7.3 A	386
习题 7.3 B	395
总习题七	406
参考试题	414
试题 1 期末考试样题一	414
试题 2 期末考试样题二	417
试题 3 期末考试样题三	419
试题 4 期末考试样题四	421
试题 5 期末考试样题五	424
试题 6 兰州大学高数考研样题	426
试题 7 统考一类数学考研样题	428

第一章 极限理论

§1.1 函数与数列

习 题 1.1 A

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{x+2} - \frac{1}{1-x^2}; \quad (2) y = \log_{x-1}(16-x^2);$$

$$(3) f(x+3); \quad (4) f(2x).$$

$$\text{其中 } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

$$\text{解 (1) 解不等式组 } \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 1-x^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{可得函数的定义域为}$$

$$[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

$$(2) \text{ 解不等式组 } \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ 16-x^2 > 0 \end{cases} \quad \text{可得函数的定义域为 } (1, 2) \cup (2, 4).$$

$$(3) \text{ 解不等式组 } 0 \leq x+3 \leq 2 \text{ 可得函数的定义域为 } [-3, -1].$$

$$(4) \text{ 解不等式组 } 0 \leq 2x \leq 2 \text{ 可得函数的定义域为 } [0, 1].$$

2. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) y = \frac{x \sin x}{2 + \cos x};$$

$$(3) y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}};$$

$$(4) y = F(x) \left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2} \right).$$

其中 $F(x)$ 为奇函数.

解 (1) 由于

$$\ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

所以 $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

(2) 由于 $x \sin x, \cos x$ 为偶函数, 所以 $\frac{x \sin x}{2 + \cos x}$ 为偶函数.

(3) 由于 $2^x - 2^{-x}$ 为奇函数, $2^x + 2^{-x}$ 为偶函数, 所以 $\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ 为奇函数.

(4) 令 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}$, 则 $f(-x) = -\frac{2^x}{2^x - 1} + \frac{1}{2}$. 由此可知

$$f(x) + f(-x) = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{2^x}{2^x - 1} + \frac{1}{2} = 0.$$

因此 $f(x)$ 为奇函数, 于是 $F(x) \left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$ 为偶函数.

3. 函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内 _____.

(A) 有上界无下界;

(B) 有下界无上界;

(C) 有界且 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$;

(D) 有界且 $-2 \leq f(x) \leq 2$.

解 由于 $2|x| \leq 1 + x^2$, 所以 $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$, 选 C.

4. 函数 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在定义区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上 _____.

(A) 有上界无下界;

(B) 有下界无上界;

(C) 有界且 $2 \lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$;

(D) 有界且 $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}$.

解 1 由于 $\frac{\lg 1/2}{x} \leq f(x) \leq \frac{\lg 1}{x} = 0$ 且 $f(\frac{1}{2}) = 2 \lg \frac{1}{2}$, $f(1) = 0$, 所以排除 A, B, D 选 C.

解 2 由于 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x^2}(\lg e - \lg x) > 0$, 所以 $f(\frac{1}{2}) \leq f(x) \leq f(1)$, 因此选 C.

5. 函数 $y = \frac{ax-b}{cx-d}$ 的反函数是 _____.

- (A) $y = \frac{ax-b}{cx-d}$; (B) $y = \frac{ax-d}{cx-b}$;
(C) $y = \frac{cx-d}{ax-b}$; (D) $y = \frac{dx-b}{cx-a}$.

解 由 $y = \frac{ax-b}{cx-d}$ 可得 $x = \frac{dy-b}{cy-a}$, 故选 D.

6. 设 $f_n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_n(x)$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解 根据

$$f_2(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

依次类推可得

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

7. 设 $f(x) = \frac{1}{2}(x+|x|)$, $g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[g(x)]$.

解 由于 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} f(e^{-x}), & x < 0 \\ f(x^2), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

8. 设 $x_n = \frac{1}{n}$, 当 $\varepsilon > 0$ 时, 证明区间 $(0, \varepsilon)$ 必包含 $\{x_n\}$ 的一个截断子列.

证 若 $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$, 则 $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. 令 $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, 则

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+n}, \dots \in (0, \varepsilon).$$

9. 设 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 当 $\varepsilon > 0$ 时, 证明区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 必包含 $\{x_n\}$ 的一个截断子列.

证 若 $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| \geq \varepsilon$, 则 $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. 令 $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, 则

$$x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+n}, \dots \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

10. 设 $x_n = (-1)^n$, 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时, 证明区间 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 不包含 $\{x_n\}$ 的任何截断子列.

证 由于 $0 < \varepsilon < 1$, 所以 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 或者不含 $\{x_n\}$ 的偶数项, 或者不含 $\{x_n\}$ 的奇数项, 因而 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 不含 $\{x_n\}$ 的任何截断子列.

习 题 1.1 B

1. 设对一切实数 x , 有 $f(\frac{1}{2} + x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为 _____ 的周期函数.

解 由于

$$\begin{aligned} f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} = f(x), \end{aligned}$$

所以 1 是 $f(x)$ 的周期.

2. 设 $f(x) = 2x^2 + 1$, $g(x) = (x+1)(x-2)$, 则函数 $f[g(x)]$ 的单调递增区间是

- (A) $[-1, 2]$; (B) $[-2, 0]$; (C) $[-1, \frac{1}{2}]$; (D) $[0, 2]$.

解 1 由于

$$\begin{aligned} f \circ g(-1) &= f \circ g(2) = 1, \\ f \circ g(-2) &= 33 > f \circ g(0) = 9, \\ f \circ g(-1) &= 1 < f \circ g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 1, \\ f \circ g(0) &> f \circ g(2), \end{aligned}$$

所以选 C.

解 2 根据

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = 4(x+1)(x-2)(2x-1)$$

可知, $[-1, \frac{1}{2}]$ 是 $f[g(x)]$ 的单调递增区间, 所以选 C.

3. 证明没有最大项的数列必有严格增子列.

证 设数列 $\{x_n\}$ 没有最大项, 则对 $x_{k_1} = x_1$, 截断子列 $x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, \dots, x_{k_1+n}, \dots$ 存在项 x_{k_2} , 使得 $x_{k_2} > x_{k_1}$. 同理截断子列 $x_{k_2+1}, x_{k_2+2}, \dots, x_{k_2+n}, \dots$ 存在项 x_{k_3} , 使得 $x_{k_3} > x_{k_2}$. 依次类推即可得到一个严格增子列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上无上界, 试证明存在数列 $x_n \in [a, b]$, 使得 $f(x_n) > n$ 对一切 n 成立.

证 由于 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上无上界, 所以对任意的 n , 不等式 $f(x) > n$ 必有一个解, 可记为 x_n . 否则 n 为 $f(x)$ 的上界.

5. 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界当且仅当对每个数列 $x_n \in [a, b]$, 复合数列 $\{f(x_n)\}$ 都有界.

证 由于 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上无界 $\iff$ 存在数列 $x_n \in [a, b]$, 使得 $|f(x_n)| > n$ 对一切 n 成立, 所以否命题成立, 即函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界当且仅当对每个数列 $x_n \in [a, b]$, 复合数列 $\{f(x_n)\}$ 都有界.

6. 设 $x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$. 证明当 $0 < x_1 \leq \sqrt{3}$ 时, $\{x_n\}$ 递增; 当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时, $\{x_n\}$ 递减.

证 假设 $x_n > 0$, 则有 $0 < x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} < 3$. 根据

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n},$$

有

(1) 当 $x_1 < \sqrt{3}$ 时, $x_2 > x_1$, 且

$$x_2 = \frac{3(1+x_1)}{3+x_1} < \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

于是 $x_3 > x_2$ 且

$$x_3 = \frac{3(1+x_2)}{3+x_2} < \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

依次类推必有 $\{x_n\}$ 单调增.

(2) 当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时, 类似地可证 $\{x_n\}$ 单调减.

[注] 可根据 $x_{n+1} = 3 - \frac{6}{3+x_n}$, 利用归纳法证明 $\{x_n\}$ 的单调性.

7. 设 $x_1 \geq \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1+x_n}$. 试证 $\{x_{2n}\}$ 递增, $\{x_{2n-1}\}$ 递减.

证 设 $f(x) = \frac{2+x}{1+x}$, 则由 $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ 可知, $f(x)$ 递减. 由 $x_1 \geq \sqrt{2}$ 可得,

$$x_2 = f(x_1) \leq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2};$$

由 $x_2 \leq \sqrt{2}$ 可得,

$$x_3 = f(x_2) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

依次类推, 有

$$x_{2n} \leq \sqrt{2} \leq x_{2n-1}.$$

于是, 根据

$$x_{n+2} - x_n = \frac{2(2-x_n^2)}{3+2x_n}$$

可知, $\{x_{2n}\}$ 递增, $\{x_{2n-1}\}$ 递减.

[注] 可根据 $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$, 利用归纳法证明 $\{x_n\}$ 的单调性.

8. 证明下列不等式:

$$(1) 2^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n > 4); \quad (2) n! \geq n^{n/2}.$$

证 (1) 用归纳法. 当 $n = 5$ 时, 有 $32 = 2^5 < 5! = 120$. 若 $n > 4$, $2^{n-1} < (n-1)!$, 则有 $2^n < (n-1)! \cdot 2 < n!$.

根据平均不等式, 有

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

由此可知, 当 $n > 1$ 时, $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

(2) 当 $n < 5$ 时, 直接验证可知结论成立. 根据平均不等式, 有

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}.$$

令 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \sqrt{n}$, 则有 $x_5 < 0$, 并当 $n > 3$ 时, 有

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{2 - \sqrt{n+1}}{2(n+1)} < 0. \end{aligned}$$

由此可知, 当 $n \geq 5$ 时, $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \sqrt{n}$, 因此, 当 $n \geq 5$ 时, $\sqrt[n]{n!} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. 这表明 $n! \geq n^{n/2}$.

9. 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 证明 $\{x_n\}$ 为递增数列.

证 由平均不等式, 有

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{x_n} &= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot 1 < \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是 $x_n < x_{n+1}$.

10. 如果数列 $\{x_n\}$ 可以重排为单调增数列, 证明 $\{x_n\}$ 的每个截断子列都有最小项.

证 由于 $\{x_n\}$ 可以重排为单调增数列, 所以 $\{x_n\}$ 不含严格减子列, 由此可知 $\{x_n\}$ 的每个截断子列都有最小项.

§1.2 数列的极限

习 题 1.2 A

1. 考察数列 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的变化趋势和极限 A , 并按要求填写下表.

要 $ x_n - A <$	0.1	0.0001	0.000001
只要 $n >$			

解 $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. 当 $\varepsilon = 0.1, 0.0001, 0.000001$ 时, 可取

$$N = 10^2, 10^8, 10^{12}.$$

2. 用定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n+1} = 1; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1.$$

证 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left| \frac{n-2}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$. 取 $N = \frac{3}{\varepsilon} - 1$, 则当 $n > N$ 时, 必有 $\left| \frac{n-2}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{n+1} = 1$.

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 要 $\left| \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$, 根据

$$\left| \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - 1 \right| = \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n^2+1} + n)} < \frac{1}{n},$$