

偏微分方程基本理论

王明新 编著

偏微分方程基本理论

王明新 编著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统介绍了二阶线性椭圆型方程、抛物型方程和双曲型方程以及一阶偏微分方程的基本理论. 第1~4章介绍古典解, 第5~7章介绍弱解. 本书的特点是循序渐进, 强调基础理论的同时, 注重具体应用. 书中内容深入浅出, 文字通俗易懂, 并配有适量难易兼顾的习题.

本书可作为偏微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学、控制论及相关理工科方向研究生的教材和教学参考书, 亦可作为数学、工程等领域的青年教师和科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程基本理论/王明新编著. —北京: 科学出版社, 2009
ISBN 978-7-03-022806-2

I. 偏… II. 王… III. 偏微分方程-高等学校-教材 IV. O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 124263 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年1月第一版 开本: B5(720×1000)

2009年1月第一次印刷 印张: 13

印数: 1—3 000 字数: 248 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈明辉〉)

序 言

本书主要介绍二阶线性椭圆型方程、抛物型方程、双曲型方程和一阶偏微分方程的基本理论。

随着研究生的扩招,教材建设已成为各高校研究生培养工作中亟待解决的头等大事.作为偏微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学等相关方向研究生的基础课程,编写一本合适的偏微分方程基本理论的教材是有意义的.近年来,作者每年都为研究生讲授“偏微分方程理论”课程.本书就是在该课程讲义的基础上,经多年逐步补充、修改完善而成.

本书的定位是为研究生和青年学者提供一本偏微分方程的入门书.力求用较短的篇幅,尽可能系统地介绍偏微分方程的基本理论和方法.为了便于教师讲授和学生学习,本书采用循序渐进的方式,第1~4章介绍古典解的基本理论,第5~7章介绍弱解.

第1章介绍二阶线性椭圆型方程的古典解.内容包括基本解、调和函数的基本性质、Green 函数、极值原理、最大模估计、能量方法和变分原理.第2章介绍二阶线性抛物型方程的古典解.主要介绍 Fourier 变换、几种特殊的求解方法、基本解、方程式和方程组的最大值原理以及最大模估计、带有非经典边界条件和非局部项的方程式的最大值原理及能量方法.第3章介绍二阶线性双曲型方程的古典解.重点是初值问题的求解方法、初值问题的能量不等式与解的适定性,以及混合问题的能量模估计与解的适定性.第4章介绍一阶偏微分方程的基本理论.第5章重点介绍二阶线性椭圆型方程的 L^2 理论、De Giorgi 迭代和 Moser 迭代方法.对于 Schauder 理论和 L^p 理论,只给出主要结果而不证明.第6章重点介绍二阶线性抛物型方程的 L^2 理论,并给出 Schauder 理论和 L^p 理论的主要结果(不证明),同时给出一个非线性方程解的存在性的例子.第7章介绍二阶线性双曲型方程的 L^2 理论.

本书的部分内容参考了国内外出版的一些教材,请参阅所附的参考文献.本书的讲义,作者在东南大学和徐州师范大学为研究生讲授过多次,并得到东南大学优秀研究生教学用书建设立项的资助.同时,该课程还被评选为东南大学优秀研究生课程.本书的出版得到了东南大学科技出版基金和国家自然科学基金(No.10471022, 10771032)的资助.王元明教授为本书的结构安排提出了建设性的建议.北京工业大学王术教授、扬州大学林支桂教授、东南大学陈文彦博士和李慧玲博士、南通大学陈玉娟博士、南京信息工程大学许志奋博士曾使用本书的讲义,并提出了许多宝

贵的修改建议. 在编写讲义和成书的过程中, 东南大学的师生, 特别是历届偏微分方程专业的研究生, 都提出了许多宝贵的意见, 在此一并致谢.

由于作者学识所限, 错误和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作 者

2009 年 1 月

目 录

序言

第 1 章 二阶线性椭圆型方程的古典解	1
1.1 全空间上的 Laplace 方程	1
1.1.1 基本解	1
1.1.2 Poisson 方程	2
1.2 全空间上常系数二阶线性椭圆型方程的求解公式	5
1.3 Green 公式与位势	7
1.4 调和函数的基本积分公式及一些基本性质	9
1.4.1 Neumann 边值问题有解的必要条件	9
1.4.2 调和函数的平均值公式	10
1.4.3 调和函数的极值原理及位势方程的 Dirichlet 边值问题解的唯一性	10
1.4.4 位势方程的 Neumann 边值问题解的“唯一性”	11
1.5 Green 函数	12
1.5.1 Green 函数的概念	12
1.5.2 Green 函数的性质	13
1.6 两种特殊区域上的 Green 函数及 Dirichlet 边值问题的可解性	16
1.6.1 球上的 Green 函数, Poisson 公式	16
1.6.2 上半空间的 Green 函数, Poisson 公式	18
1.7 调和函数的进一步性质 —— Poisson 公式的应用	19
1.8 一般形式的二阶线性椭圆型方程	26
1.8.1 古典解的极值原理	27
1.8.2 古典解的最大模估计和解的唯一性	31
1.8.3 弱解的极值原理	36
1.9 能量方法	37
1.9.1 能量估计与解的唯一性	37
1.9.2 Dirichlet 原理	38
习题一	40
第 2 章 二阶线性抛物型方程的古典解	43
2.1 Fourier 变换及其应用	43
2.2 基本解方法与初值问题	47

2.2.1 基本解	47
2.2.2 初值问题	48
2.2.3 Cole-Hopf 变换	52
2.3 热方程的平均值公式	53
2.4 初边值问题的极值原理	54
2.4.1 方程式的经典结论	55
2.4.2 抛物型方程组的极值原理	63
2.4.3 非经典边界条件的情形	67
2.4.4 带有非局部项的情形	68
2.5 初边值问题解的最大模估计与解的唯一性	73
2.6 初值问题的极值原理与解的唯一性	76
2.7 初边值问题的能量模估计与解的唯一性	78
2.8 初边值问题的基本解, 热位势与 Green 函数	80
2.8.1 基本解与热位势	80
2.8.2 Green 函数	84
习题二	85
第 3 章 二阶线性双曲型方程的古典解	89
3.1 初值问题的求解	89
3.1.1 一维齐次方程的初值问题, D'Alembert 公式	89
3.1.2 球面平均法	90
3.1.3 非齐次方程, 推迟势	96
3.1.4 Radon 变换方法	98
3.2 初值问题的能量不等式, 解的适定性	100
3.3 混合问题的能量模估计与解的适定性	104
3.3.1 能量守恒与解的唯一性	104
3.3.2 能量模估计与解的稳定性	106
习题三	108
第 4 章 一阶偏微分方程	111
4.1 一阶线性偏微分方程	111
4.2 输运方程	113
4.2.1 齐次方程的初值问题	113
4.2.2 非齐次方程的初值问题	113
4.3 一阶线性双曲型方程组	114
4.4 一阶拟线性偏微分方程	116
4.4.1 特征曲线与积分曲面	116

4.4.2 初值问题	118
习题四	119
第 5 章 二阶线性椭圆型方程的弱解	120
5.1 弱解的存在性	120
5.1.1 弱解的定义	120
5.1.2 变分方法	121
5.1.3 Lax-Milgram 定理和弱解的第一存在定理	123
5.1.4 Fredholm 二择一定理和弱解的第二、第三存在定理	125
5.2 解的正则性	130
5.2.1 差商和 $W_p^1(\Omega)$ 空间	130
5.2.2 内部正则性	132
5.2.3 整体正则性	135
5.3 De Giorgi 迭代和 Moser 迭代	139
5.3.1 弱解的极值原理	139
5.3.2 弱解的局部性质	142
5.3.3 Harnack 不等式	147
5.3.4 内部 Hölder 连续性	152
5.4 Schauder 理论和 L^p 理论的主要结果	155
5.4.1 Schauder 估计	155
5.4.2 L^p 估计	156
5.4.3 解的存在性和估计	157
5.5 一个应用	158
习题五	159
第 6 章 二阶线性抛物型方程的弱解	162
6.1 引言	162
6.2 能量不等式与弱解的唯一性	164
6.3 弱解的存在性	167
6.4 常系数方程弱解的 $W_2^{2,1}(Q_T)$ 正则性	173
6.5 Schauder 理论和 L^p 理论的主要结果	177
6.5.1 Schauder 估计和 L^p 估计	177
6.5.2 解的存在性	178
6.5.3 应用 —— 非线性方程解的存在性	180
6.6 二阶线性抛物型方程的初值问题	182
习题六	183

第 7 章 二阶线性双曲型方程的弱解	185
7.1 弱解的定义	185
7.2 弱解的存在性和唯一性	186
7.2.1 Galerkin 逼近	186
7.2.2 能量估计	187
7.2.3 弱解的存在性和唯一性	189
7.3 弱解的正则性	192
习题七	196
参考文献	197

第 1 章 二阶线性椭圆型方程的古典解

在本书中, 除非特别声明, 总假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是区域 (连通开集), n 是所讨论区域边界上的单位外法向量.

本章介绍二阶椭圆型方程的古典解. 有关该类方程弱解的讨论, 将放在第 5 章. 首先介绍全空间上的 Laplace 方程, 通过寻求径向对称的特殊解来引入基本解, 而后给出 Poisson 方程以及一般形式的常系数二阶线性椭圆型方程古典解的求解公式. 其次, 讨论一般开集上的调和函数的基本性质、两种特殊区域上的 Green 函数和 Dirichlet 边值问题的可解性. 最后讨论一般形式的二阶线性椭圆型方程的极值原理、最大模估计、能量方法和变分原理, 并给出两个非线性方程的例子.

1.1 全空间上的 Laplace 方程

Laplace 方程

$$\Delta u = 0$$

和 Poisson 方程

$$-\Delta u = f$$

是偏微分方程中的一类非常重要的方程.

1.1.1 基本解

如果 u 是径向对称函数, 可令 $v(r) = u(x)$, 其中 $r = |x|$. 利用 $r_{x_i} = \frac{x_i}{r}$ 得

$$u_{x_i} = v' \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v'' \frac{x_i^2}{r^2} + v' \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

从而

$$\Delta u = v'' + \frac{n-1}{r} v'.$$

故 $\Delta u = 0$ 当且仅当

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0. \quad (1.1.1)$$

如果 $v' \neq 0$, 则有

$$(\ln |v'|)' = \frac{v''}{v'} = -\frac{n-1}{r},$$

从而 $v' = \frac{a}{r^{n-1}}$, 其中 a 是任意常数. 因此, 当 $r > 0$ 时, 有

$$v(r) = \begin{cases} B \ln r + C, & n = 2, \\ \frac{B}{r^{n-2}} + C, & n \geq 3, \end{cases}$$

其中 B 和 C 是任意常数.

定义 1.1.1 称函数

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|, & n = 1, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

为以 $x = 0$ 为奇点的 Laplace 方程的基本解. 对于 $y \in \mathbb{R}^n$, 函数 $\Gamma(x, y) = \Gamma(x - y)$ 称为以 $x = y$ 为奇点的 Laplace 方程的基本解. 这里, ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面的表面积. 满足 $\Delta u = 0$ 的 C^2 函数称为调和函数.

容易验证, 存在常数 C , 使得

$$|D\Gamma(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Gamma(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad x \neq 0, \quad (1.1.3)$$

这里的 D 是一阶导算子, 即 $D\Gamma(x) = \{D_1\Gamma(x), \dots, D_n\Gamma(x)\}$, 有时也写成

$$D\Gamma(x) = (D_1\Gamma(x), \dots, D_n\Gamma(x)),$$

而

$$D^2\Gamma(x) = \{D_{ij}\Gamma(x), i, j = 1, \dots, n\},$$

其中 $D_i = \partial_{x_i}$, $D_{ij} = \partial_{x_i x_j}^2$.

1.1.2 Poisson 方程

我们研究 $\mathbb{R}^n$ 上的 Poisson 方程. 假设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. 对任意的 $y \in \mathbb{R}^n$, 只要 $x \neq y$, 函数 $\Gamma(x - y)f(y)$ 仍然是 x 的调和函数. 当然, 对于任意 $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n$, 只要 $x \neq y_1, \dots, y_m$, 则由无穷和 $\sum_{i=1}^m \Gamma(x - y_i)f(y_i)$ 所确定的函数还是调和函数. 一个自然的问题就是, 由下面的积分 (无穷和)

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y)f(y)dy = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln |x - y|f(y)dy, & n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}}dy, & n \geq 3 \end{cases} \quad (1.1.4)$$

所确定的函数是否还是一个调和函数呢? 表面上看起来答案是肯定的, 其实不然. 因为 $\Delta_x \Gamma(x-y)$ 在 $y=x$ 处不可积, 我们不能直接计算而得到

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Gamma(x-y) f(y) dy = 0. \quad (1.1.5)$$

如果 $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, 则有下列的定理.

定理 1.1.1 假设 $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, 那么由式 (1.1.4) 所确定的函数 u 满足

(1) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$;

(2) $-\Delta u = f, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

证明 因为

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) f(x-y) dy,$$

所以

$$\frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} dy,$$

其中 $h \neq 0, e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. 因为当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y)$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上一致成立, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) dy.$$

类似地有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y) dy, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1.1.6)$$

因为上式右端关于 x 连续, 所以 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

由于 Γ 在点 $y=0$ 处的值是无穷大, 在计算中必须把奇点 $y=0$ 去掉. 挖去一个以 0 为心、以 ε 为半径 (ε 很小) 的球 $B_\varepsilon(0)$, 该球的球面记为 $\partial B_\varepsilon(0)$. 这样, 在 $\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$ 内函数 $\Gamma(y)$ 满足 $\Delta \Gamma = 0$. 利用式 (1.1.6) 知

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(y) \Delta_x f(x-y) dy + \int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &:= I_\varepsilon + J_\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

显然

$$|I_\varepsilon| \leq C \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma(y)| dy \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|, & n=2, \\ C\varepsilon^2, & n \geq 3. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

利用分部积分得

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \Gamma(\mathbf{y}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \Gamma(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &:= K_\varepsilon + L_\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

这里, $\mathbf{n}$ 是指向 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 的内部的 $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 上的单位法向量. 易验证

$$|K_\varepsilon| \leq C \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} |\Gamma(\mathbf{y})| dS_{\mathbf{y}} \leq \begin{cases} C\varepsilon |\ln \varepsilon|, & n=2, \\ C\varepsilon, & n \geq 3. \end{cases} \quad (1.1.10)$$

利用分部积分推出

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= - \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \Gamma(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= - \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

直接计算知 $\nabla \Gamma(\mathbf{y}) = \frac{-\mathbf{y}}{\omega_n |\mathbf{y}|^n}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, 在 $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 上, 指向 $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 内部的单位法向量 $\mathbf{n} = \frac{-\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} = -\frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}$. 于是, 在 $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 上成立

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) = \mathbf{n} \cdot \nabla \Gamma(\mathbf{y}) = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}.$$

因为 $\omega_n \varepsilon^{n-1}$ 是球面 $\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})$ 的表面积, 所以当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时,

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= - \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{0})} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &= - \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \rightarrow -f(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

结合式 (1.1.7)~式 (1.1.11), 并令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 得 $-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. 证毕.

注 (1) 由定理 1.1.1 知, 函数 Γ 满足

- (i) Γ 在点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处有奇性;
- (ii) 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上 $\Delta \Gamma = 0$;
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_{\mathbf{x}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = -f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

具有这种性质的函数也称为 Laplace 方程的基本解.

(2) 通常写成

$$-\Delta_{\mathbf{x}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $\delta(\mathbf{x})$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中质量集中在 $\mathbf{x}$ 点的 Dirac 测度.

(3) 定理 1.1.1 中关于 f 的条件可以减弱, 有兴趣的读者可以参看文献[10].

1.2 全空间上常系数二阶线性椭圆型方程的求解公式

现在考虑一般形式的常系数二阶线性椭圆型方程

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i D_i u + cu, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

这里 D_{ij} 和 D_i 的定义见 1.1 节. 习惯上, 简记 $\sum a_{ij} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$, $\sum b_i = \sum_{i=1}^n b_i$. 有

时候, 为方便书写, 直接简记为 $a_{ij} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$, $b_i = \sum_{i=1}^n b_i$.

假设 $a_{ij} = a_{ji}$, 且存在常数 $\lambda > 0$, 使得

$$\sum a_{ij} y_i y_j \geq \lambda |\mathbf{y}|^2, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

于是存在正交矩阵 $\sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$, 使得 $a_{ij} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk}$. 定义函数

$$G(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4s}\right), \quad s > 0.$$

容易验证, 函数 G 满足

$$G_s - \Delta G = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathbf{x}, s) d\mathbf{x} = 1. \quad (1.2.1)$$

假设 $c > 0$, 定义变换

$$\mathcal{R}[f](\mathbf{x}) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} + \sigma \mathbf{y} - \mathbf{b}s) G(\mathbf{y}, s) e^{-cs} d\mathbf{y} ds,$$

其中 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. 利用 $c > 0$ 和式 (1.2.1) 知, 上面的积分收敛.

定理 1.2.1 假设算子 L 的系数 $c > 0$, 则以下结论成立:

(1) 如果 $u \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$, 那么 $u = \mathcal{R}[Lu]$;

(2) 如果 $f \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$, 记 $u = \mathcal{R}[f]$, 那么 $u \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$, 并且当 $m \geq 2$ 时, u 满足 $Lu = f$, 这里的 $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ 表示所有在 $\mathbb{R}^n$ 内直到 m 阶微商都连续并且有界的函数所组成的空间.

证明 (1) 对于 $\varepsilon > 0$, 定义

$$\mathcal{R}_\varepsilon[f](\mathbf{x}) = \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} + \sigma \mathbf{y} - \mathbf{b}s) G(\mathbf{y}, s) e^{-cs} d\mathbf{y} ds.$$

显然, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, $\mathcal{R}_\varepsilon[f] \rightarrow \mathcal{R}[f]$. 对于固定的 $x \in \mathbb{R}^n$, 定义 $v(y, s) = u(x + \sigma y - bs)$. 直接计算知

$$Lu(x + \sigma y - bs) = -\Delta_y v(y, s) - v_s(y, s) + cv(y, s).$$

利用式 (1.2.1) 以及分部积分得

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\varepsilon[Lu](x) &= - \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} G(y, s) e^{-cs} \Delta_y v(y, s) dy ds \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^\infty G(y, s) (e^{-cs} v(y, s))_s ds dy \\ &= e^{-c\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} G(y, \varepsilon) v(y, \varepsilon) dy \\ &= e^{-c\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} G(y, \varepsilon) u(x + \sigma y - b\varepsilon) dy \\ &= e^{-c\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} G(y, 1) u(x + \sigma \sqrt{\varepsilon} y - b\varepsilon) dy. \end{aligned}$$

再利用控制收敛定理和式 (1.2.1) 得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{R}_\varepsilon[Lu](x) = u(x).$$

(2) 由定义容易看出 $u := \mathcal{R}[f] \in C_b^m(\mathbb{R}^n)$. 直接验算知, 当 $m \geq 2$ 时, $Lu = \mathcal{R}[Lf]$. 再利用结论 (1) 知 $Lu = f$. 证毕.

对于抛物型方程

$$\begin{cases} L_t u := u_t + Lu = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

同上, 定义变换

$$\mathcal{R}[f](x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x + \sigma y - bs, t-s) \frac{1}{(4\pi s)^{(n+1)/2}} \exp\left(-cs - \frac{r^2 + |y|^2}{4s}\right) dr dy ds.$$

则由式 (1.2.1) 得

$$\mathcal{R}[f](x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \sigma y - bs, t-s) G(y, s) e^{-cs} dy ds.$$

定理得证.

利用定理 1.2.1 可得

定理 1.2.2 假设算子 L 的系数 $c > 0$, 那么以下结论成立:

(1) 如果 $u \in C_b^2(\mathbb{R}^{n+1})$, 则 $u = \mathcal{R}[L_t u]$;

(2) 如果 $f \in C_b^m(\mathbb{R}^{n+1})$, 记 $u = \mathcal{R}[f]$, 则 $u \in C_b^m(\mathbb{R}^{n+1})$, 并且当 $m \geq 2$ 时 u 满足问题 (1.2.2).

1.3 Green 公式与位势

第一 Green 公式(散度定理, 分部积分公式):

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx. \quad (1.3.1)$$

第二 Green 公式:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (1.3.2)$$

定理 1.3.1 如果 $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) = & - \int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n} dS_{\mathbf{x}} \\ & - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n} dS_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{y} \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

上式右端的第一项称为体位势, 第二项称为单层位势, 第三项称为双层位势.

证明 只证 $n \geq 3$ 的情况. 前面已经知道, 当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ 时, 函数 $\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 满足 Laplace 方程, 即

$$-\Delta_{\mathbf{x}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

由于函数 $\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 在 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 点有奇性, 因此需要在 Ω 中挖去一个以 $\mathbf{y}$ 为球心、以 ε 为半径 (ε 很小) 的球 $B_{\varepsilon}(\mathbf{y})$, 该球的球面记为 $\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{y})$. 这样, 在 $\Omega_{\varepsilon} := \Omega \setminus B_{\varepsilon}(\mathbf{y})$ 内函数 $\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 满足 $\Delta_{\mathbf{x}} \Gamma = 0$. 在第二 Green 公式 (1.3.2) 中, 取 $v = \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 得

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_{\varepsilon}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u d\mathbf{x} &= \int_{\Omega_{\varepsilon}} [u \Delta \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \left(u \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n} - \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

因为 $\partial\Omega_{\varepsilon} = \partial\Omega \cup \partial B_{\varepsilon}(\mathbf{y})$, 在 $\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{y})$ 上 $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$, 于是

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{\varepsilon}} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n} \right) dS_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{y})} \left(\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial r} \right) dS_{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

先计算式 (1.3.4) 右端的第二项. 因为在 $\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{y})$ 上,

$$\frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial r} = -\frac{1}{\omega_n} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-n} = -\frac{1}{\omega_n} \varepsilon^{1-n},$$

所以

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{y})} u \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial r} dS = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{y})} u dS = M_\mathbf{y}^\varepsilon[u], \quad (1.3.5)$$

这里 $M_\mathbf{y}^\varepsilon[u] = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{y})} u dS$ 是 u 在球面 $\partial B_\varepsilon(\mathbf{y})$ 上的平均. 再计算式 (1.3.4) 右端的第一项:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{y})} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial r} dS &= \frac{1}{(n-2)\omega_n \varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{y})} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \\ &= \frac{\varepsilon}{n-2} M_\mathbf{y}^\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

把式 (1.3.5) 和式 (1.3.6) 代入式 (1.3.4) 就得到

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_\varepsilon} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega} \left(\Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_\mathbf{x} \\ &= M_\mathbf{y}^\varepsilon[u] + \frac{\varepsilon}{n-2} M_\mathbf{y}^\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

因为 $u, \nabla u$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 所以 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\mathbf{y}^\varepsilon[u] = u(\mathbf{y})$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon M_\mathbf{y}^\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] = 0$. 在式 (1.3.7) 中令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 即得式 (1.3.3). 证毕.

对调 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的位置, 式 (1.3.3) 即为

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= - \int_{\Omega} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial \Omega} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS_\mathbf{y} \\ &\quad - \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} dS_\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

定理 1.3.2 如果 $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 则对任意的 $\mathbf{y} \in \Omega$ 和 $\rho > 0$, 只要球 $B_\rho(\mathbf{y})$ 属于 Ω , 就有

$$u(\mathbf{y}) = \int_{B_\rho(\mathbf{y})} [\Gamma(\rho) - \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(\mathbf{y})} u(\mathbf{x}) dS_\mathbf{x}. \quad (1.3.9)$$

证明 同于定理 1.3.1 的证明, 在第二 Green 公式 (1.3.2) 中取 $v = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \Gamma(\rho)$, 得

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) &= - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS_\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} dS_\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

特别地, 取 $\Omega = B_\rho(\mathbf{y})$, 由于

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial \Omega} = -\frac{1}{\omega_n} \rho^{1-n},$$

因此利用式 (1.3.10) 就得到式 (1.3.9). 证毕.