

新世紀叢書

爲了歡樂而學

趣味數學入門

譯者：林苑明 審定者：周東川



銀禾文化事業有限公司



097
新世紀叢書

趣味數學入門

銀禾文化事業公司 印行



097
新世紀叢書

趣味數學入門

主 編：新世紀編輯小組

審定者：周東川

譯 者：林苑明

出版者：銀禾文化事業有限公司

發行人：陳俊安

地 址：台北市光復南路415巷252號 1 樓

電 話：7542968・7542969

郵 撥：0736622-3

定 價：新台幣110元

印製者：大原彩色印製企業有限公司

新聞局登記證局版台業字第3292號

1988年 5月初版

■版權所有・不准翻印■

序

在科學進步，知識爆發的現代世界中，一個國家民族的興衰取決於全體國民是否擁有現代化的知識。一個國家即使擁有很多進步的科學機器，但是人民的思想、觀念仍停留在幾十年前的舊巢中，那將是滿清時代所追求的「船堅礮利」翻版而已，完全無補於事，因此普及全民知識是一件刻不容緩之事。

本公司有鑑於此，特成立新世紀編輯小組，無論就自然科學或社會科學，選定重要題目編輯成一系列叢書，逐冊推出，並且以普及版方式印製，希望這一系列的叢書能提供給國人一連串新的知識與觀念。

一件事情的成功，固然是要在事前有妥善規劃與謹慎的執行，而一套叢書發行的成功除了要有上述的要件外，更需要有廣大讀者的支持和批評。希望讀者們能在閱讀本書後給我們寶貴的意見，做為我們編列這套書的參考，謝謝！

陳俊宏

於一九八五年十一月

序

把由東京至京都一直突飛猛進的新幹線，來比喻在教室學習的數學的話，數學難題是，好像把現在的東海道五十三次歡樂而慢步旅遊的樣子。

數學是整然的成為理論體系的學問。把它依照體系的順序一心一意的一步一步地走的話，在教授的方面來說，確實符合目的可以將最短距離用最少時間進行，而且很方便。相反的，在學習的方面來說，只是毫無目的的填鴨式的死用功，不但得不到任何感動，好像嚼砂那樣無味乾燥，總而言之，變成一種苦差事是當然不過的事情。

數學的理論體系，並不是一開始就整然而造成的。爲了造成這個體系，很多先哲反覆試行錯誤，真是苦心慘澹的結果，才造成的。不過，在這過程當中，找出很多說不出的發現與發明的快樂。因此，要學習數學，就要將這同一過程再一次追蹤，才會體會出數學是很有興趣的學問。可是，很遺憾的在現在的教育制度之下，好像沒有餘暇做這樣從容不迫的事情。

在這本書所處理的數學難題，正是爲了補償這個缺

失，確實是很有效而適切的題材。也有知識份子把難題解釋只是一種消遣，可是，由於上述的理由，我認為應該是把數學真正的想法做成能夠理解以及把握的手段。總而言之，由於反覆試行錯誤，而自得及自習，這是不是實際上最重要的事情？

引用常被引用的例子而感覺不安，據說或然率論的起源是，由賭博而開始的。賭博當然不是難題，可是，它的技巧好像難題那樣刺激好奇心。數學家受了委託，把它拿出來研究的結果，拓展了數學上很重要的一個領域。

最近的好例子，一直到現在是難題範圍的問題，由於電腦的開發而展開到情報理論的研究。將來會有什麼樣的東西，向那一方面發展？它的進步很難預料，而無論如何，總會感觸到人類容易被未見的東西吸引。

藤村幸三郎

目 錄

序	I
第 1 章 基本的難題	1
第 2 章 算術的難題	45
第 3 章 代數的難題	69
第 4 章 整數的難題	95
第 5 章 圖形的難題	121
第 6 章 組合的難題	145

第 7 章	或然率的難題	171
第 8 章	論理的難題	197
第 9 章	諸種難題	221
第 10 章	難題的難題	249
第 11 章	未解決的難題	275

第 1 章 基本的難題

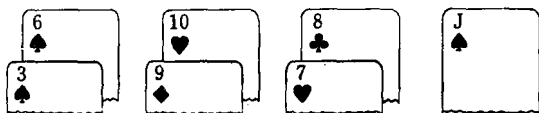
本章所提的難題都是容易的，我想不看後面的解答也馬上會知道的問題。可是，該解答的想法很重要，以後的問題也反覆要用這樣的想法，所以，是基本的難題。

娛樂場所(1)

〈紙牌算命〉 一個人玩的紙牌遊戲。將除掉丑角牌的 52 張紙牌好好洗牌拿在手裡，首先將 4 張排做橫的 1 列。



如果其中有同樣花色的話，就把下位的（點數在下面的，但是，A 是最高）取掉。在上面的圖，與 ♥ 10 比較把 ♥ 3 取掉。其次再把 4 張稍微錯開放置 1 列。（只右端是 1 張）



右端與左端比較，取掉 ♠ 3。再右端與左端比較，取掉 ♠ 6。左端的空處可以把 ♦ 9 或 ♥ 7 的任何 1 個移過去。在這場合如果移 ♦ 9 的話，可以比較 ♥ 10 與 ♥ 7 而取掉 ♥ 7 較有利。（如果移 ♥ 7 的話，就不能這樣做而較不利。可以比較的是只是重疊的紙牌相互間。）上面的紙牌都變成不一樣的花色，所以，再將 4 張排列在

上面比較。

如此，按順序將應取掉的取掉，最後只剩下只A 4張排成1列就很好。剩下的紙牌越多，就可以說運氣不好。

用難題的想法

難題是很有趣的。探討其有趣的原因，可以想到的是問題很有趣，解答很有趣、解法很漂亮以及結果很意外等。

一般來說，大多數的難題的書是，把重點放在問題有趣及結果意外等。可是，以「難題」為材料，「數學入門」為目的的本書，就想把重點放在「解答有趣」及「解法漂亮」上。

所以，想把難題或數學當中常用的獨特的想法的幾個舉例來說明。

(A) 1對1的對應

要比較放在某一房間的椅子數與在該房間的人數的多少，並不需要將椅子數及人數個別算。請1個椅子坐1個人，全員都坐而椅子還有剩餘的話，就是椅子多，沒有空的椅子而還有站着的話，就可以知道人較多。還有，沒有過與不足全員坐在椅子上且沒有空椅子的話，

椅子與人相互 1 個對 1 個的對應（1 對 1 的對應），就知道椅子數與人數是相等。

不會算大的數的未開發的人，也可以約束經過兩手指頭數的日子之後 10 日後）會面。這是將手指數與日數 1 對 1 的對應所致。

這樣看起來，可以知道要算（數的概念），不如 1 對 1 的對應想法較為基本。對任何大的數都能夠自由算的我們，也許認為這樣幼稚的 1 對 1 的對應的想法是不必要的也說不定。可是，要解答難題或考慮數學的問題上是非常有用的。現在舉一舉這樣的例子。

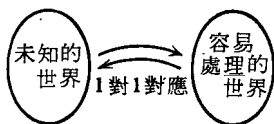
例題 1 織田信長向部下發佈命令說，「這杉林裡面有幾株杉木？希望查一查」。部下們就 1 株、2 株的算，馬上就算錯而無法算出來。可是，聽說木下藤吉郎想出了很好的方法，而得到織田信長的讚賞。藤吉郎是用什麼方法算出來呢？

也許你馬上感覺到。準備了 1000 條的繩子，分給手下，每 1 株杉木綁 1 條繩子。然後算一算剩下來的繩子，由最初的 1000 條減一減就知道杉木的株數。

由於杉木與繩子的 1 對 1 的對應，將很難算的杉木，轉換為容易算的繩子來算。是不是很巧妙的方法？

像這樣某一種東西的個數難以直接算出來的時候，

查一下與它 1 對 1 的對應的東西的個數，就可以知道難求的東西的個數。



例題 2 1976 年夏天的甲子園，有 41 校出場，櫻美林高校優勝，全部有幾場比賽？

但是，沒有打和的比賽。而且，我想各位都知道這個棒球大會是採用淘汰式的。

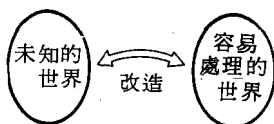
也許有人認為不看比賽的組合的方法就沒有辦法談，可是，與組合方法無關而比賽數就決定。由於沒有打和，所以，有比賽就一定有打敗的 1 隊。比賽與打敗隊是 1 對 1 的對應。而且，打敗的隊數是出場學校當中除了優勝隊以外的剩下的 40 隊，所以，所求的比賽數是 40 次。

這個問題，自從吉田洋一先生在「白林帖」刊載以來，常被引用。

1 對 1 的對應的想法，不只是利用於解答難題，要考慮數學的問題也常被利用。況且，不只是使用於算有限個的東西，反而要算無數的東西時有效的被使用。

(B)簡單化、圖式化

解答難題或數學的問題時，有時候想把它的内容改變爲數式，或用圖表來表現。這是，相當於把内容改變



爲容易處理的形式。在「1對1的對應」已經申述過，改造至容易處理的世界，在那裡查一下各種關係，才回

到未知的世界看一看的話，未知的世界就會被闡明。

能夠把内容單純化、抽象化的話，就很容易處理。能夠抽象化到數式的形式的話，以後就只使用數式變形術——代數——。能夠以圖形表現的話，直觀的能夠洞察，所以，很容易想。有時候，只整理成爲表的形式，就能解決的也很多。

例題 3 下了陣雨。沒有帶雨傘，這時你怎麼辦？

這個問題是，成爲數學的問題以前是活生生的日常問題。普通，教科書裡面的或入學考試出來的數學的問題是，出題者本身已抽象化，成爲能解答的問題的形式，所謂「數學的問題」。由於各位只看到這樣調理過的問題，所以，好像不大會由現象中取出數學的内容，自己親自做數學的問題。

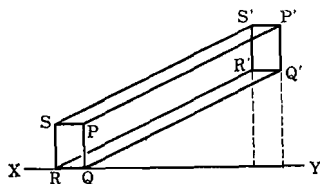
在實際上的問題，有打吃老虎等待雨停，或者與人家共1把傘，甚至於打電話讓家人拿傘來等等的解決方法。可是，在這裡像這樣的狀況全部丟掉，請想像在郊野只有1個人的場合，這樣架空的場合是一種抽象化。

還有，假定暫時，雨是下得同樣的大小又不帶風。況且，跑步心神更加清爽，或者衣服濕了就慘，像這樣的感情的要素要丟開。跑步會疲倦、跳跑衣服會髒，也不要這樣想。像這樣，難處理的都丟掉的話，最後就只剩下，跑步是不是濕得較少的這一點？

人的身體是複雜的形態，很難處理，所以，爲了容易想，就當做直方體。還有，把身體弄斜的話濕的情況也會變，所以，就這麼試做，人體——直方體——弄垂直，水平的移動。

這樣問題的意義就明顯了。那麼問題就變成下面那樣。「雖然沒有風，在雨繼續地以同樣大小下着的郊野由甲地點至乙地點把直方體水平的移動。這個時候，移動的速度越快，是不是直方體濕得較少？」

想直方體也在動，雨也不斷的由上向下繼續的下，是很難，所以，可以想像將出發時的空中的雨停止在那樣的狀態。要把下到直方體的雨用靜止的雨滴來表示的話，就在靜止於空中的雨滴中，這直方體好像向天空斜的跑上去，這樣想就可以。



這個圖是，直方體沿着平行移動時的進行方向的斷面圖。直方體是，長方形 $PQRS$ 加深度，由於深度是一定，所以，把它當做 1 而無視深度。就是說，相當於把人體當做長方形 $PQRS$ 。

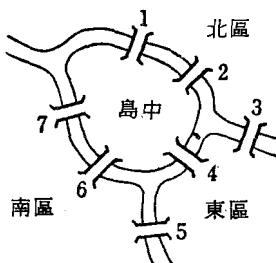
那麼，到了目的地時滴下來的雨一定是，最初空中 $P'Q'R'S'$ 的雨滴。所以，由出發點至目的地移動之間滴下來的雨是，可以認為長方形移動的面積—— $\square P'Q'QP$ 與 $\square P'PSS'$ 的面積的和。

可是， $\square P'Q'QP$ 的面積是，與速度的快慢無關而一定的。（因為 $\square P'Q'QP$ 的面積是， PQ 乘甲與乙的距離）。另一方面， $\square P'PSS'$ 的面積是，速度越快高度越低，面積就減少。

其結果，下到身體前面的雨是，速度變了也是一定，可是，下到頭上的雨是，速度越快就越少，所以，總合起來速度越快就濕得較少。

例題 4 環繞烏有市的烏有河，河上架有 7 座橋。

同一個橋不要過 2 次，請將這些 7 座橋依次全部通過看看。



將這過橋的問題的 4 個地區用點表示，橋用線表示的話，就變成很單純的圖形。（將這個圖形稱為線系），這樣的話，任何 1 座橋都只通過 1 次就是，線系的任何 1 條線都只通過 1 次。所以，過橋的問題變成將線系一筆畫成的「一筆畫成」的問題。

