信息与计算科学丛书——42

计算几何中的几何偏微分方程方法

徐国良 著

科学出版社
www.sciencep.com

信息与计算科学丛书　42

计算几何中的几何偏微分方程方法

徐国良　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书的主要内容包括几何偏微分方程的构造方法、各种微分几何算子的离散化方法及其离散格式的收敛性、几何偏微分方程数值求解的有限差分法、有限元法以及水平集方法，还包括几何偏微分方程在曲面平滑、曲面拼接、*N*边洞填补、自由曲面设计、曲面重构、曲面恢复、分子曲面构造以及三维实体几何形变中的应用.

本书内容新颖、文字简练、可读性强，可作为理工科院校的应用数学、计算数学、计算几何、计算机辅助设计以及计算机图形学等专业本科生和研究生的教材，也可作为在上述领域中从事研究工作的广大科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

计算几何中的几何偏微分方程方法/徐国良著. —北京：科学出版社，2008
(信息与计算科学丛书；42)
ISBN 978-7-03-022730-0
Ⅰ.计… Ⅱ.徐… Ⅲ.偏微分方程-应用-计算几何 Ⅳ.O18
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 120612 号

责任编辑：范庆奎 房 阳/责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008年10月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008年10月第一次印刷 印张：21
印数：1—2 000 字数：395 000

定价：58.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈新蕾〉)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末，由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》，至今已逾 30 多册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨，学术水平高、社会影响大，对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并，定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要，科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》，组建了新的编委会，并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议，讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者，针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性，体现新的研究方向. 内容力求深入浅出，简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作，在学术界赢得了很好的声誉，在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版，以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前言

计算几何是由函数逼近论、微分几何以及计算数学等交叉形成的学科, 它研究几何形状的构造及计算机表示、分析和综合, 是计算机辅助几何设计的数学基础. 从 20 世纪 60 年代起, 计算机辅助设计和计算机辅助制造开始进入造船、航空和汽车工业产品的外形设计和制造领域中. 在电子计算机飞速发展和工业设计广泛应用的刺激之下, 计算几何这一学科得到了蓬勃发展, 已经出现了 Bézier 曲线曲面、B 样条曲线曲面、NURBS 曲线曲面、细分曲线曲面以及微分方程曲线曲面等一系列方法, 形成了以参数曲面、隐式曲面以及离散曲面为表示方法, 以插值和逼近为构造方法的理论体系. 目前, 计算机辅助几何设计仍然是很吸引人的研究领域, 众多从事经典函数逼近论、微分几何、计算数学以及计算机图形学等方面的研究专家投身于此, 极大地刺激了这一领域向更纵深领地发展. 计算几何中的几何偏微分方程方法就是在这一背景之下产生的新兴研究领域.

众所周知, 偏微分方程是用来描述自变量、未知函数及其偏导数之间关系的方程. 而几何偏微分方程常用来指作为控制曲面或一般流形运动的、除时间变量外只含有几何量的偏微分方程. 几何偏微分方程是几何本质的, 即它们不依赖具体的参数化. 更重要的是, 满足几何偏微分方程的曲面通常具有某些全局最优性质, 如平均曲率流、Willmore 流、极小平均曲率变差流等能使面积极小、平均曲率平方极小、平均曲率的变化极小等, 这些性质使得所产生的曲面具有十分理想的光顺效果乃至艺术美感.

用几何偏微分方程来解决各种问题的方法, 称为*几何偏微分方程方法*. 近年来, 随着计算机技术的蓬勃发展, 几何偏微分方程方法在计算机辅助设计、计算机辅助几何设计、图像处理等领域显示出明显的优越性. 该方法具有理论基础雄厚、效率高、易于实现、具有一般性、应用领域广泛等优点. 在图像处理、曲面处理、自由曲面设计、曲面拼接、曲面重构、曲面恢复等众多领域均有用武之地.

几何偏微分方程还涉及许多理论及应用领域. 在物理、化学、生物学、流体力学、材料科学、燃烧理论、地震学、计算机视觉等理论与应用学科领域中存在着大量的界面运动问题, 其中很多问题都可以抽象成几何问题且可以用几何偏微分方程来统一概括和描述. 在理论方面, 几何偏微分方程也具有极大的研究价值, 几何偏微分方程与几何分析、流形理论、拓扑学、复分析、变分法、几何测度论、临界点理论有密切联系, 如平均曲率流与正质量猜想、Ricci 流与 Poincaré 猜想、平均曲率流与极小曲面等.

采用偏微分方程来进行曲面设计的研究可追溯到 20 世纪 80 年代 Bloor 等的工作, 其基本思想是在矩形区域上用双调和方程解决拼接和补洞问题. 然而, 双调和方程不是几何本质的, 方程的解依赖于具体的参数化形式, 因而, 双调和方程并不是本书所论的几何偏微分方程. 使用几何偏微分方程解决几何设计中的问题已有许多成功个例. 早期, 人们将平均曲率流用于磨光有噪声的曲面, 取得了非常理想的效果. 但是对于曲面造型和设计问题, 平均曲率流等二阶流均不能实现各个曲面片之间的 G^1 光滑连接. 后来, 四阶几何流被应用于解决曲面拼接、自由曲面设计以及曲面修复等问题, 取得了理想的效果.

综上所述, 计算几何中的几何偏微分方程方法是一个具有广阔发展前景且非常新颖的研究领域, 目前仍处在初创阶段. 截至本书发稿时, 仍没有这方面的专门著作出版. 本书介绍的内容是作者在这一领域的研究结果和工作体会, 我们的愿望是把几何偏微分方程方法发展成为计算几何领域中的一个系统而完整的方法. 然而目前的工作仍不够深入系统, 许多问题尚待进一步研究, 大量相关的理论问题需要深入探讨, 巨大应用的潜力需要发掘. 在本书的各章中, 将随时提出一些亟待解决的问题, 供有兴趣的读者进一步研究.

本书的内容涵盖了中国科学院计算数学与科学工程计算研究所计算几何课题组近年来的主要研究工作. 先后参加这一课题组研究工作的有赵欢喜、潘青、张琴、刘丹、赵宏庆、李明、郑艳梅、陈冲, 作者对他们为本书所作出的贡献深表谢意. 张琴博士、刘丹博士和潘青博士分别完成了 2.9 节、4.5.3 小节和 7.6 节的撰写工作. 研究生李明和郑艳梅仔细研读了本书的初稿, 并在讨论班上进行了全面的研讨, 提出了许多修改意见. 在本书定稿之前, 张琴博士又通读全书, 进一步提出改进意见, 这对提高本书的质量至关重要. 与本书作者合作的还有美国得克萨斯州大学的 Bajaj 教授、中国科学院计算数学与科学工程计算研究所的许志强博士、美国卡内基梅隆大学的张永杰博士以及得克萨斯州大学的赵文启博士, 他们均对本书的内容有所贡献, 在此一并致以谢意. 本项目曾先后得到中国科学院创新基金 (1770900)、国家自然科学基金 (10241004, 10371130, 60773165) 和中国国家重点基础研究发展计划 (2004CB318000) 的资助. 显然, 没有这些资助, 本项目是无法顺利完成的. 在本书付梓之际, 作者向支持自己的机构致以诚挚的谢意.

虽然作者花费了两年多的时间撰写此书, 但仍感时间仓促, 加之作者水平有限, 书中疏漏乃至错误在所难免, 望读者及专家学者批评指正.

作　者

2008 年 5 月于北京

符号说明

$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{R}^m$	m 维实向量空间
$\mathbb{R}^{m\times n}$	实 $m\times n$ 矩阵空间
$\mathbb{R}^{m\times n\times l}$	实 $m\times n\times l$ 体矩阵空间
$\mathbb{N}$	自然数的集合
$\mathbb{N}^+$	非负整数的集合
$\mathcal{S}$	曲面, 流形
$\partial\mathcal{S}$, $\mathit{\Gamma}$	曲面$\mathcal{S}$的边界
M	网格, 离散曲面
H	曲面 (流形) 的平均曲率
$\boldsymbol{H}$	曲面 (流形) 的平均曲率向量
K	曲面的高斯曲率
$\boldsymbol{K}$	曲面的高斯曲率向量
$\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$	曲面 (流形) 的主曲率
$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$	曲面 (流形) 的主方向
k_n	曲面的法曲率
k_g	曲面的测地曲率
$\boldsymbol{n}$	曲面 (流形) 的法向
$\boldsymbol{n}_c$	曲面 (流形) 边界的外单位法向, 也称为余法向
$\boldsymbol{n}^{(\mathit{\Gamma})}$	曲面边界 $\mathit{\Gamma}$ 上的单位法向
$\boldsymbol{t}$	曲面 (流形) 的切向量
$(u,v)=(u^1,u^2)$	曲面的定义域参数
$\boldsymbol{x}(u,v)$	曲面的参数表示
$\boldsymbol{x}_i$	离散曲面的顶点
e_i	离散曲面的边
f_i	离散曲面的小面 (三角形)
α,β,θ	向量的夹角
$\mathit{\Omega}$	曲面或函数的定义域
$\phi,\psi,\varphi,\vartheta$	水平集函数, 试探函数, 检验函数

$C_0^\infty(\mathcal{S})^n$	曲面 $\mathcal{S}$ 上无穷光滑的、具有紧支集的 n 维函数空间
$\varPhi, \varTheta$	向量值检验函数
∇	欧几里得空间中的梯度算子
∇_s	参数曲面 $\mathcal{S}$ 上的切梯度算子
∇_ϕ	隐式曲面 $\{\boldsymbol{x} : \phi(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 上的切梯度算子
$\diamond$	参数曲面的第二切算子
$\oslash$	参数曲面的第三切算子
div	欧几里得空间中的散度算子
div_s	参数曲面 $\mathcal{S}$ 上的切散度算子
Div_s	参数曲面 $\mathcal{S}$ 上的散度算子
div_ϕ	隐式曲面 $\{\boldsymbol{x} : \phi(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 上的散度算子
Δ	欧几里得空间中的 Laplace 算子
Δ_s	参数曲面 $\mathcal{S}$ 上的 Laplace-Beltrami 算子
Δ_M	离散网格 M 上的 Laplace-Beltrami 算子的逼近
Δ_ϕ	隐式曲面 $\{\boldsymbol{x} : \phi(\boldsymbol{x}) = 0\}$ 上的 Laplace-Beltrami 算子
$\square$	参数曲面上的 $\square$ 算子
$\boxtimes$	参数曲面上的 $\boxtimes$ 算子
P	到曲面切空间的投影算子
Q	到曲面法空间的投影算子
tr	方阵的迹
det	方阵的行列式
I, II, III	曲面的第一、第二、第三基本形式, I 也表示单位矩阵或恒等映射
$g_{\alpha\beta}$	曲面的第一基本形式的系数
$b_{\alpha\beta}$	曲面的第二基本形式的系数
$l_{\alpha\beta}$	曲面的第三基本形式的系数
$[g^{\alpha\beta}]$	矩阵 $[g_{\alpha\beta}]$ 的逆
$\varGamma_{\alpha\beta}^\gamma$	度规 g 的 Christoffel 符号
W	曲面的形状算子
$T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{S}$	曲面 $\mathcal{S}$ 上点 $\boldsymbol{x}$ 处的切空间
$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$	向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的欧几里得内积
$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$	三维向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的外 (叉) 积
$\\|\boldsymbol{v}\\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$	向量 $\boldsymbol{v}$ 的欧几里得长度
$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的迹
$\mathrm{d}s$	弧长元
$\mathrm{d}A$	面积元

$\mathrm{d}V, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$	体积元
t	时间参数
τ	时间步长
h	空间步长, 网格尺寸
$\mathscr{E}, \mathscr{F}$	能量泛函
δ	一阶变分
$\{x : x$ 满足 $\cdots\}$	集合表达方式
$\mathrm{card}(\cdot)$	一个有限集合的势 (基数)

目录

第 1 章　微分几何基础

本章介绍本书中要用到的微分几何的一些基本知识, 给出各种微分几何算子的定义、基本性质, 它们与曲率之间的关系以及算子的格林公式等. 本章的准备工作为后文的继续进行提供了必要的基础. 我们只关心曲面的情况. 首先考虑参数曲面, 然后再考虑隐式曲面 (水平集曲面). 本章的部分内容取材于文献 [1].

1.1　曲面的参数表示

本书中用 $\mathbb{R}$ 表示实数域, $\mathbb{R}^n$ 表示实的 n 维欧几里得空间, 其中, 元素 $\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 以列向量的形式表示. 用 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 维实矩阵的全体. 用方括号 $[\cdots]$ 表示矩阵或向量, 用圆括号 $(\cdots)$ 表示一个有序的数组, 用花括号 $\{\cdots\}$ 表示集合, 始终把向量看成矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示.

定义 1.1.1　如果从平面区域 $\Omega = \{[u,v]^{\mathrm{T}}\} \subset \mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射

$$\boldsymbol{x}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]^{\mathrm{T}} \tag{1.1.1}$$

满足

(1) 每个分量函数都是充分光滑的,

(2) 向量 $\boldsymbol{x}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}$ 与向量 $\boldsymbol{x}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$ 线性无关,

则称集合 $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x}(u,v):\ [u,v]^{\mathrm{T}} \in \Omega\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲面, (u,v) 称为曲面的参数.

定义 1.1.1 中, "充分光滑" 的含义是指所考虑的函数具有所需要阶数的连续导数. 本书中, 说一个函数"充分光滑"或"适当光滑", 是指它具有所需要的光滑性, 以后不再说明. 为了简化记号, 参数 (u,v) 有时也记为 $w = (u^1, u^2)$. 除非特别说明, 总假定 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个与圆盘同胚的闭区域.

设曲面 $\mathcal{S}$ 有参数表示 (1.1.1), $\boldsymbol{x}$ 是曲面上的一点, 那么曲面在点 $\boldsymbol{x}$ 处的切平面 $T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{S}$ 定义为

$$T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{S} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v\},$$

其中, $\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v\}$ 为由 $\boldsymbol{x}_u$ 和 $\boldsymbol{x}_v$ 所张成的空间. $\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v$ 称为坐标切向量.

第一基本形式　二次微分式

$$I = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle = g_{11}\mathrm{d}u\mathrm{d}u + 2g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g_{22}\mathrm{d}v\mathrm{d}v$$

称为曲面的第一基本形式, 其中, $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{x}_v\mathrm{d}v$,

$$g_{11}=\langle\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_u\rangle,\quad g_{12}=\langle\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v\rangle,\quad g_{22}=\langle\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{x}_v\rangle$$

称为第一基本形式的系数. 上述定义中, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中两个向量的内积.

定义 1.1.2　如果曲面上的一个几何量由曲面的第一基本形式决定, 那么该几何量称为**几何内蕴的**.

定义 1.1.3　如果曲面上的一个几何量不依赖于曲面的具体参数化, 那么该几何量称为**几何本质的**.

性质 1.1.1　曲面的第一基本形式是几何本质的.

性质 1.1.2　曲面的第一基本形式在 $\mathbb{R}^3$ 的合同变换下不变.

所谓合同变换, 是指三维空间中的一个一对一的变换 $\mathcal{T}$, 它保持空间中任意两点之间的距离. 这样的变换可分解为一个正交变换与一个平移变换的和. 如果正交变换的矩阵的行列式为 1, 则这个合同变换称为刚体运动, 如果正交变换的矩阵的行列式为 -1, 则这个合同变换称为反向刚体运动.

设

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{\|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\|},\tag{1.1.2}$$

则$\boldsymbol{n}$为曲面 $\mathcal{S}$ 的单位法向量. 运算符号 $\times$ 表示两个向量的叉积. $\|\cdot\|=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ 表示欧几里得范数. 显然, 向量 $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ 和 $\boldsymbol{n}$ 线性无关. $\{\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{n}\}$ 称为曲面 $\mathcal{S}$ 的自然标架.

第二基本形式　二次微分式

$$I\!I=-\langle\mathrm{d}\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{n}\rangle=b_{11}\mathrm{d}u\mathrm{d}u+2b_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+b_{22}\mathrm{d}v\mathrm{d}v$$

称为曲面的第二基本形式, 其中, $\mathrm{d}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_u\mathrm{d}u+\boldsymbol{n}_v\mathrm{d}v$,

$$\begin{aligned}b_{11}&=\langle\boldsymbol{x}_{uu},\boldsymbol{n}\rangle=-\langle\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{n}_u\rangle,\\ b_{12}&=\langle\boldsymbol{x}_{uv},\boldsymbol{n}\rangle=-\langle\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{n}_v\rangle=-\langle\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{n}_u\rangle,\\ b_{22}&=\langle\boldsymbol{x}_{vv},\boldsymbol{n}\rangle=-\langle\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{n}_v\rangle\end{aligned}$$

称为第二基本形式的系数.

性质 1.1.3　设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\bar{u},\bar{v})$ 是曲面 $\mathcal{S}$ 的两个不同的参数表示. 当变换 $(u,v)\rightarrow(\bar{u},\bar{v})$ 是同向参数变换时, 第二基本形式不变; 当变换 $(u,v)\rightarrow(\bar{u},\bar{v})$ 是反向参数变换时, 第二基本形式改变符号.

所谓同向参数变换, 是指变换 $(u,v)\rightarrow(\bar{u},\bar{v})$ 的雅可比矩阵的行列式大于零. 若该行列式小于零, 则称该变换是反向参数变换. 雅可比矩阵的行列式等于零的参数变换是不允许的.

第二基本形式依赖于 $\boldsymbol{n}$ 的定向, 这使得后面定义的平均曲率也依赖于 $\boldsymbol{n}$ 的定向. 为了避免出现混乱, 本书中约定 $\boldsymbol{n}$ 的定向具有从一性, 即 $\boldsymbol{n}$ 一旦取定, 后来所有涉及法向量的计算, 均需使用该法向量, 不能随意改变符号. 考虑到曲面有时需分片定义, 而为了统一定向要改变局部定义的法向量的定向, 从而有可能破坏从一性. 这一点必须引起注意.

性质 1.1.4 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一张曲面, $\boldsymbol{x}(u,v)$ 是它的参数表示; $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个合同变换, 则曲面 $\tilde{\mathcal{S}}$: $\tilde{\boldsymbol{x}}(u,v) = \mathcal{T}\circ \boldsymbol{x}(u,v)$ 的第二基本形式 $\tilde{I\!I}$ 与曲面 $\mathcal{S}$ 的第二基本形式 $I\!I$ 有如下关系: 当 $\mathcal{T}$ 是刚体运动时 $\tilde{I\!I}(u,v) = I\!I(u,v)$, 当 $\mathcal{T}$ 是反向刚体运动时 $\tilde{I\!I}(u,v) = -I\!I(u,v)$.

第三基本形式 二次微分式

$$I\!I\!I = \langle \mathrm{d}\boldsymbol{n}, \mathrm{d}\boldsymbol{n}\rangle = l_{11}\mathrm{d}u\mathrm{d}u + 2l_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + l_{22}\mathrm{d}v\mathrm{d}v$$

称为曲面的第三基本形式, 其中,

$$l_{\alpha\beta} = \langle \boldsymbol{n}_{u^\alpha}, \boldsymbol{n}_{u^\beta}\rangle, \quad \alpha,\beta = 1,2$$

称为第三基本形式的系数.

关于 3 个基本形式的系数, 以后常用如下的记号:

$$\begin{aligned}
&[g^{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]^{-1}, \quad g = \det[g_{\alpha\beta}],\\
&[b^{\alpha\beta}] = [b_{\alpha\beta}]^{-1}, \quad b = \det[b_{\alpha\beta}],\\
&[l^{\alpha\beta}] = [l_{\alpha\beta}]^{-1}, \quad l = \det[l_{\alpha\beta}].
\end{aligned}$$

应当指出, 对于由定义 1.1.1 所定义的曲面, 矩阵 $[g_{\alpha\beta}]$ 总是可逆的. 但 $[b_{\alpha\beta}]$ 不一定可逆. $[b_{\alpha\beta}]$ 的可逆性与 $[l_{\alpha\beta}]$ 的可逆性等价. 稍后会看到, 矩阵 $[b_{\alpha\beta}]$ 可逆的充要条件是曲面的高斯曲率不为零.

1.2 曲面的曲率

曲率是刻画曲面弯曲程度的重要概念. 本书中所论的几何偏微分方程基本是用曲面的曲率来表达. 为了定义曲率, 先引入一个称之为 Weingarten 变换的映射. 在曲面 $\mathcal{S}$ 的任意一点 $\boldsymbol{x}(u,v)$ 的切平面上定义一个线性变换 W, 称之为 Weingarten 变换, 使得

$$W(\boldsymbol{x}_u) = -\boldsymbol{n}_u, \quad W(\boldsymbol{x}_v) = -\boldsymbol{n}_v, \tag{1.2.1}$$

那么对于切平面上的任何一个向量 $\boldsymbol{t} = a\boldsymbol{x}_u + b\boldsymbol{x}_v$, 有

$$W(\boldsymbol{t}) = -a\boldsymbol{n}_u - b\boldsymbol{n}_v.$$

这样定义的变换与曲面参数的选取无关, 并且 Weingarten 变换是自共轭的线性变换, 即对任何两个切向量 $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$, 有 $\langle \boldsymbol{t}_1, W(\boldsymbol{t}_2)\rangle = \langle W(\boldsymbol{t}_1), \boldsymbol{t}_2\rangle$. Weingarten 变换的两个实特征值 κ_1, κ_2 **称为曲面的主曲率**, 相应的特征向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ **称为曲面的主方向**. 在自然标架之下, Weingarten 变换的系数矩阵为

$$\boldsymbol{S} = [b_{\alpha\beta}][g^{\alpha\beta}] = \frac{1}{g}\begin{bmatrix} b_{11}g_{22} - b_{12}g_{12} & b_{12}g_{11} - b_{11}g_{12} \\ b_{12}g_{22} - b_{22}g_{12} & b_{22}g_{11} - b_{12}g_{12} \end{bmatrix}. \tag{1.2.2}$$

于是曲面的平均曲率定义为

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} := \frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{S})}{2} = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{2g}, \tag{1.2.3}$$

曲面的高斯曲率定义为

$$K = \kappa_1\kappa_2 := \det(\boldsymbol{S}) = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g} = \frac{b}{g}. \tag{1.2.4}$$

而 (1.2.1) 可写为

$$[\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{n}_v] = -[\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v]\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}. \tag{1.2.5}$$

设

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] := [\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v]\boldsymbol{A}, \tag{1.2.6}$$

其中, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ 为由 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量组成的矩阵, 即

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \tag{1.2.7}$$

那么由 (1.2.5) 有

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{e}_1) &= -[\boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{n}_v][a_{11}, a_{12}]^{\mathrm{T}} \\ &= [\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v]\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}[a_{11}, a_{12}]^{\mathrm{T}} \\ &= [\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v][a_{11}, a_{12}]^{\mathrm{T}}k_1 \\ &= \boldsymbol{e}_1 k_1. \end{aligned}$$

类似地, $W(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 k_2$. 于是 (1.2.6) 确定了主方向. 为了以后使用方便, 引入如下引理:

引理 1.2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为由 (1.2.7) 所定义的矩阵, 那么

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} = [h_{\alpha\beta}][g_{\alpha\beta}]\boldsymbol{A}, \tag{1.2.8}$$

其中,

$$[h_{\alpha\beta}] = \frac{1}{g}\begin{bmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{12} & b_{11} \end{bmatrix}. \tag{1.2.9}$$

证明 假定 $K \neq 0$, 那么矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是可逆的且 $[h_{\alpha\beta}] = [Kb^{\alpha\beta}]$, 于是由 (1.2.7) 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= K[b^{\alpha\beta}][g_{\alpha\beta}]\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} k_2^{-1} & 0 \\ 0 & k_1^{-1} \end{bmatrix} \\ &= [h_{\alpha\beta}][g_{\alpha\beta}]\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} k_2^{-1} & 0 \\ 0 & k_1^{-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因此当 $K \neq 0$ 时, (1.2.8) 成立. 注意到, (1.2.8) 两端均是第一及第二基本形式系数 $g_{\alpha\beta}$ 与 $b_{\alpha\beta}$ 的连续函数, 故当 $K = 0$ 时, (1.2.8) 也成立.

设 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v}{\|\boldsymbol{x}_u \times \boldsymbol{x}_v\|}$ 是曲面 $\mathcal{S}$ 的单位法向量, 那么

$$\boldsymbol{H} := H\boldsymbol{n} \quad 和 \quad \boldsymbol{K} := K\boldsymbol{n}$$

分别称为平均曲率向量和高斯曲率向量.

曲率的其他计算公式 (1.2.3) 和 (1.2.4) 给出了平均曲率和高斯曲率的明显表达. 这些公式是非常重要的. 然而, 有时需要其他形式的曲率公式. 下面给出两个不同的公式或这些公式的推广. 对于这些公式, 只指出其来源, 而不加以证明. 设

$$\mathcal{S} = \left\{\boldsymbol{x}(u,v) = [x_1(u,v), \cdots, x_k(u,v)]^{\mathrm{T}} : [u,v]^{\mathrm{T}} \in \Omega\right\}$$

为 k 维空间中的二维流形, 那么平均曲率向量和黎曼曲率为[2]

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{Q}(g_{22}\boldsymbol{x}_{uu} + g_{11}\boldsymbol{x}_{vv} - 2g_{12}\boldsymbol{x}_{uv})}{2g} \in \mathbb{R}^k, \tag{1.2.10}$$

$$K(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}_{uu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_{vv} - \boldsymbol{x}_{uv}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_{uv}}{g} \in \mathbb{R}, \tag{1.2.11}$$

其中,

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - [\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v][g^{\alpha\beta}][\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{x}_v]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{k\times k},$$

$g_{\alpha\beta}=\langle \boldsymbol{x}_{u^\alpha},\boldsymbol{x}_{u^\beta}\rangle$ 同 $k=3$ 时的定义一样. 作为习题, 读者可证明, 当 $k=3$ 时, 这里定义的曲率与前面的平均曲率向量和高斯曲率向量相吻合. 使用 (1.2.10) 的一个好处是 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 的表达式不依赖于曲面的定向.

1.3 曲面的基本方程

设 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 $\mathcal{S}$ 的参数表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$, 曲面 $\mathcal{S}$ 上的 (光滑) 向量场 $\boldsymbol{t}(u,v)$ 是指对于 $\mathcal{S}$ 上的任意一点 $\boldsymbol{x}(u,v)$, $\boldsymbol{t}(u,v)$ 是从点 $\boldsymbol{x}(u,v)$ 出发的一个向量, 并且 $\boldsymbol{t}(u,v)$ 光滑地依赖于参数 (u,v). 对于任何的 (u,v), 当 $\boldsymbol{t}(u,v)$ 是曲面 $\mathcal{S}$ 在点 $\boldsymbol{x}(u,v)$ 处的切向量时, $\boldsymbol{t}(u,v)$ 称为*曲面 $\mathcal{S}$ 的切向量场*. 当 $\boldsymbol{t}(u,v)$ 是曲面 $\mathcal{S}$ 在点 $\boldsymbol{x}(u,v)$ 处的法向量时, $\boldsymbol{t}(u,v)$ 称为*曲面 $\mathcal{S}$ 的法向量场*.

显然, $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ 是曲面 $\mathcal{S}$ 上的两个切向量场, $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v}{\|\boldsymbol{x}_u\times\boldsymbol{x}_v\|}$ 是曲面 $\mathcal{S}$ 的 (单位) 法向量场, 并且 $\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{n}$ 线性无关. 因此, $\{\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{n}\}$ 构成了以 $\boldsymbol{x}(u,v)$ 为原点的 $\mathbb{R}^3$ 中的一个标架, 这些标架的全体称为*参数曲面 $\mathcal{S}$ 的自然标架场*. 显然, 向量场 $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^\alpha}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}_{u^\alpha}}{\partial u^\beta}$ 以及 $\dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\alpha}$ 均可由 $\boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x}_v$ 以及 $\boldsymbol{n}$ 表示. 事实上, 可以推出

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^\alpha}=\boldsymbol{x}_{u^\alpha}, & \alpha=1,2,\\[2mm] \dfrac{\partial \boldsymbol{x}_{u^\alpha}}{\partial u^\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{x}_{u^\gamma}+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}, & \alpha,\beta=1,2,\\[2mm] \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^\alpha}=-b^\beta_\alpha\boldsymbol{x}_{u^\beta}, & \alpha=1,2.\end{array}\right. \tag{1.3.1}$$

上式中采用了 Einstein 求和约定. 所谓 Einstein 求和约定, 是指在一个单项式中, 若一个指标作为上标和下标各出现一次, 则这个单项式代表关于该指标求和. 引入这样的约定仅仅是使符号简化. 方程 (1.3.1) 称为曲面 $\mathcal{S}$ 的自然标架 $\{\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{n}\}$ 的*运动方程*, 其中, 系数 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 是曲面的 Christoffel 符号, 它们可表示为

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}\left(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}\right), \tag{1.3.2}$$

系数 $b^\beta_\alpha=b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}$ 是 Weingarten 变换在基 $\{\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v\}$ 下的矩阵 S 的元素 (见 (1.2.2)). Christoffel 符号与第一基本形式之间有如下关系[3]232:

$$\left\{\begin{array}{l}\Gamma^1_{11}g_{11}+\Gamma^2_{11}g_{12}=g_{111}=\dfrac{1}{2}(g_{11})_u,\\[2mm] \Gamma^1_{11}g_{12}+\Gamma^2_{11}g_{22}=g_{211}=(g_{12})_u-\dfrac{1}{2}(g_{11})_v,\end{array}\right. \tag{1.3.3}$$