普通高等教育"十五"国家级规划教材

（高职高专教育）

经济数学基础——线性代数

第二版

张政修　曹承宾　王尚文　编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

经济数学基础——

线性代数

第二版

张政修　曹承宾　王尚文　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，也是教育部高职高专规划教材，根据教育部制订的《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》在原教材基础上修订而成的。原则是"以应用为目的，以必需、够用为度，强化概念，注重应用"。

这次修订基本参照了原教材的内容，根据教学要求，对原有内容作了系统性调整，增选了部分例题及习题。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础——线性代数/张政修，曹承宾，王尚文等编．—2版．—北京：高等教育出版社，2003.4（2004重印）

ISBN 7-04-012406-8

Ⅰ．经…　Ⅱ．①张…②曹…③王…　Ⅲ．①经济数学-高等学校：技术学校-教材②线性代数-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第014110号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	中国农业出版社印刷厂		
		版　　次	1988年9月第1版
开　　本	787×1092　1/16		2003年4月第2版
印　　张	8.75	印　　次	2004年1月第2次印刷
字　　数	200 000	定　　价	9.90元

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19号),提出了“力争经过5年的努力,编写、出版500本左右高职高专教育规划教材”的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用2至3年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用2至3年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神,有关院校和出版社从2000年秋季开始,积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略,抓好重点规划”为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化,基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002年11月30日

第二版前言

本教材自1988年9月第一版印行至今已使用14年了。修订已属必然。

根据教学要求，对教材原有内容的系统性做了调整，本次修订的要点如下：

1. 将克拉默法则由原第四章调至第一章。
2. 充实了n阶行列式概念。
3. 删去原有的关于一般拉普拉斯定理的内容。
4. 在第二章中增加了n元线性方程组的消元解法。
5. 在第三章调换了关于矩阵的秩和极大线性无关组这两节的前后次序。
6. 删去了方程组的简单迭代法。
7. 将第五章从选学变更为必学内容。
8. 第六章列为选学内容，用“*”号标出。

本次修订基本参照了原教材的内容。增选了部分例题及习题。

本次修订由曹承宾执笔，由于本人水平所限，欢迎读者批评，赐教。

编　者

曹承宾

2002年12月

第一版前言

近年来，各种形式的财经类专科学校、职业大学的财经专业、管理干部学院等发展很快，迫切需要经济数学基础教材，为了适应这一要求，我们计划出版一套“经济数学基础”教材，其中包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《线性规划》、《运筹学》等书。可供财经类专科学校、职业大学、管理干部学院选作试用教材或教学参考书。由于时间紧促，书中肯定会有不少缺点、错误，衷心欢迎读者批评指正。

这套教材的主编是崔福荫，副主编是李志煦、戴宗儒、郑郁文、王尚文。

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个重要的基本概念.本章由二、三元线性方程组的解的讨论,引出二阶、三阶行列式的概念,然后推广到 n 阶行列式,并讨论行列式性质和行列式的展开及关于 n 元线性方程组的解的克拉默法则.

§1-1 行列式的概念

一、二阶、三阶行列式

含两个未知量 x_1、x_2 及两个方程的线性方程组的一般式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为系数,$b_i(i=1,2)$称为常数.由加减消元法可得未知量 x_1,x_2 的值的表达式,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.1.2}$$

为便于记住上述表达式,引入二阶行列式概念.

由 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}构成的两行两列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示两项的代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1.3}$$

做出如上规定后,我们称(1.1.3)式左端为二阶行列式.

通常称左上角到右下角的两个数(称为行列式的元素)所在的直线为主对角线;右上角到左下角的两个元素所在的直线为次对角线,其上元素分别称为主元和次元.于是二阶行列式的概念可表达为:主元乘积减次元乘积.

对方程组(1.1.1),称由系数构成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为系数行列式.在 D 中将第 1 列元素,a_{11},a_{21}换成常数项 b_1,b_2.可得二阶行列式 D_1,

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

在 D 中将第 2 列元素 a_{12},a_{22}换成常数项 b_1,b_2,可得二阶行列式 D_2,

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

根据二阶行列式的概念及(1.1.2)式,二元线性方程组的解可表为

$$x_1=\frac{D_1}{D};\quad x_2=\frac{D_2}{D},\text{其中 } D\neq 0. \tag{1.1.4}$$

例 1 用二阶行列式解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=1 \\ -x_1+2x_2=-1 \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=6-2=4\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-3+1=-2$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=0$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{1}{2}$.

含三个未知量三个方程的三元线性方程组的一般式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

规定三行三列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示 6 项的代数和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.6}$$

这时,称(1.1.6)式左端为三阶行列式.其中 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$称为第 i 行第 j 列的元素,i 称为行的标号,简称行标;j 称为列的标号,简称列标.(1.1.6)式右端称为三阶行列式的展开式,其构成方式可按下图(图 1-1)记忆.

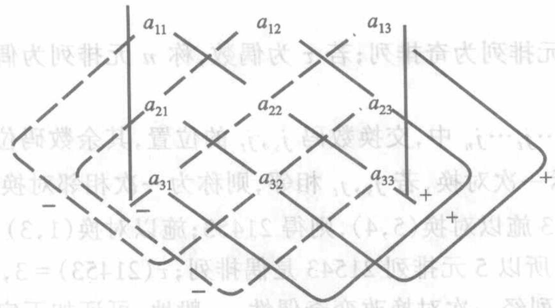

图 1－1

由三元线性方程组(1.1.5)各方程各未知量的系数构成的三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为系数行列式. 用常数项 b_1、b_2、b_3 分别替换 D 中第 1、2、3 列可得如下三个行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

根据加减消元法及三阶行列式的概念，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1.5)的解亦可表为

$$x_1=\frac{D_1}{D};\quad x_2=\frac{D_2}{D};\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.1.7}$$

如上所述，二元、三元线性方程组的解可由二阶，三阶行列式表出，由此推想，关于四元及四元以上线性方程组必产生四阶及四阶以上行列式概念，应如何构造它们的展开式呢？为此，先讨论如下预备知识.

二、n 元排列

1. n 元排列

由 n 个数码 $1,2,3,\cdots,n$ 排成的任一有序数组，称为一个 n 元排列.

如：4132 是一个 4 元排列，

3124 也是一个 4 元排列，

3245 不是 4 元排列，也不是 5 元排列.

由 n 元排列概念可知，n 元排列的总数为 $n!$ 个. 一般地，一个 n 元排列可记为 $j_1,j_2,\cdots,j_n$.

2. 排列的奇偶性

在 n 元排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 中，如果有较大的数码 j_t 排在较小数码 j_s 的左边，则称 j_t 与 j_s 构成一个逆序.

如在 5 元排列 21543 中，2 排在 1 的左边，则 2 与 1 构成一个逆序. 同理 5 与 4，5 与 3 也都构成逆序.

一个 n 元排列中出现的逆序的总数，称为 n 元排列的逆序数，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，简记为 τ.

如 $\tau(21543)=4$.

若 τ 为奇数,称 n 元排列为奇排列;若 τ 为偶数,称 n 元排列为偶排列.

3. 对换

在 n 元排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中,交换数码 j_s,j_t 的位置,其余数码位置不变,称为 n 元排列的一次对换.用 (j_s,j_t) 表示一次对换,若 j_s,j_t 相邻,则称为一次相邻对换.

如对 5 元排列 21543 施以对换(5,4),则得 21453;施以对换(1,3),则得 23541.

由于 $\tau(21543)=4$,所以 5 元排列 21543 是偶排列;$\tau(21453)=3$,所以 5 元排列 21453 是奇排列.由此,推想 n 元排列经一次对换改变奇偶性.一般地,可证如下定理.

[定理 1-1] n 元排列经一次对换改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情况

设 n 元排列表为 $AijB$,经一次相邻对换 (i,j) 得 n 元排列 $AjiB$,且设 ij 为顺序(即 $i<j$).

由于 A、B 中所含数码与 i,j 的相对位置不变,A、B 中所含数码自身相对位置及 A 与 B 中数码相对位置亦不变,故其构成的逆序数码不变,从而,若设 $\tau(AijB)=\tau$,则 $\tau(AjiB)=\tau+1$,即 $AijB$ 化为 $AjiB$ 时奇偶性改变.

再证任意对换的情况

设 n 元排列表为 $Aik_1\cdots k_mjB$,经一次对换 (i,j) 得 n 元排列 $Ajk_1\cdots k_miB$.

将对换 (i,j) 看作 j 向左相邻对换 $m+1$ 次,i 向右相邻对换 m 次而实现,由于共经过 $2m+1$ 次相邻对换,故 n 元排列改变奇偶性.

三、n 阶行列式

如前所述,三阶行列式展开式由 6 项 $a_{11}a_{22}a_{33}$,$a_{12}a_{23}a_{31}$,$a_{13}a_{21}a_{32}$,$-a_{11}a_{23}a_{32}$,$-a_{12}a_{21}a_{33}$,$-a_{13}a_{22}a_{31}$ 的和构成.其规律是:每项由取自记号中既不同行也不同列的元素的连乘积构成.当把连乘积中元素的行标取为 3 元排列 123 时,列标构成的 3 元排列分别为 123,231,312,132,213,321.由于 $\tau(123)=0$,$\tau(231)=2$,$\tau(312)=2$,$\tau(132)=1$,$\tau(213)=1$,$\tau(321)=3$ 对应前三项为正号,后三项为负号,若记列标构成的 3 元排列为 $j_1j_2j_3$,则各项前可认为冠有符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.从而,依此规律可给出 n 阶行列式定义如下.

〈定义 1-1〉

用 n^2 个数 a_{ij},$i,j=1,2,\cdots,n$,构成 n 行 n 列的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示 $n!$ 项的和,每项由取自记号中既不同行也不同列的 n 个数 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 的连乘积构成,每项前冠以符号 $(-1)^{\tau(j_1,j_2\cdots j_n)}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n!} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.1.8}$$

则称(1.1.8)式左端为 n 阶行列式,右端称为 n 阶行列式的展开式.其中

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为展开式的一般项.$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$称为第 i 行第 j 列的元素.$j_1 j_2 \cdots j_n$ 为列标的任一 n 元排列.

例 2 试确定四阶行列式中 $a_{14}a_{32}a_{23}a_{41}$前的符号.

解 将连乘积改写为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$,行标为 1234,列标为 4321,由于 $\tau(4321)=6$,所以此项应取正号.

例 3 计算 n 阶对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(D 中 a_{ij}当 $i=j$ 时 $a_{ii} \neq 0$,当 $i \neq j$ 时 $a_{ij}=0$).

解 乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$,其余 $n!-1$ 项中至少有 1 个元素为零,从而乘积全为零.又 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这项的行标为 $12\cdots n$,列标为 $12\cdots n$,其逆序 $\tau(12\cdots n)=0$,所以,根据行列式的定义知 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.即对角行列式等于主元连乘积.

例 4 计算 n 阶上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(D 中 a_{ij},当 $i<j$ 时,$a_{ij} \neq 0$;当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$).

解 从 1 至 n 行依此取$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$做成连乘积,此项非零,且符号为正,其余 $n!-1$ 项的每一项至少含 1 个零,乘积均为零,所以 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.即上三角行列式等于主元连乘积.

类似地,下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(D 中 a_{ij},当 $i>j$ 时,$a_{ij} \neq 0$;当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$)也等于主元连乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 5　计算 n 阶反对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中 $a_{1n}, a_{2,n-1}, \cdots, a_{n1}$ 不为 0.

解　与上述各例同样的分析过程可知 $n!$ 项中只有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 非零. 此项的行标为 $12\cdots n$;列标为 $n(n-1)\cdots 1$,由于 $\tau(n(n-1)\cdots 1) = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$,根据 n 阶行列式定义,该项前的符号应为 $(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 1)}$,所以

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 6　选择 i, j 的值,使乘积

$$a_{13}a_{2i}a_{34}a_{4j}a_{51}$$

恰为五阶行列式带负号的一项.

解　所给乘积中各元素的行标为 12345,列标为 $3i4j1$,根据 n 阶行列式定义可知应有 $i=2, j=5$ 或 $i=5, j=2$. 而该项前的符号由 $(-1)^{\tau(3i4j1)}$ 确定,若当 $i=2, j=5$ 时,$\tau(32451)$ 为奇数,则 $i=2, j=5$ 符合题意,否则,由对换改变排列的奇偶性,知 $i=5, j=2$ 符合题意.

设 $i=2, j=5$,因为 $\tau(32451)=5$,$(-1)^{\tau(32451)}=-1$,所以 $i=2, j=5$.

在本例中,注意到数的乘法满足交换律,总应有

$$a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51} = a_{51}a_{22}a_{13}a_{34}a_{45}$$

右端列标为 12345;行标为 52134,$\tau(52134)=5$,从而 $(-1)^{\tau(52134)}=-1$. 这表明,在五阶行列式的展开式中,

$$(-1)^{\tau(32451)} a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51}$$

与

$$(-1)^{\tau(52134)} a_{51}a_{22}a_{13}a_{34}a_{45}$$

都是带负号的相同的一项.

事实上,如果将 $a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51}$ 的行标 12345 及列标 32451 表为记号

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

当将列标奇排列 32451 经奇数次对换化为正整数排列 12345 时,行标排列 12345 可由正整数排列化为奇排列 52134,所以总有

$$(-1)^{\tau(32451)} a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51} = (-1)^{\tau(52134)} a_{51}a_{22}a_{13}a_{34}a_{45}$$

按此思路可证明下述定理.

［**定理 1－2**］ n 阶行列式的一般项可表为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为行标的任一 n 元排列.

［**定理 1－3**］ n 阶行列式的一般项可表为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$；$j_1 j_2 \cdots j_n$ 为行标与列标的任一 n 元排列.

§1－2 行列式的性质

性质 1 行列式经转置值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

这里 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式，D^{T} 中第 1 列是 D 的第 1 行，依此，D^{T} 的第 n 列是 D 的第 n 行，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 D 中第 i 行第 j 列元素在 D^{T} 中位于第 j 行第 i 列，根据定理 1－3，D 中一般项

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)+\tau(123\cdots n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

在 D^{T} 中应为

$$(-1)^{\tau(123\cdots n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

其符号相同，故 $D^{\mathrm{T}}=D$.

此性质说明，行列式关于行的性质对列亦成立，所以关于行列式其他性质的证明可仅就行予以证明.

性质 2 交换行列式两行(列)的位置，行列式变号.

证 D 的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}$ 行标为 $12\cdots i\cdots t\cdots n$；列标为 $j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_t \cdots j_n$.

若交换 i,t 两行，所得行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_t \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

由于 $j_1 j_2 \cdots j_t \cdots j_i \cdots j_n$ 是 $j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_t \cdots j_n$ 经一次对换 (j_i, j_t) 所得，奇偶性相反，故两项符号相反. 于是 D 中一项总与绝对值相等而符号相反的一项相对应，所以交换行列式两行的位置行列式变号.

若行列式有两行(列)元素对应相同，交换这两行(列)所得行列式与原行列式相同，由性质 2，将有

$$D=-D$$

从而必有 $D=0$. 于是可得推论：

〈**推论**〉 若行列式 D 有两行(列)元素对应相同,则 $D=0$.

性质 3 若行列式某行(列)元素有公因子 k,则 k 可以提到行列式外,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD$$

证 由 n 阶行列式定义,有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

此性质亦可表为:数 k 乘行列式等于乘某行(列)的所有元素.

此性质还有如下推论.

〈**推论**〉 若行列式有两行(列)对应元素成比例,则行列式等于零.

事实上,若设两行对应元素的比例系数为 k,当根据性质 3,提出公因子 k 后,有两行对应元素相同,由性质 2 的推论,知行列式为零,而零与 k 的乘积亦为零.

性质 4 若行列式 D 的某行(列)元素都是两个数的和,则 D 可表为两个行列式 D_1 与 D_2 之和,D_1 中该行为 D 中该行元素的第 1 个数,其余各行仍为 D 中各行元素;D_2 中该行为 D 中该行元素的第 2 个数,其余各行仍为 D 中各行元素.即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_1 & a_{i2}+b_2 & \cdots & a_{in}+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=D_1+D_2$$

证 由 n 阶行列式定义,知

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{ij_i}+b_i)\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_i\cdots a_{nj_n} \\ &= D_1+D_2 \end{aligned}$$

性质 5 行列式某行(列)的全部元素都乘以同一个数 k 加到另一行对应元素,行列式值不变.

证 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

用 k 乘第 j 行的全部元素加到第 i 行对应元素,得行列式 D_1,对 D_1 用性质 4 及性质 3 的推论,有

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= D+0 \\ &= D \end{aligned}$$

应用行列式的性质,特别是性质 5,使高阶行列式的计算大为简化.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

解 注意到第 3 列各元素是第 2 列对应元素的 4 倍,即 2、3 两列对应元素成比例,由性质 3 的推论知

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}=0$$

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}\begin{matrix} \times 2 \quad \times(-3) \quad \times(-2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \times 2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \times(-1) \end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \times 17 \\ \\ \end{matrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot(-13)\cdot(-1)\cdot(-24)$$

$$=312$$

应用性质 5,化行列式为三角形行列式,然后根据三角形行列式的值的结论求得行列式值,这是常用的计算方法.