全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数
学习指导与习题精解

毕守东　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数学习指导与习题精解

毕守东　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导与习题精解 / 毕守东主编．—北京：中国农业出版社，2008.1

全国高等农林院校"十一五"规划教材

ISBN 978-7-109-11985-7

Ⅰ．线…　Ⅱ．毕…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 190382 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

责任编辑　龙永志　刘新团

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　印张：15.25

字数：267 千字

定价：22.00 元

编 写 人 员

主　编　毕守东

副主编　徐　丽　刘爱国

参　编　吴怀孔　陈德玲

前　言

线性代数是高等学校理、工、农及经济管理等各专业大学生的必修课程．由于大学线性代数课程受课内学时的限制，只能讲述这门学科最基本的理论和方法，因此，初学者要想弄懂这些抽象的理论比较困难，更不易掌握这些概念与理论的内在规律性，学生们普遍感到不能灵活地运用基本理论和方法推证与计算变化万千的线性代数问题．

为了帮助初学者理顺思路、抓住重点，系统地掌握线性代数的主要内容，我们编写了这本《线性代数学习指导与习题精解》．全书共五章，包括矩阵，行列式，向量组的线性相关性，线性方程组，相似矩阵及二次型．每章由基本要求、内容提要、例题解析和自测题四部分组成．基本要求部分指出了本章应要理解和重点掌握的知识要点；内容提要部分归纳和简述了本章的基本概念、基本定理和基本方法及其内在的联系和规律性，并指出应注意的问题；例题解析部分精选了一定数量的典型题目，这部分是每章的重点，对于这些重点例题不仅给出了题前的分析，而且给出了题后的注释，以启发和引导读者对问题的深入思考，期望达到举一反三的效果．自测题部分用于读者自我检测，我们列举了300多道习题，并都给出了详细解答，这些习题难度深浅各异，理论计算均有，覆盖内容全面，有很好的参考价值．在本书最后，给出了五套综合测试题，以全面检测读者对本门课程的掌握程度．

本书由毕守东教授任主编，徐丽、刘爱国副教授任副主编，参

加编写的还有吴怀孔副教授和陈德玲老师．

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，其出版得到了安徽农业大学教务处、理学院和中国农业出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢．限于编者水平有限，错漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正．

编　者

2007 年 11 月

目　录

第1章 矩　阵

1.1 基本要求

1. 理解矩阵的概念，掌握几种特殊矩阵——单位矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵与反对称矩阵以及它们的性质.

2. 熟练掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置及其运算规律，了解方阵的方幂.

3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质，会用定义求一些简单矩阵的逆矩阵.

4. 了解分块矩阵的概念，掌握分块矩阵的运算及运算规律.

5. 掌握矩阵的初等变换，理解初等矩阵及矩阵等价的概念，会用初等变换求逆矩阵.

1.2 内容提要

1.2.1 矩阵的概念及其运算规律

1. 矩阵的基本概念

定义 1.1 称 $m\times n$ 个元素 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的矩形元素表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

为 $m\times n$ 型矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. a_{ij} 称为 $\boldsymbol{A}$ 的元素.

零矩阵 $\mathbf{0}$：所有元素 $a_{ij}=0$ 的矩阵；

行矩阵：当 $m=1$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为行矩阵；

列矩阵：当 $n=1$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为列矩阵；

方阵：当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵.

2. 几种常用方阵

对角方阵（当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$）

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

单位矩阵（当 $i=j$ 时，$a_{ij}=1$；当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$）

$$\boldsymbol{I}_n=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

上三角矩阵（当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$）

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

下三角矩阵（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$）

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

上三角矩阵和下三角矩阵统称为三角矩阵．

注　为方便起见，本书中对角阵、三角阵中的零元素均省略不写．

3. 矩阵的基本运算

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，

矩阵相等　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$（对一切 i，j），$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵．

矩阵的和　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵．

数乘矩阵　$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})$，$k$ 为任意常数．

矩阵相乘　$\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$．其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$，$\boldsymbol{A}$ 的列数必须等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数．一般地矩阵乘法不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

方阵的幂　$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}_n$，$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}$，为 k 个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积．

转置矩阵　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的转置矩阵．

对称矩阵　称满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，即对一切 i，j 有

$$a_{ij}=a_{ji}.$$

反对称矩阵 称满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵，即对一切 i，j 有

$$a_{ij}=-a_{ji}.$$

显然，反对称矩阵的主对角线上的元素 $a_{ii}(i=1, 2, \cdots, n)$ 全为 0.

4. 运算律（$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为矩阵，k、l 为任意常数）

加法交换律 $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.$$

加法结合律 $$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}).$$

数乘对矩阵加法的分配律 $$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B},$$
$$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}.$$

结合律 $$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A}).$$

矩阵乘法对加法的分配律 $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C};$$
$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}.$$

乘法结合律 $$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}).$$

指数律 $\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{A}^{s+t}$，$(\boldsymbol{A}^s)^t=\boldsymbol{A}^{st}$，其中 s，t 皆为非负整数.

转置律
$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},$$
$$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},$$
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

注 一般地，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^s\neq\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s$.

1.2.2 逆矩阵

1. 逆矩阵定义

定义 1.2 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，并称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵或非奇异矩阵.

注 (1) 若 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 也为 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵存在，则它必惟一.

2. 逆矩阵性质

若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，则

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A};$$
$$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}(k \text{ 为不等于 } 0 \text{ 的常数});$$
$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1};$$
$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1};$$

$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$ (A_1, A_2, …, A_k 为同阶可逆矩阵).

1.2.3 分块矩阵

1. 对阶数较高的矩阵用水平和垂直直线把它分割成若干小块，每一小块叫做矩阵的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵. 这种分块方法可使运算更为简单.

说明：(1) 作分块矩阵的加法时，应使两同型矩阵有相同的分法，即对应的子块同型.

(2) 作分块矩阵的乘法时，须使前一矩阵列的分法与后一矩阵行的分法相同.

(3) 分块时应尽量分出较多的零子块和单位阵子块.

2. 分块对角矩阵

设 A 为 n 阶方阵，称如下形式的分块矩阵为分块对角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{bmatrix}.$$

其中 A_{ii} ($i=1, 2, \cdots, k$) 皆为方阵，未写出的为零子块.

分块对角矩阵有如下性质：

(1) $$A^m=\begin{bmatrix} A_{11}^m & & & \\ & A_{22}^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk}^m \end{bmatrix}.$$

(2) 在 A 中，如果 A_{ii} ($i=1, 2, \cdots, k$) 都可逆，则 A 也可逆，其逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk}^{-1} \end{bmatrix}.$$

特别地，当 A_{ii} 都是数时，$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}$ 为对角阵，

则 $A^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^m \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^{-1} \end{bmatrix} \quad (\lambda_i \text{ 都不为零}, i=1, 2, \cdots, k).$$

另外：当 $A = \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_k & & & \end{bmatrix}$ 时，有 $A^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & A_{k-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$

(A_i 皆可逆).

1.2.4 矩阵的初等变换与初等方阵

1. 矩阵的3种初等变换

矩阵的3种初等行变换

(1) 交换矩阵的第 i 行和第 j 行，记为 $r_i \leftrightarrow r_j$；

(2) 以数 $k(\neq 0)$ 乘矩阵第 i 行各元素，记为 kr_i；

(3) 以数 k 乘第 i 行加到第 j 行，记为 $r_j + kr_i$.

将上述的“行”换为“列”，则有相应的3种初等列变换，它们分别记为 $c_i \leftrightarrow c_j$，kc_i，$c_j + kc_i$. 矩阵的初等行变换和初等列方阵统称为矩阵的初等变换.

2. 初等方阵

定义 1.3 对单位方阵 $\boldsymbol{I}$ 施行一次初等变换所得到的矩阵称为初等方阵. 初等方阵有三种类型 R_{ij}、$R_i(k)$、$R_{ij}(k)$. 即

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad R_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$
R_{ij}(k)=\begin{bmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 && (k) && \\
&& \vdots & \ddots &&& \\
&& k & \cdots & 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{bmatrix}.
$$

定理 1.1 初等方阵皆可逆，且其逆矩阵是同类型的初等方阵．

定理 1.2 对矩阵 $A_{m\times n}$ 施行一次初等行（列）变换，其结果相当于用相应的 $m(n)$ 阶初等方阵左（右）乘矩阵 A.

定理 1.3 可逆矩阵经过初等变换后仍为可逆矩阵，而不可逆矩阵经过初等变换后仍为不可逆矩阵．

3. 矩阵的行阶梯形及标准形

（1）行阶梯形矩阵　所谓行阶梯形是指满足下列两个条件的形如阶梯的矩阵．

（a）若有零行，则零行全部在矩阵非零行的下方；

（b）从第一行起每行第一个非 0 元素前面的零的个数逐行增加．

（2）标准形　若矩阵 A 经初等变换化为如下形式的矩阵

$$
N=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

称矩阵 N 为 A 的标准形．

定理 1.4 对任一矩阵 A 必可经过有限次初等变换化为行阶梯形，进而化为标准形．

4. 利用初等变换求逆矩阵

定理 1.5 任何可逆方阵 A 都可以表示成有限个初等方阵的积，即

$$
A=P_1P_2\cdots P_k\ （P_i\ 为初等方阵，i=1，2，\cdots，k）
$$

这个条件也是 A 可逆的充要条件．

用初等变换求逆矩阵的具体方法为：

$$
[A,\ I]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[I,\ A^{-1}]
$$

$$
\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix} I \\ A^{-1} \end{bmatrix}
$$

注 一般用行变换就够了．

1.3 例题解析

例 1.1 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

解 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3&3&1\\0&-1&0\\1&2&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&1\\4&1&2\\5&-2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&2&0\\-4&-2&-2\\-4&4&0\end{bmatrix},$$

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}$

$$=\begin{bmatrix}2&2&0\\-4&-2&-2\\-4&4&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&-4&-4\\2&-2&4\\0&-2&0\end{bmatrix}.$$

上例说明，在一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，因此，在矩阵运算中特别应注意乘法的不可交换性.

例 1.2 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}$，求与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有 2 阶方阵.

解 若 2 阶方阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$，则称 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换. 设 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，

$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$，则由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 得

$$\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&-1\end{bmatrix},$$

此即

$$\begin{bmatrix}x_1+2x_3&x_2+2x_4\\-x_1-x_3&-x_2-x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2&2x_1-x_2\\x_3-x_4&2x_3-x_4\end{bmatrix}.$$

因等号两端矩阵的对应元素相等，故得下述齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-2x_2-2x_4=0 \\ x_1+2x_3-x_4=0 \\ x_2+2x_3=0 \end{cases},$$

解之得 $x_1=-2x_3+x_4$，$x_2=-2x_3$.

于是 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} -2x_3+x_4 & -2x_3 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$，其中 x_3，x_4 是任意数.

此类问题的求解通常都是把所求矩阵设为一般形式，代入已知条件后利用方程组来讨论．此外，所求矩阵通常都不是惟一的，所以其元素可能包含任意常数．

例 1.3 已知矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$，使

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}, & (1) \\ 2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=3\boldsymbol{C}. & (2) \end{cases}$$

分析 本题是关于矩阵的方程组，按矩阵运算规律可以像解代数方程组那样求解．

解 式 (1)+式 (2)，得

$$3\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{C},$$

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

由式 (1)，得

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

例 1.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 m 阶对称矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵．

证 因 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 m 阶矩阵，且

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

故 AA^{T} 是 m 阶对称矩阵，类似有 $A^{\mathrm{T}}A$ 是 n 阶对称矩阵．

注 两个对称矩阵的乘积一般不一定还是对称矩阵．例如

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\6 & -2\end{bmatrix}.$$

例 1.5 若 A、B 皆是对称矩阵，则 AB 也为对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

证 必要性 设 AB 对称，即 $(AB)^{\mathrm{T}}=AB$，而

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=BA,$$

所以 $AB=BA$.

充分性 设 $AB=BA$，则

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=BA=AB,$$

所以 AB 为对称矩阵．

例 1.6 设 A 为实对称矩阵，且 $A^2=0$，证明 $A=0$.

证 设 $A=(a_{ij})$，已知 $A^{\mathrm{T}}=A$，于是 $AA^{\mathrm{T}}=A^2$，

由 $A^2=0$ 得 $AA^{\mathrm{T}}=0$，则 AA^{T} 主对角线元素 $c_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$，而

$$c_{ii}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{bmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

因为 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为实数，由 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=0\Rightarrow a_{ik}=0(i,k=1,2,\cdots,n)$. 所以 $A=0$.

注 若 A 不是对称矩阵，尽管 $A^2=0$，却未必有 $A=0$. 如 $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\neq 0$，

但 $A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$.

例 1.7 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}$，验证 $A^2-4A+3I=0$，并求 A^3，A^4，A^5.

解 直接代入计算得 $A^2-4A+3I=0$，

由 $A^2-4A+3I=0$ 得 $A^2=4A-3I$，于是

$$\begin{aligned}A^3&=A(4A-3I)=4A^2-3A\\&=4(4A-3I)-3A=13A-12I\\&=13\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}-12\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$