偏微分方程基本理论

王明新 编著

科学出版社
www.sciencep.com

偏微分方程基本理论

王明新　编著

科学出版社
北京

内容简介

本书系统介绍了二阶线性椭圆型方程、抛物型方程和双曲型方程以及一阶偏微分方程的基本理论．第 1～4 章介绍古典解，第 5～7 章介绍弱解．本书的特点是循序渐进，强调基础理论的同时，注重具体应用．书中内容深入浅出，文字通俗易懂，并配有适量难易兼顾的习题．

本书可作为偏微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学、控制论及相关理工科方向研究生的教材和教学参考书，亦可作为数学、工程等领域的青年教师和科研人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

偏微分方程基本理论/王明新编著．—北京：科学出版社，2009
ISBN 978-7-03-022806-2

Ⅰ．偏…　Ⅱ．王…　Ⅲ．偏微分方程-高等学校-教材　Ⅳ．O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 124263 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2009 年 1 月第　一　版　开本：B5(720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷　印张：13
印数：1—3 000　字数：248 000

定价：38.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉）

序　　言

本书主要介绍二阶线性椭圆型方程、抛物型方程、双曲型方程和一阶偏微分方程的基本理论.

随着研究生的扩招, 教材建设已成为各高校研究生培养工作中亟待解决的头等大事. 作为偏微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学等相关方向研究生的基础课程, 编写一本合适的偏微分方程基本理论的教材是有意义的. 近年来, 作者每年都为研究生讲授"偏微分方程理论"课程. 本书就是在该课程讲义的基础上, 经多年逐步补充、修改完善而成.

本书的定位是为研究生和青年学者提供一本偏微分方程的入门书. 力求用较短的篇幅, 尽可能系统地介绍偏微分方程的基本理论和方法. 为了便于教师讲授和学生学习, 本书采用循序渐进的方式, 第 1~4 章介绍古典解的基本理论, 第 5~7 章介绍弱解.

第 1 章介绍二阶线性椭圆型方程的古典解. 内容包括基本解、调和函数的基本性质、Green 函数、极值原理、最大模估计、能量方法和变分原理. 第 2 章介绍二阶线性抛物型方程的古典解. 主要介绍 Fourier 变换、几种特殊的求解方法、基本解、方程式和方程组的最大值原理以及最大模估计、带有非经典边界条件和非局部项的方程式的最大值原理及能量方法. 第 3 章介绍二阶线性双曲型方程的古典解. 重点是初值问题的求解方法、初值问题的能量不等式与解的适定性, 以及混合问题的能量模估计与解的适定性. 第 4 章介绍一阶偏微分方程的基本理论. 第 5 章重点介绍二阶线性椭圆型方程的 L^2 理论、De Giorgi 迭代和 Moser 迭代方法. 对于 Schauder 理论和 L^p 理论, 只给出主要结果而不证明. 第 6 章重点介绍二阶线性抛物型方程的 L^2 理论, 并给出 Schauder 理论和 L^p 理论的主要结果 (不证明), 同时给出一个非线性方程解的存在性的例子. 第 7 章介绍二阶线性双曲型方程的 L^2 理论.

本书的部分内容参考了国内外出版的一些教材, 请参阅所附的参考文献. 本书的讲义, 作者在东南大学和徐州师范大学为研究生讲授过多次, 并得到东南大学优秀研究生教学用书建设立项的资助. 同时, 该课程还被评选为东南大学优秀研究生课程. 本书的出版得到了东南大学科技出版基金和国家自然科学基金 (No.10471022, 10771032) 的资助. 王元明教授为本书的结构安排提出了建设性的建议. 北京工业大学王术教授、扬州大学林支桂教授、东南大学陈文彦博士和李慧玲博士、南通大学陈玉娟博士、南京信息工程大学许志奋博士曾使用本书的讲义, 并提出了许多宝

贵的修改建议. 在编写讲义和成书的过程中, 东南大学的师生, 特别是历届偏微分方程专业的研究生, 都提出了许多宝贵的意见, 在此一并致谢.

由于作者学识所限, 错误和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作 者

2009 年 1 月

目　　录

第 1 章　二阶线性椭圆型方程的古典解

在本书中, 除非特别声明, 总假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是区域 (连通开集), $\boldsymbol{n}$ 是所讨论区域边界上的单位外法向量.

本章介绍二阶椭圆型方程的古典解. 有关该类方程弱解的讨论, 将放在第 5 章. 首先介绍全空间上的 Laplace 方程, 通过寻求径向对称的特殊解来引入基本解, 而后给出 Poisson 方程以及一般形式的常系数二阶线性椭圆型方程古典解的求解公式. 其次, 讨论一般开集上的调和函数的基本性质、两种特殊区域上的 Green 函数和 Dirichlet 边值问题的可解性. 最后讨论一般形式的二阶线性椭圆型方程的极值原理、最大模估计、能量方法和变分原理, 并给出两个非线性方程的例子.

1.1　全空间上的 Laplace 方程

Laplace 方程

$$\Delta u = 0$$

和 Poisson 方程

$$-\Delta u = f$$

是偏微分方程中的一类非常重要的方程.

1.1.1　基本解

如果 u 是径向对称函数, 可令 $v(r) = u(\boldsymbol{x})$, 其中 $r = |\boldsymbol{x}|$. 利用 $r_{x_i} = \dfrac{x_i}{r}$ 得

$$u_{x_i} = v' \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v'' \frac{x_i^2}{r^2} + v' \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), \quad i = 1, \cdots, n.$$

从而

$$\Delta u = v'' + \frac{n-1}{r} v'.$$

故 $\Delta u = 0$ 当且仅当

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0. \tag{1.1.1}$$

如果 $v' \neq 0$, 则有

$$(\ln |v'|)' = \frac{v''}{v'} = -\frac{n-1}{r},$$

从而 $v' = \dfrac{a}{r^{n-1}}$, 其中 a 是任意常数. 因此, 当 $r > 0$ 时, 有

$$v(r) = \begin{cases} B\ln r + C, & n = 2, \\ \dfrac{B}{r^{n-2}} + C, & n \geqslant 3, \end{cases}$$

其中 B 和 C 是任意常数.

定义 1.1.1　称函数

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|, & n = 1, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{x}|, & n = 2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}, & n \geqslant 3 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

*为以 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为奇点的 Laplace 方程的基本解. 对于 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 函数 $\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ 称为以 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 为奇点的 Laplace 方程的基本解. 这里, ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面的表面积. 满足 $\Delta u = 0$ 的 C^2 函数称为***调和函数**.

容易验证, 存在常数 C, 使得

$$|D\Gamma(\boldsymbol{x})| \leqslant \frac{C}{|\boldsymbol{x}|^{n-1}}, \quad |D^2\Gamma(\boldsymbol{x})| \leqslant \frac{C}{|\boldsymbol{x}|^n}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \tag{1.1.3}$$

这里的 D 是一阶导算子, 即 $D\Gamma(\boldsymbol{x}) = \{D_1\Gamma(\boldsymbol{x}), \cdots, D_n\Gamma(\boldsymbol{x})\}$, 有时也写成

$$D\Gamma(\boldsymbol{x}) = (D_1\Gamma(\boldsymbol{x}), \cdots, D_n\Gamma(\boldsymbol{x})),$$

而

$$D^2\Gamma(\boldsymbol{x}) = \{D_{ij}\Gamma(\boldsymbol{x}), i, j = 1, \cdots, n\},$$

其中 $D_i = \partial_{x_i}, D_{ij} = \partial^2_{x_i x_j}$.

1.1.2　Poisson 方程

我们研究 $\mathbb{R}^n$ 上的 Poisson 方程. 假设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 对任意的 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, 只要 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, 函数 $\Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})$ 仍然是 $\boldsymbol{x}$ 的调和函数. 当然, 对于任意 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m \in \mathbb{R}^n$, 只要 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$, 则由有穷和 $\sum\limits_{i=1}^m \Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_i)f(\boldsymbol{y}_i)$ 所确定的函数还是调和函数. 一个自然的问题就是, 由下面的积分 (无穷和)

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \ln|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}, & n = 2, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{f(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n-2}}\mathrm{d}\boldsymbol{y}, & n \geqslant 3 \end{cases} \tag{1.1.4}$$

所确定的函数是否还是一个调和函数呢? 表面上看起来答案是肯定的, 其实不然. 因为 $\Delta_{\boldsymbol{x}}\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ 处不可积, 我们不能直接计算而得到

$$\Delta u(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_{\boldsymbol{x}}\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}=0. \tag{1.1.5}$$

如果 $f\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, 则有下面的定理.

定理 1.1.1 假设 $f\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, 那么由式 (1.1.4) 所确定的函数 u 满足

(1) $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$;

(2) $-\Delta u=f,\ \forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

证明 因为

$$u(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

所以

$$\frac{u(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i)-u(\boldsymbol{x})}{h}=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\boldsymbol{y})\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{h}\mathrm{d}\boldsymbol{y},$$

其中 $h\neq 0$, $\boldsymbol{e}_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$. 因为当 $h\to 0$ 时,

$$\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{h}\longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上一致成立, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\boldsymbol{y})\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

类似地有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\boldsymbol{y})\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y},\quad i,j=1,\cdots,n. \tag{1.1.6}$$

因为上式右端关于 $\boldsymbol{x}$ 连续, 所以 $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$.

由于 Γ 在点 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 处的值是无穷大, 在计算中必须把奇点 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 去掉. 挖去一个以 $\boldsymbol{0}$ 为心、以 ε 为半径 (ε 很小) 的球 $B_\varepsilon(\boldsymbol{0})$, 该球的球面记为 $\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{0})$. 这样, 在 $\Omega_\varepsilon:=\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(\boldsymbol{0})$ 内函数 $\Gamma(\boldsymbol{y})$ 满足 $\Delta\Gamma=0$. 利用式 (1.1.6) 知

$$\begin{aligned}\Delta u(\boldsymbol{x})&=\int_{B_\varepsilon(\boldsymbol{0})}\Gamma(\boldsymbol{y})\Delta_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\int_{\Omega_\varepsilon}\Gamma(\boldsymbol{y})\Delta_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\&:=I_\varepsilon+J_\varepsilon.\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

显然

$$|I_\varepsilon|\leqslant C\|D^2f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{B_\varepsilon(\boldsymbol{0})}|\Gamma(\boldsymbol{y})|\mathrm{d}\boldsymbol{y}\leqslant\begin{cases}C\varepsilon^2|\ln\varepsilon|, & n=2,\\ C\varepsilon^2, & n\geqslant 3.\end{cases} \tag{1.1.8}$$

利用分部积分得

$$
\begin{aligned}
J_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(\boldsymbol{y})\Delta_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&= \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \Gamma(\boldsymbol{y})\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}} - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\Gamma(\boldsymbol{y})\cdot\nabla_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&:= K_\varepsilon + L_\varepsilon,
\end{aligned}
\tag{1.1.9}
$$

这里, $\boldsymbol{n}$ 是指向 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 的内部的 $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 上的单位法向量. 易验证

$$
|K_\varepsilon| \leqslant C\|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} |\Gamma(\boldsymbol{y})|\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}} \leqslant \begin{cases} C\varepsilon|\ln\varepsilon|, & n=2, \\ C\varepsilon, & n\geqslant 3. \end{cases} \tag{1.1.10}
$$

利用分部积分推出

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon &= -\int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}} + \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta\Gamma(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&= -\int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}.
\end{aligned}
$$

直接计算知 $\nabla\Gamma(\boldsymbol{y}) = \dfrac{-\boldsymbol{y}}{\omega_n|\boldsymbol{y}|^n}$, $\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}$, 在 $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 上, 指向 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 内部的单位法向量 $\boldsymbol{n} = \dfrac{-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|} = -\dfrac{\boldsymbol{y}}{\varepsilon}$. 于是, 在 $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 上成立

$$
\frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{n}\cdot\nabla\Gamma(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}.
$$

因为 $\omega_n\varepsilon^{n-1}$ 是球面 $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 的表面积, 所以当 $\varepsilon\to 0^+$ 时,

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon &= -\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}} \\
&= -\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}} \longrightarrow -f(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
\tag{1.1.11}
$$

结合式 (1.1.7)~ 式 (1.1.11), 并令 $\varepsilon\to 0^+$, 得 $-\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$. 证毕.

注　(1) 由定理 1.1.1 知, 函数 Γ 满足

(i) Γ 在点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 处有奇性;

(ii) 在 $\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上 $\Delta\Gamma=0$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{\boldsymbol{x}}\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = -f(\boldsymbol{x})$, $\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $f\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

具有这种性质的函数也称为 Laplace 方程的基本解.

(2) 通常写成

$$
-\Delta_{\boldsymbol{x}}\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n,
$$

其中 $\delta(\boldsymbol{x})$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中质量集中在 $\boldsymbol{x}$ 点的 Dirac 测度.

(3) 定理 1.1.1 中关于 f 的条件可以减弱, 有兴趣的读者可以参看文献[10].

1.2 全空间上常系数二阶线性椭圆型方程的求解公式

现在考虑一般形式的常系数二阶线性椭圆型方程

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_iD_iu + cu, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

这里 D_{ij} 和 D_i 的定义见 1.1 节. 习惯上, 简记 $\sum a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$, $\sum b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$. 有时候, 为方便书写, 直接简记为 $a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$, $b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

假设 $a_{ij} = a_{ji}$, 且存在常数 $\lambda > 0$, 使得

$$\sum a_{ij}y_iy_j \geqslant \lambda|\boldsymbol{y}|^2, \quad \forall\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

于是存在正交矩阵 $\sigma = (\sigma_{ij})_{n\times n}$, 使得 $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{jk}$. 定义函数

$$G(\boldsymbol{x}, s) = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4s}\Big), \quad s > 0.$$

容易验证, 函数 G 满足

$$G_s - \Delta G = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} G(\boldsymbol{x}, s)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1. \tag{1.2.1}$$

假设 $c > 0$, 定义变换

$$\mathcal{R}[f](\boldsymbol{x}) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x} + \sigma\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}s)G(\boldsymbol{y}, s)\mathrm{e}^{-cs}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)$. 利用 $c > 0$ 和式 (1.2.1) 知, 上面的积分收敛.

定理 1.2.1 假设算子 L 的系数 $c > 0$, 则以下结论成立:

(1) 如果 $u \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$, 那么 $u = \mathcal{R}[Lu]$;

(2) 如果 $f \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$, 记 $u = \mathcal{R}[f]$, 那么 $u \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$, 并且当 $m \geqslant 2$ 时, u 满足 $Lu = f$, 这里的 $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ 表示所有在 $\mathbb{R}^n$ 内直到 m 阶微商都连续并且有界的函数所组成的空间.

证明 (1) 对于 $\varepsilon > 0$, 定义

$$\mathcal{R}_\varepsilon[f](\boldsymbol{x}) = \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x} + \sigma\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}s)G(\boldsymbol{y}, s)\mathrm{e}^{-cs}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}s.$$

显然, 当 $\varepsilon\to 0^+$ 时, $\mathcal{R}_\varepsilon[f]\to\mathcal{R}[f]$. 对于固定的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 定义 $v(\boldsymbol{y},s)=u(\boldsymbol{x}+\sigma\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}s)$. 直接计算知

$$Lu(\boldsymbol{x}+\sigma\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}s)=-\Delta_y v(\boldsymbol{y},s)-v_s(\boldsymbol{y},s)+cv(\boldsymbol{y},s).$$

利用式 (1.2.1) 以及分部积分得

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\varepsilon[Lu](\boldsymbol{x})=&-\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n}G(\boldsymbol{y},s)\mathrm{e}^{-cs}\Delta_y v(\boldsymbol{y},s)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}s\\&-\int_{\mathbb{R}^n}\int_\varepsilon^\infty G(\boldsymbol{y},s)(\mathrm{e}^{-cs}v(\boldsymbol{y},s))_s\mathrm{d}s\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\=&\,\mathrm{e}^{-c\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}G(\boldsymbol{y},\varepsilon)v(\boldsymbol{y},\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\=&\,\mathrm{e}^{-c\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}G(\boldsymbol{y},\varepsilon)u(\boldsymbol{x}+\sigma\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{y}\\=&\,\mathrm{e}^{-c\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}G(\boldsymbol{y},1)u(\boldsymbol{x}+\sigma\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\varepsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

再利用控制收敛定理和式 (1.2.1) 得

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathcal{R}_\varepsilon[Lu](\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x}).$$

(2) 由定义容易看出 $u:=\mathcal{R}[f]\in C_b^m(\mathbb{R}^n)$. 直接验算知, 当 $m\geqslant 2$ 时, $Lu=\mathcal{R}[Lf]$. 再利用结论 (1) 知 $Lu=f$. 证毕.

对于抛物型方程

$$\begin{cases}L_t u:=u_t+Lu=f(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(\boldsymbol{x},0)=0, & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{1.2.2}$$

同上, 定义变换

$$\mathcal{R}[f](\boldsymbol{x},t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{n+1}}f(\boldsymbol{x}+\sigma\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}s,t-s)\frac{1}{(4\pi s)^{(n+1)/2}}\exp\left(-cs-\frac{r^2+|\boldsymbol{y}|^2}{4s}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}s.$$

则由式 (1.2.1) 得

$$\mathcal{R}[f](\boldsymbol{x},t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}f(\boldsymbol{x}+\sigma\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}s,t-s)G(\boldsymbol{y},s)\mathrm{e}^{-cs}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}s.$$

定理得证.

利用定理 1.2.1 可得

定理 1.2.2　假设算子 L 的系数 $c>0$, 那么以下结论成立:

(1) 如果 $u\in C_b^2(\mathbb{R}^{n+1})$, 则 $u=\mathcal{R}[L_t u]$;

(2) 如果 $f\in C_b^m(\mathbb{R}^{n+1})$, 记 $u=\mathcal{R}[f]$, 则 $u\in C_b^m(\mathbb{R}^{n+1})$, 并且当 $m\geqslant 2$ 时 u 满足问题 (1.2.2).

1.3 Green 公式与位势

第一 Green 公式(散度定理, 分部积分公式):

$$\int_\Omega v\Delta u \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{1.3.1}$$

第二 Green 公式:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\mathrm{d}S. \tag{1.3.2}$$

定理 1.3.1 如果 $u\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{y}) =& -\int_\Omega \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\\ &-\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}},\quad \boldsymbol{y}\in\Omega.\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

上式右端的第一项称为体位势, 第二项称为单层位势, 第三项称为双层位势.

证明 只证 $n\geqslant 3$ 的情况. 前面已经知道, 当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时, 函数 $\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 满足 Laplace 方程, 即

$$-\Delta_{\boldsymbol{x}}\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = 0,\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}.$$

由于函数 $\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 点有奇性, 因此需要在 Ω 中挖去一个以 $\boldsymbol{y}$ 为球心、以 ε 为半径 (ε 很小) 的球 $B_\varepsilon(\boldsymbol{y})$, 该球的球面记为 $\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})$. 这样, 在 $\Omega_\varepsilon := \Omega\setminus B_\varepsilon(\boldsymbol{y})$ 内函数 $\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 满足 $\Delta_{\boldsymbol{x}}\Gamma = 0$. 在第二 Green 公式 (1.3.2) 中, 取 $v=\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 得

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega_\varepsilon}\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta u\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\Omega_\varepsilon}[u\Delta\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta u]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\Big(u\frac{\partial\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}} - \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}.\end{aligned}$$

因为 $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega\cup\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})$, 在 $\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})$ 上 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} = -\dfrac{\partial}{\partial r}$, 于是

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega_\varepsilon}\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta u\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}\Big(\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\\ =& \int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})}\Big(\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial r}\Big)\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}.\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

先计算式 (1.3.4) 右端的第二项. 因为在 $\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})$ 上,

$$\frac{\partial\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial r} = -\frac{1}{\omega_n}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{1-n} = -\frac{1}{\omega_n}\varepsilon^{1-n},$$

所以

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})} u\frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial r}\mathrm{d}S = \frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})} u\mathrm{d}S = M_{\boldsymbol{y}}^{\varepsilon}[u], \tag{1.3.5}$$

这里 $M_{\boldsymbol{y}}^{\varepsilon}[u] = \frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})} u\mathrm{d}S$ 是 u 在球面 $\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})$ 上的平均. 再计算式 (1.3.4) 右端的第一项:

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})} \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}S &= \frac{1}{(n-2)\omega_n\varepsilon^{n-2}}\int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{y})} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\\ &= \frac{\varepsilon}{n-2}M_{\boldsymbol{y}}^{\varepsilon}\Big[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big].\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

把式 (1.3.5) 和式 (1.3.6) 代入式 (1.3.4) 就得到

$$\begin{aligned}&-\int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta u\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega}\Big(\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}}\Big)\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\\ =&M_{\boldsymbol{y}}^{\varepsilon}[u] + \frac{\varepsilon}{n-2}M_{\boldsymbol{y}}^{\varepsilon}\Big[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big].\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

因为 $u, \nabla u$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} M_{\boldsymbol{y}}^{\varepsilon}[u] = u(\boldsymbol{y})$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon M_{\boldsymbol{y}}^{\varepsilon}\Big[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big] = 0$. 在式 (1.3.7) 中令 $\varepsilon\to 0^+$, 即得式 (1.3.3). 证毕.

对调 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的位置, 式 (1.3.3) 即为

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{x}) =& -\int_{\Omega} \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\Delta u(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega} \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}\\ &-\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega.\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

定理 1.3.2 如果 $u\in C^1(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 则对任意的 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 和 $\rho>0$, 只要球 $B_\rho(\boldsymbol{y})$ 属于 Ω, 就有

$$u(\boldsymbol{y}) = \int_{B_\rho(\boldsymbol{y})} [\Gamma(\rho) - \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})]\Delta u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho(\boldsymbol{y})} u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}. \tag{1.3.9}$$

证明 同于定理 1.3.1 的证明, 在第二 Green 公式 (1.3.2) 中取 $v = G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \Gamma(\rho)$, 得

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{y}) =& -\int_{\Omega} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Delta u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}\\ &-\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{y}\in\Omega.\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

特别地, 取 $\Omega = B_\rho(\boldsymbol{y})$, 由于

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{\omega_n}\rho^{1-n},$$

因此利用式 (1.3.10) 就得到式 (1.3.9). 证毕.