

LF VLF ELF Wave Propagation

长波超长波 极长波传播

潘威炎 著



电子科技大学出版社

[Http://www.uestcp.com.cn](http://www.uestcp.com.cn)

长波超长波极长波传播

潘威炎 著

电子科技大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

长波超长波极长波传播/潘威炎著. —成都: 电子科技大学出版社, 2004.12

ISBN 7-81094-720-6

I. 长... II. 潘... III. ① 长波传播 ② 超长波传播
③ 极长波传播 IV. TN011

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 125205 号

内 容 提 要

本书是一本系统地、定量地阐述长波超长波极长波传播理论的专著, 内容包括长波沿不均匀球形地面传播、超长波和极长波在低电离层波导中的传播、侧面波与表面波传播等。本书的读者对象为电波传播专业工作人员, 从事低频、甚低频、极低频无线电工程的技术人员, 高等院校无线电物理和电磁场理论与微波技术专业的研究生, 海军通信、导航专业的技术干部。有兴趣的大学本科高年级学生也可以参考。

长波超长波极长波传播

潘威炎 著

出 版	电子科技大学出版社 (成都市建设北路二段四号, 邮编: 610054)
责任编辑	张 勋
特约编辑	张红旗
发 行	电子科技大学出版社
印 刷	电子科技大学出版社印刷厂
开 本	787×1092 1/16 印张 32.5 字数 790 千字
版 次	2004 年 11 月第一版
印 次	2004 年 11 月第一次印刷
书 号	ISBN 7-81094-720-6/TN · 14
定 价	58.00 元

序 言

长波(30~300kHz)、超长波(3~30kHz)、极长波(30~3000Hz)是一个很宽广的频段,同时也是一个极具特色的波段。这一波段传播的最大特点是传播特性稳定,传输衰减较小,可以在全球的范围进行传播,也可以以较小的损耗深入海水和地下。虽然它的传输带宽较窄,天线和设备体积相对较大,限制了它的应用范围,但是在远距离通信、导航、标准时间和频率发布等方面,具有不可替代的广泛应用。特别是对水下潜艇的通信,几乎是唯一的选择。研究这一波段的传输特性,给出各种相位修正数据和资料,具有极其重要的理论价值和实用价值。

长波、超长波和极长波主要是在电离层和地球表面形成的同心球壳空间传播。由于它的波长范围很宽,相对于这个球壳空间的特性尺度的比值也变化很大,这就产生了许多不同的传播模式,出现了许多诱人的传播现象。无论从理论上还是从实验上,研究工作都具有非常丰富的内容。人们很早就注意研究长波、超长波和极长波的传播特性,获得了许多有价值的进展。但是这一领域的传播研究,涉及大量复杂的数学问题,研究起来难度很大。随着应用的不断深入,新的问题也不断出现,所以其研究工作持续不断地得到发展。它既是一个比较经典的问题,又是一个不断发展的研究领域。

中国电波传播研究所很早就开展了长波、超长波和极长波传播的研究,出了许多成果,培养了一批人才。潘威炎同志就是其中最优秀的一位。早在20世纪60年代初期,他还是我国电磁理论和微波技术的泰斗之一林为干院士的研究生的时候,他就开始了这方面的研究。近40年来,潘威炎同志始终坚持在这一领域艰苦的耕耘、锲而不舍的探索,获得了喜人的成果。

他这本新作,总结了他多年来的主要研究成果。全书共分12章,覆盖了长波、超长波和极长波传播的主要方面,理论严密,数据准确。除了理论推导外,还附有必要的实际测试结果。本书中的内容,主要是他个人数十年来的研究所得,当然也包括一些世界上其他名家的内容。在他条理明晰、逻辑严密的梳理下,形成了一个严谨的科学体系,是一本电波传播领域不可多得的好书。本书的出版,是电波传播界的一件盛事。

我和潘威炎同志共事多年,虽然没有参加过这一波段的研究工作,但是对潘威炎同志的工作情况是有所了解的。我经常为他的刻苦钻研精神所折服,也为他所获得的进展而高兴。在他的著作即将出版的时候,很愿意写几句话,表示对他所获得成绩的祝贺。



2003年6月于北京

前 言

低频 (30kHz~300kHz, 也称长波)、甚低频 (3kHz~30kHz, 也称超长波)、极低频 (30Hz~3kHz, 也称极长波) 电波是无线电频谱中极具特点的频段。在此频段, 电波波长比较长, 信号的传播损耗小, 信号的幅度与相位稳定, 并能渗透入一定深度的土壤和海水, 能被水下或地下的接收设备接收, 所以广泛应用于授时、导航、军用通信, 特别是对潜艇通信和导航, 在军事上具有其他频段的电波无法替代的作用。

此频段的电波在地面附近的传播机理和方式也有别于频率比它高的短波、超短波和微波波段传播。其主要的传播方式有: 沿地面的绕射传播、沿地面与电离层的波导传播、在地面与电离层之间的“波跳”传播以及沿地面的“侧面波”传播等方式。从 20 世纪 60 至 70 年代开始, 随着美国和俄罗斯着手研究和建设低频、甚低频、极低频导航与通信系统, 此频段的电波传播研究工作也取得了显著发展, 逐步建立起较完善的甚低频和极低频波导传播理论, 长波天波绕射理论, 侧面波传播理论, 并积累了较多的资料。在无线电工程建设与研制过程中, 电波传播规律和资料是拟定合理的总体设计方案不可缺少的理论依据。在这些无线电系统建成后, 仍需要深入研究电波传播规律, 进一步了解电波传播在各种地域、时域、频域范围内的变化规律及其预测技术, 从而提高这些无线电工程的使用性能和精度。20 世纪 60 年代至今, 美国和俄罗斯一直花费很多资金从事低频、甚低频、极低频传播研究。

1965 年, 我国在原国防科工委第十研究院第二十二研究所 (现中国电波传播研究所) 建立了一个长波超长波传播研究室, 开始从事此频段的电波传播研究工作。作者 1966 年初研究生毕业后一直在电波所从事此频段的电波传播研究。四十年来, 作者及其同事和学生们在此领域内已做了不少具有自己特色的理论研究和实验研究, 其中部分研究成果已在国内外有关刊物上公开发表, 更多的是以内部资料方式在本单位存档。为了系统地总结我国在此领域内的研究成果, 使后继者有一个新起点, 以及便于广大的工程技术人员能更好地掌握此频段的传播规律, 作者在单位领导和同事们的支持和鼓励下, 编纂了这本专著。其中内容大部分是作者及其指导的研究生所作的工作, 也包括一部分本单位同事们的工作, 为了使本书内容有较好的系统性, 也引用了部分国外作者的工作。

在理论研究方法上, 本书作者更多地追求获得具有明确的物理意义、表达式简单同时又有足够精度的解析表达式, 而不希望使用纯粹的数值解。首先将实际的电波传播问题加以合理的简化, 建立一个理想化的物理模型, 把一个实际问题转化为寻找一个满足特定边界条件的 Maxwell 方程解的数学问题, 然后灵活地应用数学物理方法范畴内的各种数学工具, 获得最终的表达式并计算出数值的结果。

本书的主要读者对象为电波传播专业工作者, 从事低频、甚低频、极低频无线电工程的工程技术人员, 高等院校电磁场理论和微波技术专业的研究生, 海军通信、导航专业的

技术干部。有兴趣的大学本科高年级同学也可参考。

这里我将衷心地感谢我的导师林为干院士，是林老师将我引入了科学殿堂。老师渊博的学识、严谨的治学态度以及无私奉献和不断进取的精神永远是作者学习的榜样和追求的目标。作者也衷心感谢中国电子学会前副理事长、电波所前所长沙踪研究员和原电波所副所长熊皓研究员几十年来对作者工作上的关心和支持；感谢张红旗博士为本书的出版付出的辛勤劳动；感谢中国电波传播研究所和电波环境特性及模化技术国家重点实验室对作者工作上的关心与支持。

潘威炎
2004 年于青岛

目 录

第 1 章 电磁理论准备	1
1.1 自由空间中电磁场的基本定律	1
1.1.1 静止电荷与静电场	1
1.1.2 恒定电流与静磁场	3
1.1.3 时变磁场激发的电场——法拉第 (Faraday) 电磁感应定律	5
1.1.4 时变电场激发的磁场——位移电流的假设	5
1.1.5 麦克斯韦 (Maxwell) 方程组与洛伦兹 (Lorentz) 力公式	6
1.2 物质中的宏观电磁场	7
1.2.1 物质的极化	7
1.2.2 物质的磁化	9
1.2.3 导电物质中的传导电流	10
1.2.4 物质中的麦克斯韦方程组	11
1.2.5 媒质分界面上场的边值关系	12
1.3 平面波在两种均匀各向同性媒质分界面的反射与透射	14
1.3.1 均匀各向同性媒质中的平面波	14
1.3.2 平面波在两种均匀各向同性媒质分界面的反射和折射	15
1.3.3 布儒斯特角和无反射	18
1.3.4 全反射与临界角	18
1.3.5 反射系数	19
1.4 成层地面和电离层对低频电磁波的反射特性和表面阻抗	21
1.4.1 地面对低频电磁波的近似边界条件以及表面阻抗	21
1.4.2 成层地面对平面电磁波的反射及其表面阻抗	22
1.4.3 电离层的电参量和低电离层的电子浓度与碰撞频率的高度分布	27
1.4.4 低电离层对低频水平极化波的反射和它的表面导纳	30
1.4.5 电离层对垂直极化波的反射和它的表面阻抗	34
1.4.6 渐变电离层中表面阻抗所满足的微分方程	37
第 2 章 均匀半空间的垂直和水平电偶极子激起的电磁场	40
2.1 均匀平地上垂直电偶极子激起的电磁场	40
2.1.1 场分量满足的微分方程	41
2.1.2 柱坐标下 Helmholtz 方程的一般解	42
2.1.3 球面波函数按柱函数展开	43

2.1.4	电磁场的形式解	44
2.1.5	Sommerfeld 型积分的奇点与单值分支	46
2.1.6	侧面波的估值	48
2.1.7	地面对垂直电偶极子辐射方向性图的影响	50
2.2	地下(水下)水平电偶极子在均匀半空间激起的电磁场	53
2.2.1	场分量的傅立叶变换	53
2.2.2	场分量变换 $\tilde{E}_x$ 和 $\tilde{B}_x$ 的求解	55
2.2.3	两个区域中场分量的一般积分表达式	57
2.2.4	场分量的化简	61
2.2.5	讨论和计算	67
附录 A	区域 1 中 $F_{\rho 1}(\rho, \varphi, z+d)$ 的估值	71
附录 B	区域 2 中 $E_{2\rho}(\rho, \varphi, z+d)$ 的估值	75
2.3	地上(海面上)水平电偶极子在地面上激起的电磁场	81
2.3.1	无耗空间一侧电磁场的积分表达式	81
2.3.2	场分量的化简	84
2.4	沿海水和一维各向异性岩层分界面传播的侧面波	93
2.4.1	场分量的积分表达式	94
2.4.2	场分量化简的结果	99
2.4.3	计算与测量的结果比较	101
第三章	沿均匀光滑球形的地面传播的地波	106
3.1	Fock 地波绕射理论	106
3.1.1	球坐标下场方程的一般解	107
3.1.2	格林函数 e^{ikR}/R 按勒让德多项式展开	109
3.1.3	球形地面以上的电磁场的形式解	110
3.1.4	Watson 变换和留数级数解	111
3.1.5	当 ν 和 z 都很大时 $h_v^{(1)}(z)$ 的渐近表达式	113
3.1.6	Fock 的地波绕射计算公式	116
3.2	球形地面地波绕射公式的另一种求法	118
3.2.1	分离变数求解亥姆荷兹方程	118
3.2.2	利用源区边界条件确定系数 A_s	121
3.2.3	地波场强表达式	123
3.2.4	复宗量 Airy 函数的性质及其数值计算方法	124
3.2.5	模方程的根 t_s 的分布	126
3.3	大气折射指数分层不均匀对地波绕射场的影响	128
3.3.1	大气球面分层模型下场分量的一般表达式	129
3.3.2	大气折射指数随高度线性变化时地波绕射场的解	131
3.4	典型的均匀光滑路径条件下地波场强的计算结果	134

3.5 地下水平电偶极子在均匀球形地面产生的侧面波	135
3.5.1 垂直电偶和磁偶极子在均匀球形地面上产生的电磁场	136
3.5.2 地下水平电偶极子在地面上产生的电磁场	140
3.5.3 地下水平电偶极子在地下产生的电磁场	144
3.5.4 计算和讨论	145
第四章 不均匀不平坦地面的地波传播	148
4.1 分段均匀路径的地波传播——J.R.Wait 公式	148
4.1.1 分段均匀的平面地面上的地波传播	148
4.1.2 分界线与传播路径夹角的影响	152
4.1.3 分段均匀的球形地面上的地波传播衰减因子	153
4.1.4 Millington 经验公式	155
4.2 沿分段均匀球形地面传播的地波波模转换	157
4.2.1 均匀光滑地面地波衰减因子的表达式	158
4.2.2 二段均匀光滑地面上地波衰减因子表达式	160
4.2.3 三段均匀光滑地面上空的地波场	163
4.2.4 n 段均匀光滑路径上空的地波场	165
4.2.5 分析和讨论	167
附录 A 矩阵 C^{21} 单元的计算	168
4.3 不规则地面上地波传播衰减函数的积分方程数值解法	169
4.3.1 不规则地面上地波衰减函数满足的积分方程	170
4.3.2 位于地面以上各点接收的场	172
4.3.3 典型条件下计算结果	173
第五章 甚低频波在地-各向同性电离层之间的波导传播理论	175
5.1 平行平面波导	175
5.1.1 平行平面波导的波场结构	175
5.1.2 平面波导中偶极子所建立的场	179
5.2 球面二阶近似	182
5.2.1 球面二阶近似的波型结构	182
5.2.2 垂直电偶极子在波导中所建立的场	188
5.2.3 平面模型与二阶球面近似的适用条件	191
5.3 球面模型的爱里函数描述	193
5.3.1 高度函数的爱里函数近似	193
5.3.2 垂直电偶极子在波导中的辐射场	198
5.3.3 高度函数用爱里函数描述的精度	200
5.3.4 与低阶近似比较	203
5.4 各向同性条件下各阶波型的计算	204

5.4.1	理想的无损耗条件下模方程的根	205
5.4.2	非理想情况下模方程的根	206
5.4.3	表面阻抗的计算	207
5.4.4	各阶模的传播参数以及高度增益函数的计算	208
第六章	地球磁场影响下的电离层的反射特性和阻抗矩阵	209
6.1	地球磁场影响下的电离层介质特性	209
6.2	均匀各向异性介质中传播的寻常波与非寻常波	213
6.3	均匀锐边界电离层的反射系数	216
6.4	电离层的阻抗矩阵以及它满足的微分方程	224
6.5	阻抗矩阵初始值的确定	229
6.6	反射系数与表面阻抗的相互关系	231
6.7	地球曲率对低频电波电离层反射系数计算的影响	233
6.7.1	球面分层模型下电离层中电磁场切向分量满足的微分方程	234
6.7.2	计算结果和讨论	236
第七章	长波天波传播	238
7.1	地面和电离层之间垂直电偶极子所产生的场	238
7.2	天波在照明区的几何光学近似	241
7.3	天波在阴影区的留数级数表示	245
7.4	天波在焦散区的计算	248
7.5	CCIR 推荐的天波传播工程计算方法	249
7.5.1	接收点电场的表达式	249
7.5.2	天波射线到达角 ϕ 和路径长度 L	250
7.5.3	电离层球面弯曲会聚系数	252
7.5.4	地面的反射系数	254
7.5.5	电离层反射系数	254
7.5.6	天线背景因子 (cut back factor)	256
7.6	低频天波幅度与相位的时变特性	260
7.6.1	天波的昼夜季节变化	260
7.6.2	低频脉冲传播与天地波分离	261
第八章	地球磁场影响下的地-电离层波导传播理论	263
8.1	地-电离层波导中电磁场满足的微分方程和边界条件	263
8.2	球面二级近似下, 垂直电偶极子在波导中建立的电磁场	266
8.3	爱里函数近似下, 垂直电偶极子在波导中建立的电磁场	273
8.4	典型条件下各阶模传播参数计算的结果	280

第九章 VLF 电波在不均匀波导中的传播.....	285
9.1 各向同性地-电离层波导中的突变不均匀性.....	285
9.2 地球磁场影响下的地-电离层波导中的突变不均匀性.....	289
9.3 VLF 波场强和相位的昼夜季节变化及昼夜过渡期的模转换干涉现象.....	293
9.4 各向同性地-电离层波导中的渐变不均匀性.....	296
9.5 地球磁场影响下的地-电离层波导中的渐变不均匀性.....	301
9.6 VLF 波场强和相位随距离变化及多模干涉现象.....	306
9.7 VLF 传播相位随机起伏标准偏差以及多模干涉区的相位稳定性.....	309
9.7.1 单模区的传播相位起伏标准偏差.....	309
9.7.2 多模干涉区的传播相位起伏标准偏差.....	310
9.8 有海浪起伏时海水中甚低频电波的传播相位和幅度变化.....	317
9.8.1 海浪波形的模拟.....	317
9.8.2 当电磁波沿水波柱方向传播时水面上的电磁场.....	319
9.8.3 电磁波传播方向与柱方向不相平时水面上的电磁场.....	320
9.8.4 水下电磁场与海面上电磁场的关系.....	324
9.8.5 水下磁场分量的计算.....	326
9.8.6 海浪引起的场强和相位脉动.....	329
9.9 甚低频传播相位的异常变化.....	331
第十章 极低频传播与舒曼谐振.....	333
10.1 垂直电偶极子在均匀各向同性波导中产生的 ELF 场.....	333
10.2 ELF 垂直磁偶极子在均匀各向同性地-电离层波导中激起的电磁场.....	339
10.3 ELF 水平电偶极子在均匀各向同性地-电离层波导中的场.....	343
10.4 ELF 波传播衰减率和相速的计算.....	350
10.5 发射天线附近地面导电率各向异性对天线发射效率及方向性的影响.....	354
10.5.1 地层导电率各向异性时的地面阻抗.....	355
10.5.2 地层导电率各向异性条件下地-电离层波导中传播的 ELF 波 的模方程.....	360
10.5.3 发射天线附近地层导电率各向异性对天线发射效率及方向性 的影响.....	363
10.6 超低频传播与空腔谐振.....	365
第十一章 星载 VLF 发射装置在海面上产生的场.....	369
11.1 电偶极子在均匀无限大电离层中的辐射场.....	370
11.1.1 场的解析表达式.....	370
11.1.2 远区场的渐近表达式.....	374

11.1.3	计算结果及讨论	376
11.1.4	结论	380
11.2	磁偶极子在均匀无限大电离层中的辐射场	381
11.2.1	场的解析表达式	381
11.2.2	远区场的表达式	384
11.2.3	计算结果及讨论	385
11.3	星载的 VLF 磁偶极子在海面上产生的场	389
11.3.1	电磁场的付里叶变换	389
11.3.2	海面上场变换的数值计算结果	392
11.3.3	海面上磁场的准纵近似	395
11.3.4	垂直磁偶极子在海面上产生的场及一些特殊情况	398
11.3.5	结论	400
11.4	星载的 VLF 电偶极子在海面上产生的场	401
11.4.1	在电离层和空气层中电磁场的付里叶变换	402
11.4.2	海面上磁场的准纵近似	404
11.4.3	另外一些特殊情况	406
11.4.4	结论	408
11.5	水平分层不均匀电离层中辐射源在海面上产生的场	409
11.5.1	分析计算	409
11.5.2	海面上场变换的准纵近似	412
11.5.3	电离层中的 VLF 辐射源在海面上产生的场	415
第十二章	沿涂敷介质层的导电基底传播的表面波与侧面波	418
12.1	垂直电偶极子在涂敷介质的导电基底上激励的电磁场	418
12.1.1	场分量的积分表达式	418
12.1.2	理想导电基底情况下极点方程的根	422
12.1.3	理想导电基底情况下场分量的完整表达式	427
12.1.4	理想导电基底情况典型条件下的计算和讨论	431
12.1.5	非理想导电基底情况下极点方程的根	433
12.1.6	非理想导电基底情况下场分量的完整表达式	437
12.1.7	非理想导电基底典型条件下的计算和讨论	441
12.2	水平电偶极子激励的电磁场	443
12.2.1	场分量的积分表达式	444
12.2.2	电型波分量	449
12.2.3	磁型波分量	453
12.2.4	场分量的完整表达式	458
12.2.5	典型条件下的计算和讨论	461
12.3	位于导电基底中的水平电偶极子激励的电磁场	466
12.3.1	场分量的积分表达式	467

12.3.2	电型波分量的估值	470
12.3.3	磁型波分量的估值	477
12.3.4	场分量的完整表达式	482
12.3.5	薄层近似	486
12.3.6	计算和讨论	489
12.4	垂直电偶极子在涂有介质层的球形导电基底上的场	492
12.4.1	大气和介质层中的波场结构	492
12.4.2	利用源区条件确定激励系数 A_s	495
12.4.3	大气层中地波场公式	497
12.4.4	各阶波型传播参数 t_s 随介质层厚度的变化	497
12.4.5	计算与讨论	498
参考文献		501

第1章 电磁理论准备

电磁波在各种条件下的传播规律是宏观电磁场理论的一个重要分支，它的理论基础是经典的电磁场基本定律以及反映这些基本定律的 Maxwell 方程组。为了深入研究电磁波在各种介质条件下的传播规律，以及方便读者阅读，在本书一开始对经典的电磁场定律作一简单回顾。

1.1 自由空间中电磁场的基本定律

自由空间定义为无界真空，当有电荷和电流进入此空间作为场源而存在时，即为自由电荷和自由电流。本节阐述在没有媒质参与情况下，自由电荷与自由电流所激发的电磁场。

1.1.1 静止电荷与静电场

一、电荷间的相互作用力——库仑（Coulomb）实验定律

1785 年，库仑由实验得出：在真空中，两个点电荷（当小带电体间的距离比带电体本身的线度大很多时可视为点电荷）间相互作用的力与两电荷电量的乘积成正比，与电荷间距离的平方成反比，力的方向沿电荷间的连线并按同性相斥异性相吸引向；同时，若干个电荷间的相互作用力符合力的叠加原理。

电荷间相互作用力 F 数学表达式（库仑定律）为

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i q_j \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum q_i q_j \nabla \left(\frac{1}{r_{ij}} \right) \quad (1.1.1)$$

这里 $\mathbf{r}_{ij}$ 为两点电荷 q_i 与 q_j 间的距离矢量；比例常数 ϵ_0 称为真空中的介电常数，具有一定的量纲，其值和量纲取决于所选用的单位系统，本书采用国际单位制， $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 。 4π 以后的场方程中不出现 4π ，属于合理化单位系统。

二、静电场

电荷间相互作用力的存在，揭示了电场的存在，即这种相互作用不是直接的超距作用，

而是通过电场来实现的。每一个电荷在其周围空间中伴随着电场，当另一个电荷处在该场中，就受到场的作用力，实际上它是两个电荷各自电场之间的相互作用，这就是电场的特征性质。

将库仑定律改写为

$$\mathbf{F} = q_i \mathbf{E} \quad (1.1.2)$$

由此，通过试验点电荷 q_i 即可测得另外点电荷（或其组合，或为具有体密度 ρ 的连续分布电荷）所伴随的静电场：

$$\mathbf{E} = \lim_{q_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum q_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(x', y', z')}{r^3} \mathbf{r} dv' \quad (1.1.3)$$

v' 为含源区的空间体积，这里， $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ 。

三、静电场的基本特征

1. 静电场的散度——高斯（Gauss）定理

设 S 为以任一电荷所在点 (x', y', z') 为球心包含所有源电荷 Q 的任一闭合曲面，由式 (1.1.3) 对电场 $\mathbf{E}$ 沿 S 积分可得高斯定理：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q / \epsilon_0$$

其微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1.4)$$

它给出某点电场的散度与该点电荷密度的关系，说明电荷是电场的源，电力线从正电荷发出而终止于负电荷。在 $\rho(x, y, z) = 0$ 的点， $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 即表示该点既无电力线发出，亦无电力线终止，但可以有电力线连续通过。

2. 静电场的旋度

由库仑定律，可得点电荷 q 的电场沿闭合回路 L 的环量，由矢量场的斯托克斯（Stokes）定理和旋度定义得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_L \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{r^3} = 0$$

因而

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.5)$$

旋度所反映的是场的环流性质，从物理直观图像可看出，静电场的力线无旋涡状结构。

3. 静电场和标量势（位）

由矢量分析，一个无旋场必定是一个标量场的梯度场，故从式 (1.1.5) 可知静电场应为某势函数的梯度。实际上，由式 (1.1.3) 有

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \rho(x', y', z') \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dv' = -\nabla \varphi \quad (1.1.6)$$

即得静电场的势函数：

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{r} dv' \quad (1.1.7)$$

另外, 电位 φ 的物理意义可定义为: 某点电位 φ 为将单位正电荷从该点移至无限远处静电力所做的功。因此场中 A 点的电位为

$$\varphi_A = - \int_{\infty}^A \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{q_2} = \int_{\infty}^A \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_A} \quad (1.1.8)$$

由式 (1.1.6) 可以得出 A 点至 B 点的电位差为

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B \quad (1.1.9)$$

即静电场对移动电荷所做的功只决定于起止位置, 而与路径无关。

1.1.2 恒定电流与静磁场

一、电荷守恒定律和电流连续性方程

定义电流密度矢量 $\mathbf{J}$ 为单位时间通过单位横截面积的电荷, 它是空间坐标的函数, 则通过曲面 S 的总电流强度为

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1.10)$$

当电流是由具有电荷密度 ρ 、平均速度 $\mathbf{v}$ 的运动带电粒子流所形成, 则有

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (1.1.11)$$

由最基本的实验定律——电荷守恒定律, 流出某闭合曲面 S 的电流, 就等于 S 所包围的体积 V 中电荷量的减少。即可得

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (1.1.12)$$

这就是电荷守恒定律的积分形式。由矢量分析中的高斯定理, 将此等式左边的面积分化为体积分, 当假设该体积不动, 可得到其微分形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1.13)$$

此式称为电流的连续性方程。由式 (1.1.12) 和式 (1.1.13) 所表示的电荷守恒定律和电流连续性方程是适用于任意时空变化电荷与电流的普遍定律。

在恒定电流的情况下, 一切物理量不随时间变化, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。因而

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.1.14)$$

即恒定电流不可能存在于孤立的线元上, 只能流过连续的闭合回路。这些情况下, 电荷的空间分布也不随时间变化, 因而恒定电流的电场与静电场性质相同, 仍为有源、无旋场。

二、电流间的相互作用力与磁感应强度——安培（Ampere）实验定律与毕奥-沙伐（Biot-Savart）定律

由安培实验结果, 分别载有恒定电流 I_1 与 I_2 的两个闭合电流回路之间的相互作用力(见图 1.1) 可表示为

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times [I_2 d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (1.1.15)$$

此处 μ_0 为真空中的导磁率, 其量值和量纲由选定的单位系统确定, 本书采用实用单位制(国际单位制), $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。

类似于电场相互作用的概念, 认为电流间的相互作用是通过磁场来实现的, 故由式 (1.1.15) 可令

$$\mathbf{F}_{12} = \oint I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_{12} \quad (1.1.16)$$

$$\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (1.1.17)$$

$\mathbf{B}_{12}$ 即是电流 I_2 在 $d\mathbf{l}_1$ 位置上产生的磁感应强度。

若记 $d\mathbf{l}_1$ 所在位置为 $\mathbf{r}$, $d\mathbf{l}_2$ 所在位置为 $\mathbf{r}'$, 则式 (1.1.17) 可改写为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} \frac{I' d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

对于体密度分布电流则有

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}] dV' \quad (1.1.18)$$

此式即称为 Biot-Savart 定律, 它描述了恒定电流所产生的磁感应强度。

三、静磁场的基本特性

1. 静磁场的旋度

根据实验观测, 载电流导线周围磁场的力线总是围绕导线的闭合曲线, 并且对 $\mathbf{B}$ 沿封闭回路的线积分正比于此闭合回路所包围的电流强度, 即安培环路定理, 其积分形式为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1.19)$$

其微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.1.20)$$

此式表明, 空间某点 $\mathbf{B}$ 的旋度只同该点的电流密度有关; 因而, 电流密度为零的空间中, 磁场总是无旋的。

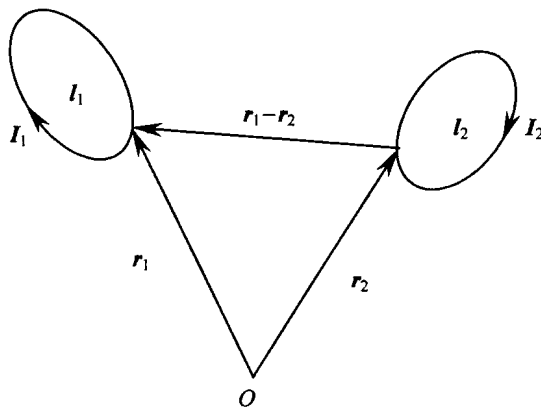


图 1.1 电流源引起的作用力示意图