各版本适用

立足高考大纲　探究知识内涵
解读奥赛真题　揭示思维规律
点击高考难题　登上名校殿堂

QUANCHENG DUIJIE

GAOKAO AOSAI

高考·奥赛全程对接

强化训练

高中数学3

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

丛书主编　蔡　晔

高考·奥赛全程对接强化训练

高中数学3

丛书主编　蔡　晔
本书主编　黄凤圣
本书参编　牛本富　李学镇　解玉红　陈　伟　李成国
谢瑞聪　张晓辉　郝伟华　郑芝萍　刘跃先
赵永明　李道军　樊　云　赵忠平　张　立

机械工业出版社

本书以高中数学《大纲》及《课程标准》为依据，全面参考现行的各版本教科书，以“题组训练”的形式将“基础对接题”、“高考对接题”和“竞赛对接题”有机组合，引导学生进行科学的强化训练，突破学习难关，快速提高学习成绩。本书内容略高于平时教学难度，基本接近高考难题和奥赛初赛水平，适合学生课外复习训练拔高成绩之用。

图书在版编目(CIP)数据

高考·奥赛全程对接强化训练．高中数学3/蔡晔丛书主编．—北京：机械工业出版社，2008.6

ISBN 978-7-111-24423-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．蔡…　Ⅲ．数学课—高中—习题—升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第090043号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)

策划编辑：胡　明　　责任编辑：董　磊

封面设计：鞠　杨　　责任印制：邓　博

北京市朝阳展望印刷厂印刷

2008年7月第1版·第1次印刷

203mm×280mm·9.25印张　250千字

标准书号：ISBN 978-7-111-24423-3

定价：14.50元

前　言

“高考”是人生道路上的关键一步，“奥赛”代表着学习水平的最高境界。在学有余力的情况下，将两者巧妙地结合，研习、对比奥赛的解题思路和思维方法，无疑是一条快速拔高成绩、轻松跑赢高考的捷径。“他山之石，可以攻玉”，而“奥赛”这颗“石”是一颗“钻石”。

本书编写思想

学科奥林匹克竞赛对激发学生的才能、引起学生对学习的兴趣、发现科技人才有突出的作用。虽然不是每个人都有机会参加这一比赛并能获奖，但“奥赛”中渗透着对知识精髓的挖掘和创新思维的指引，这对学生的日常学习有着重要的指导和借鉴意义。

对比“奥赛”初赛、复赛大纲和高考大纲，可以看出，“奥赛”考查的重点是学生对基本知识的深入理解、对所学知识的综合运用以及对创新能力的独立体验。而这一点恰恰是“新课标”素质教育中的核心内容，也是高考试卷改革的精神实质。

翻开各地历年的高考试卷，不难看出，很多高考难题、选拔题都有以前“奥赛”试题的影子。有的甚至就是往届“奥赛”题的翻版。

因此，本书以“题组训练”的形式，引导学生通过对不同难度、不同层次的典型题组进行强化训练，快速找到一套提高成绩、突破难题的最直接有效的方法。为了防止学生在钻研“奥赛”题时顾此失彼、得不偿失，本书设置的题组训练是循序渐进的。内容的难度要高于高考的难度，以高考大纲中的重、难点和被“奥赛”大纲加深、拓展的知识点为知识基础，将课堂重点基础题、高考典型题和“奥赛”经典题有机组合，进行阶梯式训练，发掘学生的思维潜能，培养学生的创新能力。

熟能生巧，厚积薄发。“学习”应以“习”为主，有“习”才有“得”。适量的针对性强化训练是真正将他人的经验变为自己的本领的唯一途径，是开发自己创新思维的基石。本书编者希望通过“练”来带领学生探寻到突破难题法宝。

本书编写构架

本书结构简单明了，思路简明清晰，内容简洁实用。本书内容按章节专题划分单元，每一章是一个大知识块，涵盖“大纲”和“课程标准”中列出的所有知识块。并将高考中的热点专题单独成章训练。

每一小节训练的题目分为 A、B、C 三组。题型包括高考试卷中的各种题型。每道题均配有详细解答过程。

本书使用说明

A 组为基础中的重点题，包括了课本上的经典题目、课外延伸的内容和学习过程中的一些难题，难度高于课本内容的难度。在掌握课本基本知识的基础上，可以使用本组题目，这有助于学生进一步加深对课本内容的理解和巩固。B 组为高考真题和各地模拟题，这部分试题有助于我们进一步掌握知识，把所学知识与高考联系起来。C 组为奥赛真题和创新题等，达到奥赛复赛的难度水平。这组题有助于我们把握知识的精髓，形成创新思想，可作为突破高考压轴题训练之用，也可以供准备参加“奥赛”的同学们训练使用。

书后答案部分为所有题目的详解，便于学生自学自评之用。

本丛书是《高考・奥赛全程对接》的配套练习，涉及数学、物理、化学、生物各科，涵盖中学各个年级，共计 16 分册，可作为新课标学习的同步提高、高考复习和竞赛辅导教材使用。

本书编写力量

参加本丛书编写的人员均为来自北京、山东、江苏、湖北、湖南、广东、河北各省市重点名校的一线优秀教师和奥赛辅导教练；部分清华大学和北京大学的“奥赛”保送生和高考理科状元也为本丛书做了许多有益工作。在此向他们为本书所作的工作致以真诚的感谢。

由于编写时间较紧，可能存在一些缺憾，敬请广大读者批评指正。

编　者

目 录

第一章　空间向量与立体几何

第一节　空间向量及其运算

A组 基础对接题

1. 在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，向量 $\overrightarrow{AB'}$、$\overrightarrow{AD'}$、$\overrightarrow{BD}$是　　(　　)

A. 有相同起点的向量　　B. 等长的向量

C. 共面向量　　D. 不共面向量

2. 设向量$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$是空间向量的一个基底，则一定可以与向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 构成空间的另一个基底的向量是　　(　　)

A. $\boldsymbol{a}$　　B. $\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$

3. 下列各组向量中不平行的是　　(　　)

A. $\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-4,4)$

B. $\boldsymbol{c}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{d}=(-3,0,0)$

C. $\boldsymbol{e}=(2,3,0)$，$\boldsymbol{f}=(0,0,0)$

D. $\boldsymbol{g}=(-2,3,5)$，$\boldsymbol{h}=(16,24,40)$

4. 如图 1-1，平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 AC 和 BD 的交点，若$\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$，则下列式子中与$\overrightarrow{B_1M}$相等的是　　(　　)

A. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

D. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

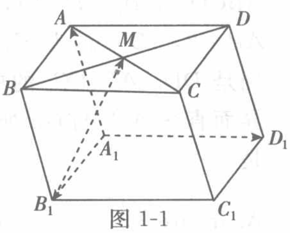

图 1-1

5. O、A、B、C 为空间四个点，又$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$为空间的一个基底，则　　(　　)

A. O、A、B、C 四点不共线

B. O、A、B、C 四点共面，但不共线

C. O、A、B、C 四点中任意三点不共线

D. O、A、B、C 四点不共面

6. 已知点 $A(-3,1,-4)$，则点 A 关于 x 轴对称的点的坐标为　　(　　)

A. $(-3,-1,4)$　　B. $(-3,-1,-4)$

C. $(3,1,4)$　　D. $(3,-1,-4)$

7. 已知 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，则 $5\boldsymbol{a}$ 与 $3\boldsymbol{b}$ 的数量积等于　　(　　)

A. -15　　B. -5

C. -3　　D. -1

8. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,\lambda,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦为$\frac{8}{9}$，则 λ 等于　　(　　)

A. 2　　B. -2

C. -2 或$\frac{2}{55}$　　D. 2 或$-\frac{2}{55}$

9. 若向量 $\boldsymbol{a}=(4,2,-4,)$，$\boldsymbol{b}=(6,-3,2)$，则$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=$________.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-4,2,x)$，若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x=$________；若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 则 $x=$________.

11. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60°$，则 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$ 等于________.

12. 如图 1-2，已知 $PA\perp$平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，G 为等腰三角形 PDC 的重心，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{k}$，试用基底$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$表示向量$\overrightarrow{PG}$，$\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{AG}$.

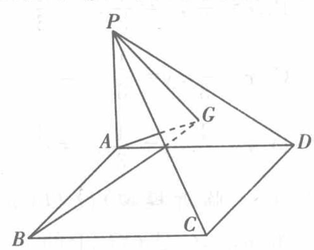

图 1-2

13. 如图 1-3，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，$M$、$N$、$P$ 分别是 AA_1、BC、C_1D_1 的中点，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示以下各个向量：

(1)$\overrightarrow{A_1N}$；　　(2)$\overrightarrow{MN}$；

(3)$\overrightarrow{NP}$；　　(4)$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NC_1}$.

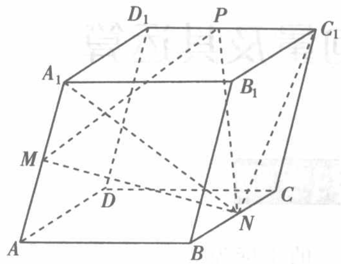

图 1-3

14. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,4,x)$，$\boldsymbol{b}=(2,y,2)$，若 $|\boldsymbol{a}|=6$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求 $x+y$ 的值.

B组 高考对接题

1. (07·烟台模拟)如图 1-4，已知空间四边形 $OABC$，其对角线为 OB、AC，M、N 分别是对边 OA、BC 的中点，点 G 在线段 MN 上，且分 MN 所成的比为 2，现用基向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 表示向量 $\overrightarrow{OG}$，设 $\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则 x、y、z 的值分别是　（　　）

A. $x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{3}$

B. $x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{6}$

C. $x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{6},z=\frac{1}{3}$

D. $x=\frac{1}{6},y=\frac{1}{3},z=\frac{1}{3}$

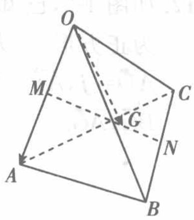

图 1-4

2. (06·临沂模拟)设 $OABC$ 是四面体，G_1 是 $\triangle ABC$ 的重心，G 是 OG_1 上的一点，且 $OG=3GG_1$，若 $\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则 (x,y,z) 为　（　　）

A. $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$　　B. $(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$

C. $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　D. $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

3. (05·福建)如图1-5，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2$，$AD=1$，点 E、F、G 分别是 DD_1、AB、CC_1 的中点，则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是　（　　）

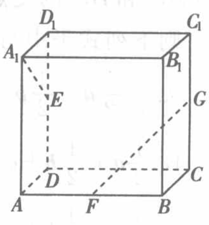

图 1-5

A. $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

4. (07·扬州模拟)如图 1-6 所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别在 A_1D、AC 上，且 $A_1E=\frac{2}{3}A_1D$，$AF=\frac{1}{3}AC$，则　（　　）

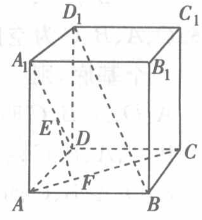

图 1-6

A. EF 至多与 A_1D、AC 之一垂直

B. EF 是 A_1D,AC 的公垂线

C. EF 与 BD_1 相交

D. EF 与 BD_1 异面

5.(07·惠州模拟)$\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(1,-1,2)$,$B(5,-6,2)$,$C(1,3,-1)$,则 AC 边上的高 BD 等于 ( )

A. 5　　B. $\sqrt{41}$

C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

6.(07·安徽)在四面体 $O\text{-}ABC$ 中,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$D$ 为 BC 的中点,E 为 AD 的中点,则 $\overrightarrow{OE}$ ________(用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示).

7.(06·东营模拟)已知 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 为正方体,其中正确的命题是________.

①$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1})^2=3\overrightarrow{A_1B_1}^2$;

②$\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=0$;

③向量$\overrightarrow{AD_1}$与向量$\overrightarrow{A_1B}$的夹角是 $60°$;

④立方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的体积为$|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}|$.

8.(07·潍坊模拟)如图 1-7,在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,M 和 N 分别是 A_1B_1 和 BB_1 的中点,那么直线 AM 与 CN 所成角的余弦值为________.

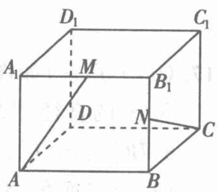

图 1-7

9.(06·滨州模拟)命题:①若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$共线,$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线;②向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面,则它们所在直线也共面;③若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,则存在唯一的实数λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$;④若 A、B、C 三点不共线,O 是平面 ABC 外一点,$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$,则点 M 一定在平面 ABC 上,且在$\triangle ABC$ 内部.上述命题中的真命题是________.

10.(07·海口模拟)如图1-8在直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形,$\angle BAD=60°$,$AA_1=AB=1$,则截面 ACC_1A_1 的面积为________,异面直线 AD 与 D_1C 所成角的余弦值为________.

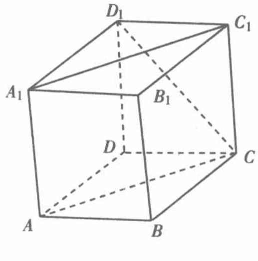

图 1-8

11.(07·济宁模拟)如图 1-9,正六棱柱 $ABCDEF\text{-}A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的底面边长为 1,侧棱长为$\sqrt{2}$,则这个棱柱的侧面对角线 E_1D 与 BC_1 所成的角的大小为________.

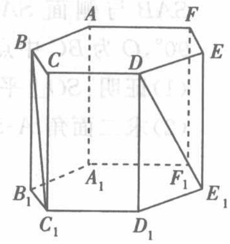

图 1-9

12.(07·四川)如图 1-10 在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,侧棱长为$\sqrt{2}$,底面三角形的边长为 1,则 BC_1 与则面 ACC_1A_1 所成的角是________.

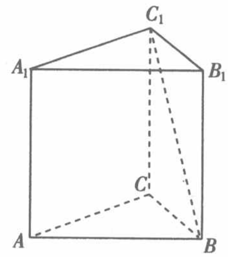

图 1-10

13.(07·山东)如图 1-11,在直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$,$AD\perp DC$,$AB/\!/DC$.

(1)设 E 是 DC 的中点,求证:$D_1E/\!/$平面 A_1BD;

(2)求二面角 $A_1\text{-}BD\text{-}C_1$ 的余弦值.

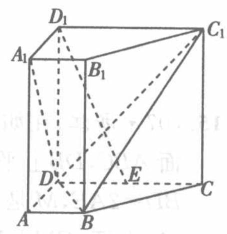

图 1-11

14.(07·海南)如图 1-12,在三棱锥$S\text{-}ABC$中,侧面SAB与侧面SAC均为等边三角形,$\angle BAC=90°$,O为BC中点.

(1)证明:$SO\perp$平面ABC;

(2)求二面角$A\text{-}SC\text{-}B$的余弦值.

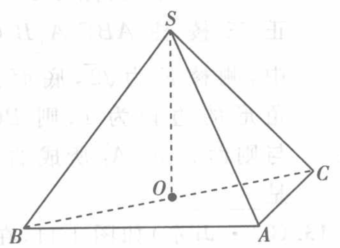

图 1-12

15.(07·浙江)在如图 1-13 所示的几何体中,$EA\perp$平面ABC,$DB\perp$平面ABC,$AC\perp BC$,且$AC=BC=BD=2AE$,M是AB的中点.

(1)求证:$CM\perp EM$;

(2)求DE与平面EMC所成的角的正切值.

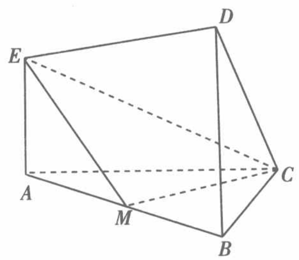

图 1-13

16.(07·威海模拟)如图 1-14,在直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中,$BA=BC=2$,$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,异面直线$A_1B$与$AC$成$60°$的角,点$O$、$E$分别是棱$AC$和$BB_1$的中点,点$F$是棱$B_1C_1$上的动点.

(1)证明:$A_1E\perp OF$;

(2)求点E到面AB_1C的距离;

(3)求二面角$B_1\text{-}A_1C\text{-}C_1$的大小.

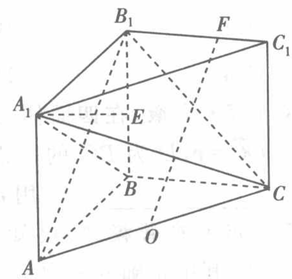

图 1-14

17.(06·广东)如图 1-15 所示,AF、DE分别是$\odot O$、$\odot O_1$的直径.AD与两圆所在的平面均垂直,$AD=8$,BC是$\odot O$的直径,$AB=AC=6$,$OE\parallel AD$.

(1)求二面角$B\text{-}AD\text{-}F$的大小;

(2)求直线BD与EF所成的角的余弦值.

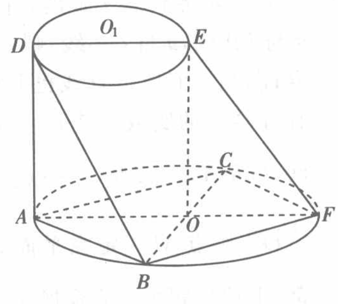

图 1-15

18.（07·湖北）如图 1-16，在三棱锥 $V\text{-}ABC$ 中，$VC\perp$底面 ABC，$AC\perp BC$，D 是 AB 的中点，且 $AC=BC=a$，$\angle VDC=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)求证：平面 $VAB\perp$平面 VCD；

(2)试确定角 θ 的值，使得直线 BC 与平面 VAB 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$.

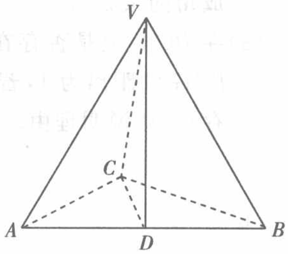

图 1-16

19.（07·福建）如图 1-17，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，D 为 CC_1 中点.

(1)求证：$AB_1\perp$平面 A_1BD；

(2)求二面角 $A\text{-}A_1D\text{-}B$ 的大小；

(3)求点 C 到平面 A_1BD 的距离.

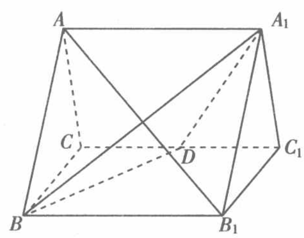

图 1-17

20.（07·东北师大附中模拟）如图 1-18，已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是正方形，且 $PD\perp$底面 $ABCD$，其中 $PD=AD=a$.

(1)求二面角 $A\text{-}PB\text{-}D$ 的大小；

(2)在线段 PB 上是否存在一点 E，使 $PC\perp$平面 ADE？若存在，试确定 E 点的位置；若不存在，请说明理由.

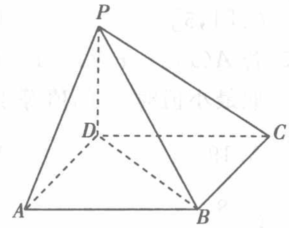

图 1-18

C组 竞赛对接题

1. 已知 $P=(3\cos\alpha,3\sin\alpha,1)$ 和 $Q=(2\cos\beta,2\sin\beta,1)$，则 $|PQ|$ 的取值范围是 ( )

A. $[0,5]$　　B. $[0,25]$

C. $[1,5]$　　D. $(1,5)$

2. 若 $A(x,5-x,2x-1)$，$B(1,x+2,2-x)$，当 $|\overrightarrow{AB}|$ 取最小值时，x 的值等于 ( )

A. 19　　B. $-\frac{8}{7}$

C. $\frac{8}{7}$　　D. $\frac{19}{14}$

3. 已知 $A(0,2,3)$，$B(-2,1,6)$，$C(1,-1,5)$，若 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{AC}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为________________.

4. 已知 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直，且 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$________.

5. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长是 1，则直线 DA_1 与 AC 间的距离为________.

6. 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,-4)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,8)$，计算 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，并确定 λ、μ 的关系，使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

7. 沿着正四面体 $OABC$ 的三条棱 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 的方向有大小等于 1、2、3 的三个力 $\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{f}_2$、$\boldsymbol{f}_3$. 试求此三个力的合力 $\boldsymbol{f}$ 的大小以及此合力与三条棱所夹角的余弦.

8. 如图 1-19，在底面是矩形的四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AB=1$，$BC=2$.

(1) 求证：平面 $PDC\perp$ 平面 PAD；

(2) 若 E 是 PD 的中点，求异面直线 AE 与 PC 所成角的余弦值；

(3) 在 BC 边上是否存在一点 G，使得 D 点到平面 PAG 的距离为 1，若存在，求出 BG 的值；若不存在，请说明理由.

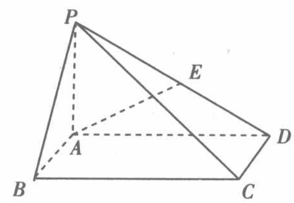

图 1-19

第二节　空间向量的应用

A组 基础对接题

1. 已知空间向量四边形 $ABCD$，连接 AC、BD，设 M、G 分别是 BC、CD 的中点，则 $\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 等于　（　　）

A. $\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$　　B. $3\overrightarrow{MG}$

C. $3\overrightarrow{GM}$　　D. $2\overrightarrow{MG}$

2. 下列命题中不正确的命题个数是　（　　）

①若 A、B、C、D 是空间任意四点，则有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$　②$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件　③若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在直线平行　④对空间任意点 O 与不共线的三点 A、B、C，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（其中 x、y、$z\in\mathbf{R}$），则 P、A、B、C 四点共面　（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

3. 若 $A(1,-2,1)$，$B(4,2,3)$，$C(6,-1,4)$，则 $\triangle ABC$ 的形状是　（　　）

A. 不等边锐角三角形

B. 直角三角形

C. 钝角三角形

D. 等边三角形

4. 空间四边形 $OABC$ 中，$OB=OC$，$\angle AOB=\angle AOC=\frac{\pi}{3}$，则 $\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle$ 的值是　（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$　　D. 0

5. 已知 A、B、C 三点不共线，对平面 ABC 外一点 O（如图1-20），分别根据条件：

(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$；

(2) $\overrightarrow{OP}=-2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$；

(3) $\overrightarrow{OP}=(\sin^2\alpha)\overrightarrow{OA}-\sqrt{2}\overrightarrow{OB}+(\cos^2\alpha+\sqrt{2})\overrightarrow{OC}$；

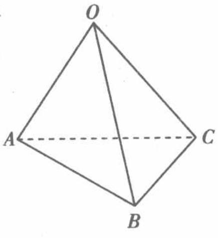

图 1-20

(4) $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}$.

能够确定 P 与 A、B、C 一定共面的有________.

6. 设 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 是空间不共线的向量，已知 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，若 A、B、D 三点共线.

求 k 的值.

7. 设向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$ 分别在两条异面直线上，M、N 分别为线段 AC、BD 的中点.

求证：向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{MN}$ 共面.

8. 已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心.

求证：$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$.

9. 已知平行四边形 $ABCD$，从平面 AC 外一点 O 引向量 $\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OD}$.

求证：(1)四点 E、F、G、H 共面；

(2)平面 AC∥平面 EG.

10. 直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$BC_1\perp AB_1$，$BC_1\perp A_1C$.

求证：$AB_1=A_1C$.

11. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，如图 1-21，E、F 分别是 BB_1、CD 的中点.

求证：$D_1F\perp$ 平面 ADE.

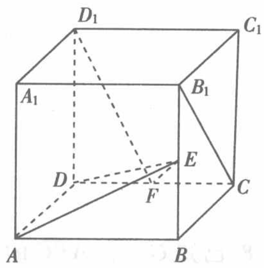

图 1-21

12. 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M、N 分别为 AA_1、BB_1 的中点.

求：CM 与 D_1N 所成角的余弦值.

13. A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外一点，M、N 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的重心，若 $BD=4$，试求 MN 的长.

14. 如图 1-22，多面体是由底面为 $ABCD$ 的长方体被截面 AEC_1F 所截而得到的，其中 $AB=4$，$BC=2$，$CC_1=3$，$BE=1$.

(1)求 BF 的长；

(2)求点 C 到平面 AEC_1F 的距离.

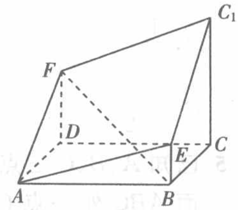

图 1-22

15. 在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，E 是 AB 上一点，$PE\perp EC$. 已知 $PD=\sqrt{2}$，$CD=2$，$AE=\frac{1}{2}$.

求(1)异面直线 PD 与 EC 的距离；

(2)二面角 $E\text{-}PC\text{-}D$ 的大小.

B组 高考对接题

1. (06·日照模拟)正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，O 是 A_1C_1 的中点，则 O 到平面 ABC_1D_1 的距离为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. (07·银川模拟)在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，若 $AB=2$，$AA_1=1$，则点 A 到平面 A_1BC 的距离为 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　D. $\sqrt{3}$

3. (07·全国Ⅱ)已知正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等，则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. (06·泰安模拟)正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，则 AC_1 和平面 BB_1C_1C 所成角的余弦值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

5. (06·淄博模拟)在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别为 A_1B_1、BB_1 的中点，那么直线 AM 与 CN 所成角的余弦值是 ( )

A. $-\frac{2}{5}$　B. $\frac{2}{5}$　C. $\frac{3}{5}$　D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

6. (07·南京模拟)如图 1-23 所示，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=AA_1$，$\angle ABC=90°$，点 E、F 分别是棱 AB、BB_1 的中点，则直线 EF 和 BC_1 所成的角是 ( )

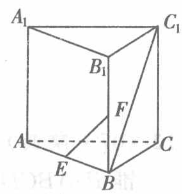

图 1-23

A. 45°　B. 60°

C. 90°　D. 120°

7. (06·中山模拟)已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，长方体的高 $AA_1=3$，则 BC_1 与对角面 BB_1D_1D 所成角的正弦值等于 ( )

A. $\frac{4}{5}$　B. $\frac{3}{5}$　C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$　D. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

8. (07·烟台模拟)二面角的棱上有 A、B 两点，直线 AC、BD 分别在这个二面角的两个半平面内，且都垂直于 AB. 已知 $AB=4$，$AC=6$，$BD=8$，$CD=2\sqrt{17}$，则该二面角的大小为 ( )

A. 150°　B. 45°　C. 60°　D. 120°

9. (07·佛山模拟)正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，EF 是异面直线 AC 与 A_1D 的公垂线，则 EF 与 BD_1 所成的角是 ( )

A. 90°　B. 60°　C. 30°　D. 0°

10. (07·海口模拟)正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $A\text{-}BD_1\text{-}B_1$ 的大小为________.

11. (06·湖南)如图 1-24 所示，已知两个正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 与 $Q\text{-}ABCD$ 的高分别为 1 和 2，$AB=4$.

(1)证明 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)求异面直线 AQ 与 PB 所成的角的余弦值；

(3)求点 P 到平面 QAD 的距离.

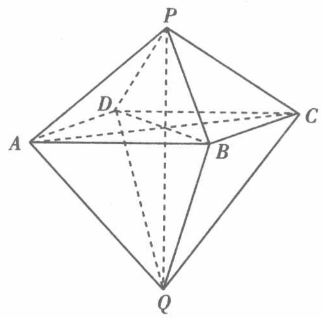

图 1-24

12.(07·陕西)如图 1-25 在底面为直角梯形的四棱锥 P-$ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90°$，$PA\perp$平面 $ABCD$. $PA=3$，$AD=2$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=6$.

(1)求证：$BD\perp$平面 PAC；

(2)求二面角 P-BD-A 的大小.

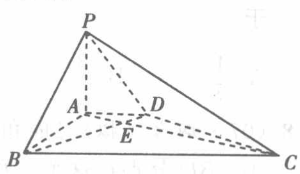

图 1-25

13.(07·汕头模拟)如图 1-26，直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=\sqrt{15}$，$AA_1=6$，E、F 分别为 AA_1 与 BC_1 的中点.

(1)求证：$EF\parallel$底面 ABC；

(2)求平面 EBC_1 与底面 ABC 所成的锐二面角的大小.

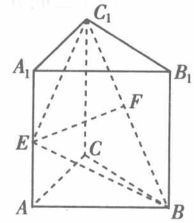

图 1-26

14.(05·湖南)如图 1-27，已知 $ABCD$ 是上、下底边长分别为 2 和 6、高为$\sqrt{3}$的等腰梯形，将它沿对称轴 OO_1 折成直二面角，如图 1-28，

证明：$AC\perp BO_1$；

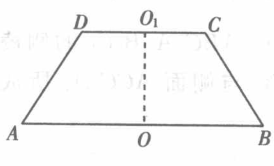

图 1-27

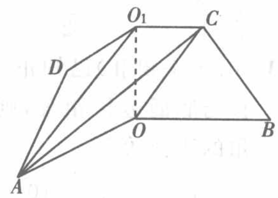

图 1-28

15.（07·重庆）如图1-29，在直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，$\angle ABC=90°$，$AB=1$，$BC=\frac{3}{2}$，$AA_1=2$；点D在棱BB_1上，$BD=\frac{1}{3}BB_1$；$B_1E\perp A_1D$，垂足为E，求：

(1)异面直线A_1D与B_1C_1的距离；

(2)四棱锥$C\text{-}ABDE$的体积.

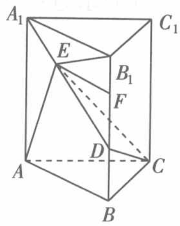

图 1-29

16.（07·韶关模拟）如图1-30，在四棱锥$P\text{-}ABCD$中，底面$ABCD$是边长为a的正方形，侧面$PAD\perp$底面$ABCD$，且$PA=PD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，若$E$、$F$分别为$PC$、$BD$的中点.

(1)$EF/\!/$平面PAD；

(2)求证：平面$PDC\perp$平面PAD；

(3)求二面角$B\text{-}PD\text{-}C$的正切值.

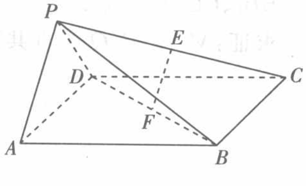

图 1-30

17.（07·安徽）如图1-31，在六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，四边形$ABCD$是边长为2的正方形，四边形$A_1B_1C_1D_1$是边长为1的正方形，$DD_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$DD_1\perp$平面$ABCD$，$DD_1=2$.

(1)求证：A_1C_1与AC共面，B_1D_1与BD共面.

(2)求证：平面$A_1ACC_1\perp$平面B_1BDD_1；

(3)求二面角$A\text{-}BB_1\text{-}C$的大小(用反三角函数值表示).

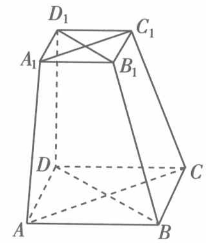

图 1-31

18.（05·济宁模拟）如图1-32，在直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，$AA_1=2$，$AC=BC=1$，$\angle ACB=90°$，点E是AB的中点，点F在侧棱BB_1上，且$EF\perp CA_1$.

(1)求二面角$C\text{-}A_1F\text{-}E$的大小；

(2)求点E到平面CA_1F的距离.

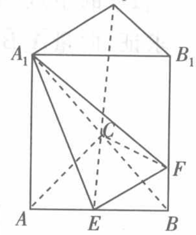

图 1-32

19.（05·山东）如图 1-33，已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=2$，$AA_1=1$，直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 $30°$，AE 垂直 BD 于点 E，F 为 A_1B_1 的中点.

(1)求异面直线 AE 与 BF 所成的角；

(2)求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成二面角（锐角）的大小；

(3)求点 A 到平面 BDF 的距离.

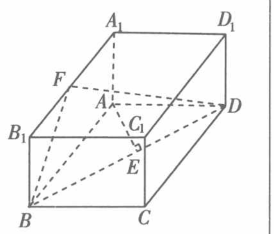

图 1-33

20.（07·烟台模拟）如图 1-34 四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$CD\perp AD$，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AD=CD=2AB=2$，M 为 PC 的中点.

(1)求证：$BM//$平面 PAD；

(2)平面 PAD 内是否存在一点 N，使 $MN\perp$平面 PBD？若存在，确定 N 的位置，若不存在，说明理由；

(3)求直线 PC 与平面 PBD 所成的角的正弦值.

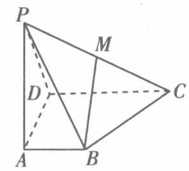

图 1-34

C组 竞赛对接题

1. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 BB_1 和 A_1D_1 的中点（如图 1-35）.

求证：向量 $\overrightarrow{A_1B}$、$\overrightarrow{B_1C}$、$\overrightarrow{EF}$ 是共面向量.

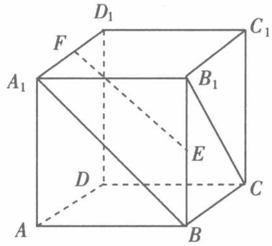

图 1-35

2. 设 A、B、C 及 A_1、B_1、C_1 分别是异面直线 l_1、l_2 上的三点，而 M、N、P、Q 分别是线段 AA_1、BA_1、BB_1、CC_1 的中点.

求证：M、N、P、Q 四点共面.