西安交通大學

专业学位研究生教育系列教材

高等工程流体力学练习题解

Solutions Manual to Advanced Engineering Fluid Mechanics

张鸣远 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大學

专业学位研究生教育系列教材

高等工程流体力学练习题解

Solutions Manual to Advanced Engineering Fluid Mechanics

张鸣远 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书分为12章，选录了215道练习题，内容基本涵盖了工科研究生高等流体力学课程的各个方面。在各章开头先概括性介绍相关内容及列出常用公式。练习题包括理论推导题、证明题和工程应用计算题等，作者对每一道题都作了详细解答，部分习题作了多种解答，必要时对解题方法和技巧作出提示，并对结果作出解释和讨论。

本书可供能源动力、机械、化工、环境工程、水利和力学等专业的研究生和教师使用，也可供相关专业的大学生及工程技术人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等工程流体力学练习题解/张鸣远编著. —西安：西安交通大学出版社，2008.1
ISBN 978-7-5605-2573-0

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 工程力学：流体力学-研究生-解题　Ⅳ. TH126-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第151020号

书　　名：高等工程流体力学练习题解
编　　著：张鸣远
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路10号(邮编：710049)
电　　话：(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷：陕西江源印刷科技有限公司
字　　数：281千字
开　　本：727 mm×960 mm　1/16
印　　张：15.25
版　　次：2008年1月第1版　2008年1月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5605-2573-0/TH·77
定　　价：25.00元

序

为适应专业学位研究生教育发展需求，改革教学内容和教学方法，促进专业学位研究生教育整体水平的进一步提高，西安交通大学研究生院决定加强专业学位研究生教育核心教材建设，编辑出版工商管理（MBA）、公共管理（MPA）、工程硕士等专业学位系列教材，这是专业学位建设中一件非常有意义的事情。

专业学位的设立丰富了我国学位类型，主动地适应了我国经济建设，社会进步和国家安全的需要，保证了研究生教育与社会人才市场需求协调发展，在构造学习型社会，实现我国“小康”的伟大目标中发挥了重要作用。

专业学位是与各行业任职资格相联系的学位规格，主要是为国民经济建设部门培养高层次实用型人才。它与学术型人才不同，重在实际应用。因此，对于专业学位必须从应用型人才的能力要求来设置学位课程，更新教学内容，改革教学方法，使专业学位的学生具有获取知识的能力，实践应用的能力，研究创新的能力和沟通组织的能力。既要重视专业知识培养，又要加强人文素质培养，真正地使专业学位研究生教育服务于我国创新型国家建设的战略目标。

不同的专业学位有着不同的人才规格要求，但是同一个专业学位有着相对统一的要求，因此每个专业学位应当有相对稳定的核心课程，对于这些核心课程要有明确的教学大纲，并由具有丰富专业学位研究生教学经验且学术造诣较高的老师编写的教材。教材要符合专业学位研究生的要求，体现专业学位研究生的特色，有利于教师实施探索型的教学方法，倡

导师生互动的教学形式。同时也要重视挖掘学生中实践经验并提升到基本原理，不断地丰富与完善专业学位教材。因此编写专业学位研究生教材不是简单重复的劳动，是一项需要创新的研究工作，也是一项教学改革的重要实践。

西安交通大学研究生院曾经于20世纪80年代在全国率先出版研究生系列教材，取得了好的效果，其中有不少教材评为全国优秀教材或推荐为研究生教学用书，至今仍一版再版。有些教材不断修正和完善，成为精品教材。我相信，这次推出的专业学位系列教材特色将更加鲜明，质量将更加优秀，将受到社会的更加关注，在应用型高层次人才培养中将发挥更重要的作用。

全国工程硕士教育指导委员会副主任委员

張文修

2007年10月15日

前　言

独立地完成一定量的课后练习题，是流体力学学习过程的一部分。如果只是听课或阅读教材，而不自己动脑动手解题，就会如同雾中看花，始终无法掌握课程的要领和精髓。解题过程本质上就是利用流体力学的基本原理和基本方程分析和解决实际问题的一个训练过程。

研究生流体力学的一些课后练习题具有难度，需要运用不同的数学工具求解，同学之间、师生之间的讨论和相互启发是必要的和有益的。如果有一本练习题解在手，就如同有一位良师益友在身旁，对学习一定有所裨益。

本书共选录了215道练习题，主要来自《高等工程流体力学》（张鸣远，景思睿，李国君编著，西安交通大学出版社，2006年7月）和《高等工程流体力学（少学时）》（张鸣远编著，西安交通大学出版社，2007年年底出版）两书的课后练习题，内容涵盖了工科研究生高等流体力学课程的各个方面，对每一道题都作了详细解答。全书分为12章：第1和第2章为流体力学的基本概念和基本方程；第3章至第6章为理想不可压缩流体流动，包括平面势流，轴对称势流和旋涡运动；第7章至第10章为粘性不可压缩流体流动，包括N－S方程的精确解，小雷诺数流动，层流边界层流动和紊流；第11和第12章为理想可压缩流体流动，包括一维流动和平面势流。各章都包含两部分，一是“内容提要”，对该章涉及的内容及公式作概括性介绍，然后是“练习题解”，包括理论推导、证明和工程应用计算等，有些题目一题多解，必要时对解题方法和技巧作出提示，并对结果作出相应解释和讨论。

本书可供能源、动力、机械、化工、环境工程、水利和力学等专业的研究生和教师使用，也可供相关专业的大学生及工程技术人员阅读和参考。

受限于作者学识，书中一定会有疏漏和错误之处，请读者不吝赐教。若选用拙作《高等工程流体力学》为贵校流体力学课程教材，并希望获得该书课堂教学电子课件，也请与作者联系，课件免费提供。作者电话：029－82669704；电子信箱：myzhang@mail. xjtu. edu. cn。

张鸣远

2007 年 11 月于西安交通大学

目　录

第 1 章

流体力学的基本概念

内容提要

1. 拉格朗日参考系与欧拉参考系

(1) 在拉格朗日参考系中给出各别流体质点的空间位置随时间的变化

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x_0,y_0,z_0,t)$$

而把相关的物理量表示为流体质点和时间的函数

$$p=p(x_0,y_0,z_0,t),\quad \rho=\rho(x_0,y_0,z_0,t),\quad T=T(x_0,y_0,z_0,t)$$

式中 p、ρ 和 T 分别是压强、密度和温度，(x_0,y_0,z_0)是初始时刻流体质点的空间位置坐标，这里看作是流体质点的标号，称之为拉格朗日坐标。

(2) 在欧拉参考系中把流体质点的运动速度表示为空间点和时间的函数

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x,y,z,t)$$

相关的物理量则表示为

$$p=p(x,y,z,t),\quad \rho=\rho(x,y,z,t),\quad T=T(x,y,z,t)$$

式中(x,y,z)是空间点坐标，称欧拉坐标。在欧拉参考系中 x,y,z 与时间 t 是相互独立的变量，而在拉格朗日参考系中 x,y,z 是 t 的函数。

2. 迹线、流线和脉线

(1) 迹线　流体质点在运动过程中描绘出来的一条曲线，即轨迹，迹线方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t)}=\mathrm{d}t$$

(2) 流线　某时刻流场中的一条曲线，曲线上每一点的速度矢量都与该曲线相切，流线方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t)}$$

上式积分过程中 t 当作常数看待。

(3) 脉线　相继经过流场同一点的流体质点在某瞬时顺序连接起来得到的一条曲线。积分迹线方程，利用初始条件 $t=\tau,x=x_*,y=y_*,z=z_*$ 确定积分常数

((x_*, y_*, z_*)即流体质点相继经过的点),得

$$r = r(x_*, y_*, z_*, t, \tau)$$

上式即表示 t 时刻的脉线,τ 的取值范围为$-\infty \leqslant \tau \leqslant t$。

3. 随体导数

(1) 流体质点的某一物理量 η 随时间的变化率为

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} + u_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$$

式中$\frac{\partial \eta}{\partial t}$为当地导数或局部导数,$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\eta$为对流导数或位变导数。$\eta$可以是标量,也可以是矢量。

(2) 设单位体积流体的物理量分布函数是$\phi(\boldsymbol{r}, t)$,则体积为τ的流体系统中总物理量随时间的变化率为

$$\frac{D}{Dt}\int_\tau \phi d\tau = \frac{d}{dt}\int_\tau \phi d\tau + \int_A \phi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dA$$

式中 $\frac{d}{dt}\int_\tau \phi d\tau$ 表示初始时刻与系统重合的静止控制体内物理量的变化率,$\int_A \phi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dA$ 表示通过控制体表面 A 净流出控制体的物理量流率,$\boldsymbol{u}$ 是 A 上的流体速度,$\boldsymbol{n}$ 是 A 的外法线单位矢量。上式称之为雷诺输运定理。如 $\phi = \rho\psi$,则雷诺输运定理可写为

$$\frac{D}{Dt}\int_\tau \rho\psi d\tau = \int_\tau \rho \frac{D\psi}{Dt} d\tau$$

4. 速度分解定理

速度梯度张量$\partial u_i/\partial x_j$ 可分解为一个对称张量与一个反对称张量之和,式如

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = s_{ij} + a_{ij} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A}$$

把旋转率张量 a_{ij} 的 3 个非零分量作为矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的 3 个分量,$a_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$,则有

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \boldsymbol{u})$$

$\boldsymbol{\omega}$ 是流体微团旋转的角速度。应变率张量 s_{ij} 的对角线分量表示沿坐标轴方向的物质线元的相对伸长率,非对角线分量表示分别与两条相互垂直的坐标轴平行的物质线元之间夹角变形率一半的负值,即剪切变形率。s_{ij} 对角线分量之和

$$s_{ii} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$$

表示流体微团的相对体积膨胀率。

流场中一邻域内两点的相对速度 $\delta \boldsymbol{u}$ 可分解为由于流体微团变形引起的速度

$\boldsymbol{S}\cdot\delta\boldsymbol{r}$ 和由于流体微团旋转引起的速度 $\boldsymbol{A}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{u})\cdot\delta\boldsymbol{r}$，即

$$\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{S}\cdot\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{A}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{S}\cdot\delta\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{u})\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

5. 有旋运动的基本概念

(1) 涡量　涡量定义为

$$\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}\quad 或\quad \Omega_i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

某点处的涡量大小是该点流体微团旋转角速度的 2 倍，方向与流体微团瞬时旋转轴重合。涡量场是无源场，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega}=0$$

(2) 无旋流动与速度势函数　如整个流场中涡量处处为零，称流动无旋，无旋流动也称势流。势流速度可表示为某标量函数 ϕ 的梯度，即

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi$$

ϕ 称速度势函数。

(3) 斯托克斯定理　速度矢量沿一封闭曲线 l 的速度环量 $\Gamma=\int_l\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与通过张在 l 上的曲面 A 的涡通量 $\int_A\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$ 之间满足斯托克斯定理，即

$$\Gamma=\int_A\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$$

(4) 涡线和涡管

涡线　某时刻涡量场中的一条曲线，曲线上每一点的涡量矢量都与此曲线相切。

涡管　取不自相交的非涡线的封闭曲线，过该曲线每一点的涡线组成一管状曲面，称涡管。

涡管强度　涡管截面上的涡通量称为涡管强度，涡管任一横截面上的涡通量均相等，即

$$\int_{A_1}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=\int_{A_2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$$

6. 本构方程

应力张量 σ_{ij} 与应变率张量 s_{ij} 之间的函数关系称本构方程，可写为

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}-\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}s_{kk}+2\mu s_{ij}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=-p\boldsymbol{I}-\frac{2}{3}\mu\boldsymbol{I}\nabla\cdot\boldsymbol{u}+2\mu\boldsymbol{S}$$

式中 μ 是流体的动力粘性系数。对于不可压缩流体,上式简化为

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu s_{ij}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = -p\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{S}$$

对于理想流体或静止流体,则

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = -p\boldsymbol{I}$$

应力张量是对称张量,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

空间某点法线方向为 $\boldsymbol{n}$ 的面元上的应力矢量可计算为

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}$$

练习题解

1.1 流体质点的空间位置为

$$x = x_0, \quad y = \mathrm{e}^t \frac{y_0 + z_0}{2} + \mathrm{e}^{-t} \frac{y_0 - z_0}{2}, \quad z = \mathrm{e}^t \frac{y_0 + z_0}{2} - \mathrm{e}^{-t} \frac{y_0 - z_0}{2}$$

求速度的拉格朗日描述和欧拉描述。

解: (1) 速度的拉格朗日描述为

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \mathrm{e}^t \frac{y_0 + z_0}{2} - \mathrm{e}^{-t} \frac{y_0 - z_0}{2}$$

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} = \mathrm{e}^t \frac{y_0 + z_0}{2} + \mathrm{e}^{-t} \frac{y_0 - z_0}{2}$$

(2) 将题目所给关系式代入(1)结果即得速度的欧拉描述为

$$u = 0, \quad v = z, \quad w = y$$

□

1.2 已知速度场 $u=\dfrac{x}{1+t}, v=\dfrac{2y}{1+t}, w=\dfrac{3z}{1+t}$,(1)求加速度的欧拉描述;(2)先求矢径表示式 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x_0, y_0, z_0, t)$,再求加速度的拉格朗日描述;(3)求流线。

解: (1)加速度的欧拉描述为

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(1+t)^2} + \frac{x}{1+t}\frac{1}{1+t} = 0$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2y}{(1+t)^2} + \frac{2y}{1+t}\frac{2}{1+t} = \frac{2y}{(1+t)^2}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{3z}{(1+t)^2} + \frac{3z}{1+t}\frac{3}{1+t} = \frac{6z}{(1+t)^2}$$

(2) 先求迹线

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{1+t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}t}{1+t}\Rightarrow\ln x=\ln(1+t)+c\Rightarrow$$

$$x=c_1(1+t)$$

同样可求得

$$y=c_2(1+t)^2,\quad z=c_3(1+t)^3$$

由 $t=0$ 时，$x=x_0,y=y_0,z=z_0$，得

$$c_1=x_0,\quad c_2=y_0,\quad c_3=z_0$$

于是位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r}=x_0(1+t)\boldsymbol{i}+y_0(1+t)^2\boldsymbol{j}+z_0(1+t)^3\boldsymbol{k}$$

加速度的拉格朗日描述为

$$a_x=\frac{\partial^2}{\partial t^2}[x_0(1+t)]=0$$

$$a_y=\frac{\partial^2}{\partial t^2}[y_0(1+t)^2]=2y_0$$

$$a_z=\frac{\partial^2}{\partial t^2}[z_0(1+t)^3]=6z_0(1+t)$$

(3) 求流线

$$\frac{\mathrm{d}x}{x/(1+t)}=\mathrm{d}s\quad\Rightarrow\quad\ln x=\frac{s}{1+t}+c_1\quad\Rightarrow\quad x=c'_1\mathrm{e}^{\frac{s}{1+t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y/(1+t)}=\mathrm{d}s\quad\Rightarrow\quad\ln y=\frac{2s}{1+t}+c_2\quad\Rightarrow\quad y=c'_2\mathrm{e}^{\frac{2s}{1+t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{3z/(1+t)}=\mathrm{d}s\quad\Rightarrow\quad\ln z=\frac{3s}{1+t}+c_3\quad\Rightarrow\quad z=c'_3\mathrm{e}^{\frac{3s}{1+t}}$$

从 x、y、z 表达式中消去 $s/(1+t)$ 得

$$\begin{cases}y=c'x^2\\z=c''x^3\end{cases}$$

□

1.3 速度场由 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x^2t,yt^2,xz)$ 给出，求 $t=1$ 时位于点(1,3,2)的流体质点的速度及加速度。

解：(1) 速度为

$$u=x^2t=1^2\times1=1$$

$$v=yt^2=3\times1^2=3$$

$$w=xz=1\times2=2$$

(2) 加速度为

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+x^2t2xt=x^2+2x^3t^2=1+2=3$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 2yt + yt^2t^2 = 2yt + yt^4 = 2\times3\times1+3\times1 = 9$$

$$a_z = u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = x^2tz + xzx = x^2tz + x^2z = 1\times1\times2+1\times2 = 4$$

□

1.4 速度场由 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\alpha x+t^2,\beta y-t^2,0)$ 给出，求速度及加速度的拉格朗日表示。

解： 先求 x 方向速度和加速度的拉格朗日表示，由于 $u=\alpha x+t^2$，有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x + t^2$$

上述微分方程的解为

$$x = -\frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} + c\mathrm{e}^{\alpha t}$$

由 $t=0$ 时 $x=x_0$，得 $c=x_0+2/\alpha^3$，于是

$$x = -\frac{t^2}{\alpha} - \frac{2t}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} + \left(x_0 + \frac{2}{\alpha^3}\right)\mathrm{e}^{\alpha t} \quad \Rightarrow$$

$$u = \partial x/\partial t = \alpha(x_0 + 2/\alpha^3)\mathrm{e}^{\alpha t} - 2t/\alpha - 2/\alpha^2$$

$$a_x = \partial u/\partial t = \alpha^2(x_0 + 2/\alpha^3)\mathrm{e}^{\alpha t} - 2/\alpha$$

同理可求得

$$y = (y_0 - 2/\beta^3)\mathrm{e}^{\beta t} + t^2/\beta + 2t/\beta^2 + 2/\beta^3$$

$$v = \partial y/\partial t = \beta(y_0 - 2/\beta^3)\mathrm{e}^{\beta t} + 2t/\beta + 2/\beta^2$$

$$a_y = \partial v/\partial t = \beta^2(y_0 - 2/\beta^3)\mathrm{e}^{\beta t} + 2/\beta$$

和

$$z = z_0$$

$$w = 0$$

$$a_z = 0$$

□

1.5 已知流体质点 (x_0,y_0,z_0) 的空间位置表示如下，

$$x = x_0,\quad y = y_0 + x_0(\mathrm{e}^{-2t} - 1),\quad z = z_0 + x_0(\mathrm{e}^{-3t} - 1)$$

求(1)速度的欧拉表示；(2)加速度的欧拉和拉格朗日表示；(3)过点(1,1,1)的流线，及 $t=0$ 时在 $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$ 处的流体质点的迹线；(4)速度的散度、旋度及涡线；(5)应变率张量和旋转率张量。

解： (1) 速度的欧拉表示为

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -2x_0\mathrm{e}^{-2t} = -2x\mathrm{e}^{-2t}$$

$$w=\frac{\partial z}{\partial t}=-3x_0\mathrm{e}^{-3t}=-3x\mathrm{e}^{-3t}$$

(2) 由速度的拉格朗日表示求加速度的拉格朗日表示为

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad a_y=\frac{\partial v}{\partial t}=4x_0\mathrm{e}^{-2t},\quad a_z=\frac{\partial w}{\partial t}=9x_0\mathrm{e}^{-3t}$$

由速度的欧拉表示求加速度的欧拉表示为

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$a_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}=4x\mathrm{e}^{-2t}$$

$$a_z=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}=9x\mathrm{e}^{-3t}$$

(3) 流线微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{-2x\mathrm{e}^{-2t}}=\frac{\mathrm{d}z}{-3x\mathrm{e}^{-3t}}=\mathrm{d}s\ \Rightarrow$$

$$x=c_1,\quad y=-2x\mathrm{e}^{-2t}s+c_2,\quad z=-3x\mathrm{e}^{-3t}s+c_3$$

由初始条件 $s=0, x=y=z=1 \ \Rightarrow\ c_1=c_2=c_3=1$，于是

$$x=1,\quad y=-2x\mathrm{e}^{-2t}s+1,\quad z=-3x\mathrm{e}^{-3t}s+1$$

消去参数 s 得流线方程为

$$x=1,\quad y=\frac{2}{3}(z-1)\mathrm{e}^{t}+1$$

将$(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$分别代入题目给出的 x、y 和 z 表达式，即得所求迹线方程

$$x=1,\quad y=1+\mathrm{e}^{-2t}-1=\mathrm{e}^{-2t},\quad z=1+\mathrm{e}^{-3t}-1=\mathrm{e}^{-3t}$$

(4) 速度的散度、旋度分别为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0+\frac{\partial}{\partial y}(-2x\mathrm{e}^{-2t})+\frac{\partial}{\partial z}(-3x\mathrm{e}^{-3t})=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{u}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & -2x\mathrm{e}^{-2t} & -3x\mathrm{e}^{-3t}\end{vmatrix}=3\mathrm{e}^{-3t}\boldsymbol{j}-2\mathrm{e}^{-2t}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}$，由上式知，$\Omega_x=0$，$\Omega_y=3\mathrm{e}^{-3t}$，$\Omega_z=-2\mathrm{e}^{-2t}$，于是涡线微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{3\mathrm{e}^{-3t}}=\frac{\mathrm{d}z}{-2\mathrm{e}^{-2t}}\ \Rightarrow$$

$$x=c_1$$

$$z=-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{t}y+c_2$$

(5) 应变率张量和旋转率张量分别为

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0 & -e^{-2t} & -\dfrac{3}{2}e^{-3t}\\ -e^{-2t} & 0 & 0\\ -\dfrac{3}{2}e^{-3t} & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & e^{-2t} & \dfrac{3}{2}e^{-3t}\\ -e^{-2t} & 0 & 0\\ -\dfrac{3}{2}e^{-3t} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

□

1.6* 设 $u=x+3y, v=-x-y, w=0$，求速度的拉格朗日表示及加速度的欧拉表示。

解： 为书写方便，本题中分别以 $\dot{x},\ddot{x}$ 表示 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$，等。由题所给速度表示式，有

$$\dot{x}=x+3y,\quad \dot{y}=-x-y$$

$$\ddot{x}=\dot{x}+3\dot{y}=x+3y-3x-3y=-2x$$

$$\ddot{y}=-\dot{x}-\dot{y}=-x-3y+x+y=-2y$$

即加速度的欧拉表示为

$$a_x=-2x,\quad a_y=-2y \tag{a1}$$

上两式可改写为

$$\ddot{x}+2x=0,\quad \ddot{y}+2y=0 \tag{a2}$$

分别求解上述两微分方程，得

$$x=c_1\sin\sqrt{2}t+c_2\cos\sqrt{2}t,\quad y=c_3\sin\sqrt{2}t+c_4\cos\sqrt{2}t \tag{b}$$

由 $t=0$ 时 $(x,y)=(x_0,y_0)$，得

$$c_2=x_0,\quad c_4=y_0 \tag{c}$$

由 $\dot{x}=x+3y$ 得

$$\sqrt{2}c_1\cos\sqrt{2}t-\sqrt{2}x_0\sin\sqrt{2}t=(c_1+3c_3)\sin\sqrt{2}t+(x_0+3y_0)\cos\sqrt{2}t \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}c_1=x_0+3y_0,\quad c_1+3c_3=-\sqrt{2}x_0$$

解上述方程组得

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_0+3y_0),\quad c_3=-\left[\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\right]x_0-\frac{1}{\sqrt{2}}y_0 \tag{d}$$

由式(b)、(c)和(d)，速度的拉格朗日表示式可计算为

$$u=\dot{x}=c_1\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t-c_2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t=(x_0+3y_0)\cos\sqrt{2}t-\sqrt{2}x_0\sin\sqrt{2}t \tag{e}$$

$$v=\dot{y}=c_3\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t-c_4\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t=-(x_0+y_0)\cos\sqrt{2}t-\sqrt{2}y_0\sin\sqrt{2}t \tag{f}$$

□

1.7 已知速度场 $u=-2x, v=2y(1+t)^{-1}, w=2zt(1+t)^{-1}$，求(1) $t=0$ 时刻过空间点(1,1,1)的流线；(2) $t=0$ 时刻过空间点(1,1,1)的迹线；(3) t 时刻过点(1,1,1)

的脉线。

解：（1）令速度表示式中 $t=0$，然后将速度式代入流线微分方程

$$\frac{dx}{-2x}=\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{0}=ds \Rightarrow$$

$$x=c_1e^{-2s},\quad y=c_2e^{2s},\quad z=c_3$$

由 $s=0$ 时 $(x,y,z)=(1,1,1)$，得 $c_1=c_2=c_3=1$，于是

$$x=e^{-2s},\quad y=e^{2s},\quad z=1 \Rightarrow$$

$$xy=1,\quad z=1 \tag{a}$$

以上即所求流线方程。

（2）将题给速度式代入迹线微分方程

$$dx/dt=-2x \Rightarrow x=c_1e^{-2t} \tag{b}$$

同理得

$$y=c_2(1+t)^2,\quad z=c_3e^{2t}(1+t)^{-2} \tag{c}$$

由 $t=0$ 时 $(x,y,z)=(1,1,1)$ 得 $c_1=c_2=c_3=1$，于是

$$x=e^{-2t},\quad y=(1+t)^2,\quad z=e^{2t}(1+t)^{-2} \tag{d}$$

以上即所求迹线的参数方程。

（3）将 $t=\tau$ 时 $(x,y,z)=(1,1,1)$ 分别代入式(b)和(c)，得

$$c_1=e^{2\tau},\quad c_2=(1+\tau)^{-2},\quad c_3=e^{-2\tau}(1+\tau)^2$$

将以上常数分别代入式(b)和(c)，

$$x=e^{-2(t-\tau)},\quad y=\left(\frac{1+t}{1+\tau}\right)^2,\quad z=e^{2(t-\tau)}\left(\frac{1+t}{1+\tau}\right)^{-2} \tag{e}$$

以上即所求脉线的参数方程，式中 $-\infty<\tau\leqslant t$。

□

1.8 设速度场为 $u=x/t, v=y, w=0$，求 t 时刻经过空间固定点 (x_*, y_*, z_*) 的脉线方程。

解：将速度式代入迹线微分方程，

$$\frac{dx}{x/t}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{0}=dt$$

积分得

$$x=c_1t,\quad y=c_2e^t,\quad z=c_3$$

由 $t=\tau$ 时 $(x,y,z)=(x_*,y_*,z_*)$，得

$$c_1=x_*\tau^{-1},\quad c_2=y_*e^{-\tau},\quad c_3=z_*$$

将以上常数代入迹线方程，

$$x=x_*(t/\tau),\quad y=y_*e^{t-\tau},\quad z=z_*$$