

21世纪数量经济学方法论与应用丛书

丛书主编 张晓峒

季节时间序列 理论与应用

杜勇宏 王健 著 张晓峒 主审

THEORY AND APPLICATION WITH
SEASONAL TIME SERIES

南开大学出版社

21 世纪数量经济学方法论与应用丛书

季节时间序列理论与应用

杜勇宏 王健 著

南开大学出版社

南开大学出版社

天津

图书在版编目(CIP)数据

季节时间序列理论与应用 / 杜勇宏, 王健著. — 天津:
南开大学出版社, 2008. 6

(21 世纪数量经济学方法论与应用丛书)

ISBN 978-7-310-02930-3

I. 季… II. ①杜…②王… III. 时间序列分析 IV. F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 070514 号

版权所有 侵权必究

南开大学出版社出版发行

出版人: 肖占鹏

地址: 天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码: 300071

营销部电话: (022)23508339 23500755

营销部传真: (022)23508542 邮购部电话: (022)23502200

*

天津泰宇印务有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 16 开本 14.875 印张 375 千字

定价: 30.00 元

如遇图书印装质量问题, 请与本社营销部联系调换, 电话: (022)23507125

南开大学出版社

天津

国家社会科学基金项目

非经典计量经济学理论方法研究

(2003 年度一般项目, 批准号 03BJY014)

总 序

改革开放 20 多年来,数量经济学在我国迅速发展起来,并在研究实际经济问题中得到广泛应用。国家信息中心、中国社会科学院、教育部的重点科研基地中都设有数量经济学的专门研究机构。1998 年 7 月教育部高等学校经济学学科教学指导委员会首次将计量经济学列入经济类各专业本科生的课程,时至今日大多数学校的经济类各专业硕士生和博士生都把计量经济学列为必修和必选课程。随着我国经济体制从社会主义计划经济向社会主义市场经济的全面转变,数量经济学在研究经济问题中必然发挥越来越大的作用。采用定性与定量相结合的方法研究经济问题是今后的必然趋势。

客观地认识与科学地表述经济规律是历代经济学与计量经济学工作者的奋斗目标。然而经济活动的多因素性、随机波动性、事件发生的不可逆性以及时间序列的非平稳性一直影响着经济学的科学化进程。经济学与自然科学的一个最大不同点就是无法创造出其他因素不变的理想经济环境。自然科学中的变量常遵循函数关系,但对于经济问题却没有函数关系可言,只能建立统计模型。随着计量经济学的诞生,人们借助数学、统计学知识分析和预测经济问题。虽然这只有几十年的时间,却超过了经济学数百年积累起来的文字分析水平。最近几年,诺贝尔经济学奖的获得者中大部分都是因研究计量经济学或用计量经济学方法研究实际经济问题取得重大突破而获奖的。

自 20 世纪 70 年代至今是数量经济学在世界范围内大发展的时期,如在时间序列模型,离散选择模型,动态参数模型,状态空间模型,单整、协整、分整理论,面板数据应用,非参数估计,结构突变分析,非平稳季节时间序列的处理,广义矩法,金融计量分析,蒙特卡罗模型,自举模拟,分形理论,灰色系统,包络分析,遗传算法,神经网络分析等领域都取得了丰硕的研究成果。

目前数量经济学在我国的研究与应用和世界水平相比还存在着一定差距,还需要我国的数量经济学工作者努力奋斗、扎实工作,进一步深入、扩大国际间的学术交流,缩小与世界计量经济学水平的差距,并最终赶上世界计量经济学水平。

为了把国外的研究成果尽快介绍到国内来,为了更快地普及数量经济理论与方法并应用于实际经济问题的分析,为进一步提高我国数量经济学的学术水平,我们撰写、编辑了这套数量经济学丛书。编委会计划推出 10 本著作,它们是:《非参数计量经济学》,《宏观计量的若干前沿理论与应用》,《协整理论与应用》,《经济数量分析》,《可计算一般均衡模型——理论、方法与应用》,《中级计量经济学》和《EViews 使用指南》,《STATA 在统计与计量分析中的应用》,《季节时间序列理论与应用》,《面板数据的计量经济分析》。其中有些著作偏重于理论和方法的介绍,有些偏重于实际应用,通过案例向读者展示怎样在经济问题的分析中应用这些知识,还有一些著作是学习计量经济学的基本用书。这些著作的共同特点是知识结构新,反映计量经济学中某一方面的最新发展状况,并包含作者自己的研究成果。今后随着时间的推移,我们还将进一步推出更多、更好的有代表性的学术著作。

希望这套丛书能够为从事实际经济问题研究, 计量经济学理论研究, 数量经济学教学、学习的读者在掌握数量经济学理论与方法方面有所帮助。

读者对这套丛书有什么意见，可以随时反映给我们。书中若有不妥或错误之处，敬请广大读者批评指正。

张晓峒

2007 年 10 月

电子邮箱: nkeviews@yahoo.com.cn

前 言

经济指标是由一系列具有不同周期的、不可直接观测的要素（诸如长期趋势要素、循环要素、季节变动要素和不规则要素等等）组成。自 19 世纪以来，经济学家对时间序列中所包含的季节性进行专门的分析。季节性是一个系统的但不必是不变的或完全规则的年度内的运动，它是由气候变动、宗教节日、商业实践及预期等各种原因引起的年度内的周期性变动。季节性包含有反映序列自身短周期波动信息以及序列之间关系的信息，是整个经济系统的有机组成部分，它的作用是不容忽视的。尽管季节时间序列早已成为计量经济学的一个重要分支和研究主题，但是在我国对它的研究和应用还相对滞后。而经济和金融的许多理论和现实问题又对季节性时间序列分析提出了迫切的要求。如果本书的出版能为推动和促进季节时间序列理论和应用在我国深入发展尽一点绵薄之力，我们将感到欣慰。

本书是国内第一本系统地对季节时间序列进行介绍和研究的专著。全书共分为七章。第一章首先展示了时间序列中季节特征的多样性以及不同的季节模型，回顾了季节时间序列理论的发展历程。在随后各章中，对各种季节模型进行了详尽的介绍。其中，第二章介绍了 SARIMA 模型；第三章介绍了季节模式的常用检验方法；第四章介绍了季节调整方法的原理；第五章介绍了多变量季节模型；第六章介绍了周期性过程；第七章介绍了非线性季节模型。在介绍基本理论时，本书给出了一些应用案例。本书是适用于经济、管理类教师、研究者和研究生的参考读物，要求读者有时间序列分析的基础。

本书的前身是作者在南开大学张晓峒教授主持的国家社会科学基金项目《非经典计量经济学的理论方法研究》中的子项目《季节性时间序列的单整与协整分析》的总结。我们在阅读现行大量季节时间序列文献的基础上，对其进行了整合。这项工作并非一件轻松的事情，我们虽然为此付出了艰苦的努力，但是由于水平有限，书中难免仍可能存在理解不准确甚至错误的地方，对此应由作者负责，我们恳请读者批评指正。

全书大量引用了许多著名计量经济学家和学者的研究成果，也正是这些研究成果构成了本书的精华。对此，谨表由衷的感谢和敬意！作者特别感谢张晓峒教授，正是他的指导，本书才得以成稿。在写作过程中，作者还得到栾惠德博士的帮助，对此一并表示感谢。

杜勇宏 王 健
2007 年 2 月于天津

目 录

第一章 总 论	1
第一节 季节时间序列的多样性	1
第二节 季节时间序列模型	5
一、季节 ARIMA 过程	5
二、周期性过程	7
三、非线性季节模型	8
第三节 季节性时间序列理论发展概览	10
一、早期观点	10
二、季节调整理论	11
三、最新观点及研究前沿	12
第二章 季节 ARIMA 模型	15
第一节 基本概念	15
第二节 季节 ARIMA 模型的类别	17
一、自回归移动平均乘积性季节模型	18
二、确定性季节时间序列	22
三、季节性单整过程	26
第三节 非平稳性的误设定	31
一、趋势平稳 (TS) 与差分平稳 (DS)	31
二、确定性季节性与季节性单整	37
第四节 季节 ARIMA 模型的建立与预测	43
一、数据的平稳性检验	43
二、SARMA 模型的识别、估计和检验	44
三、预测	47
第五节 案例：美国国际航空公司旅客客票数的乘积模型和组合模型	48
第三章 季节模式的假设检验	53
第一节 确定性季节性的假设检验	53
一、Canova-Hansen 检验	53
二、Caner 检验	57
三、Tam-Reinsel 检验	58
四、一些评论	60
第二节 季节单整的检验	61
一、Dickey-Hasza-Fuller 检验	61
二、HEGY 检验	63

三、Kunst 检验	71
四、Osborn-Chui-Smith-Birchenhall 检验	72
五、一些评论	73
第三节 扩展	75
一、附加动态项	75
二、确定项	76
三、高阶非平稳性	78
四、复合检验及显著性水平	79
五、一些实证研究结果	80
第四节 案例：我国进出口总额的季节模式	81
一、平稳季节模式的检验	81
二、季节单位根检验	86
第四章 季节调整技术原理	91
第一节 构成因素的分解	91
第二节 X-12-ARIMA	92
一、X-11 程序	93
二、RegARIMA 建模与诊断	101
第三节 TRAMO/SEATS 程序	104
一、SEATS 方法的基本原理	104
二、与 X-11 的比较	107
第四节 季节调整对单位根检验的影响	108
一、数据生成过程为单位根过程	109
二、数据生成过程为平稳 ARMA 过程	110
第五节 与其他数据变换的关系	112
第六节 案例	116
案例 1：中美进出口总额的季节调整	116
案例 2：基于调整和未调整序列的单位根检验	119
第五章 多变量季节模型	121
第一节 单方程季节模型	121
一、季节调整对回归效果的影响	122
二、季节虚假回归	125
第二节 季节向量 ARIMA 模型	131
一、季节向量 ARMA 的性质	131
二、季节向量 ARIMA 模型的建立	133
三、扩展	135
第三节 季节协整与误差修正模型	137
一、单一方程季节协整方法	137
二、向量季节协整方法	140
三、扩展	142
第四节 案例：中国进出口贸易的误差修正模型	144

第六章 周期性 ARIMA 过程	151
第一节 周期性过程的类别和性质	151
一、周期性过程的定义与分类	151
二、PAR 过程的性质	155
第二节 非平稳的 PAR 过程	160
一、PAR 过程的单整类型	160
二、PAR 过程的单整性检验	163
第三节 周期性协整	170
一、周期性协整的定义	170
二、周期协整的检验	172
第四节 案例: 理性预期下生命周期持久收入假说的检验	179
一、REPIH 的(季节)检验方法	179
二、中国消费行为的 REPIH 检验结果	180
第七章 非线性季节模型	183
第一节 季节 GARCH 模型	183
一、季节 GARCH 类模型的定义和性质	184
二、检验和估计	187
第二节 随机系数季节自回归过程	189
一、随机系数 ARIMA 模型的性质	189
二、检验和估计	192
第三节 周期马尔可夫开关模型	195
一、周期马尔可夫开关模型的定义和性质	195
二、估计和检验	199
参考文献	202
附表 1 t 分布百分位数表	219
附表 2 χ^2 分布百分位数表	220
附表 3 F 分布百分位数表	221
附表 4 VM 分布百分位数表	222
附表 5 DHF 分布百分位数表	222
附表 6 季节单位根检验临界值表	223
附表 7 Kunst 分布百分位数表	223
附表 8 季节协整检验临界值表	224

第一章 总论

时间序列就是将某一个指标在不同时间上的不同数值,按照时间的先后顺序排列而成的数列。这种数列由于受到各种偶然因素的影响,往往表现出某种随机性,同时彼此之间存在着统计上的依赖关系。例如,从1980年到2006年我国的国内生产总值GDP和消费价格指数CPI就分别构成了两个不同的时间序列。在金融市场方面,上证指数和深圳指数在过去十五年内每个交易日甚至每分钟的指数水平也构成一个时间序列。事实上,宏观经济学、国际经济学和金融学里绝大多数的实证研究都是建立在时间序列分析的基础上的。在国外,大部分经济时间序列都是月度或季度数据。近年来,我国也开始公开发布月度和季度数据。这些经济时间序列的变化常常表现出某种程度的年度内的周期性规律。比如:每逢五月和十月(“黄金周”期间),我国的铁路客运量、旅游业的收入等都出现一个高峰。再如:深圳成分指数的日收益率具有某种程度的“日历效应”,在星期二出现一个高峰,在星期五出现低谷。我们将数据中所呈现出的这种在经过一定的时间间隔后(通常是一年以内)的相似性,称为具有季节(周期)性。相应地,称这样的时间序列为季节性时间序列。通过研究时间序列的季节(周期)性,我们能够更好地分析影响时间序列的因素以及时间序列之间的关系。

第一节 季节时间序列的多样性

在科技领域中,对周期现象的理解包含两个特征,即等间隔性和可重复性,在数学上用函数表示为 $f(x)=f(x+T)$,其中 T 为周期长度。有的文献中将季节变动因素描述为在固定间距(如年、季或周、日)中自我循环,是一个以 T 为周期的确定的周期性因素,它可以用哑变量形式来刻画。然而,采用这样一个定义将导致实际中的经济时间序列中大部分季节性问题不可解决。我们将给出几个经济中常见的时间序列的例子,从而对经济时间序列中的季节性有一个直观的了解。通过这几个例子,我们看到经济时间序列中的季节性有着极为不同的表现形式。

图1.1是中国1990年至2005年进口额和出口额的月增长率曲线。左边两图是原始数据,时间序列数据表现出极强的周期性和季节性,在每年的一月份是进出口贸易的淡季,从而形成一个低谷,每年的十二月份是进出口贸易的旺季,形成了一个高峰,甚至超过了非季节性因素对它的影响;并且,进出口月增长率的波动幅度随着时间的推移都呈现出逐渐减小的趋势。这说明,在这一时期我国进出口贸易受季节性因素的影响越来越小,这可能是因为这一时期我国进出口贸易的科技含量不断提高使然。右边两图是经过季节调整后的数据——剔除季节性影响,只留下非季节性影响。从右边两图还可以看出,非季节性因素对进口和出口的月增长率的影响程度是不同的。非季节性因素对进口月增长率的影响更大一些,考虑到上下图的刻度不同,事实上它们的峰值相差是很大的。

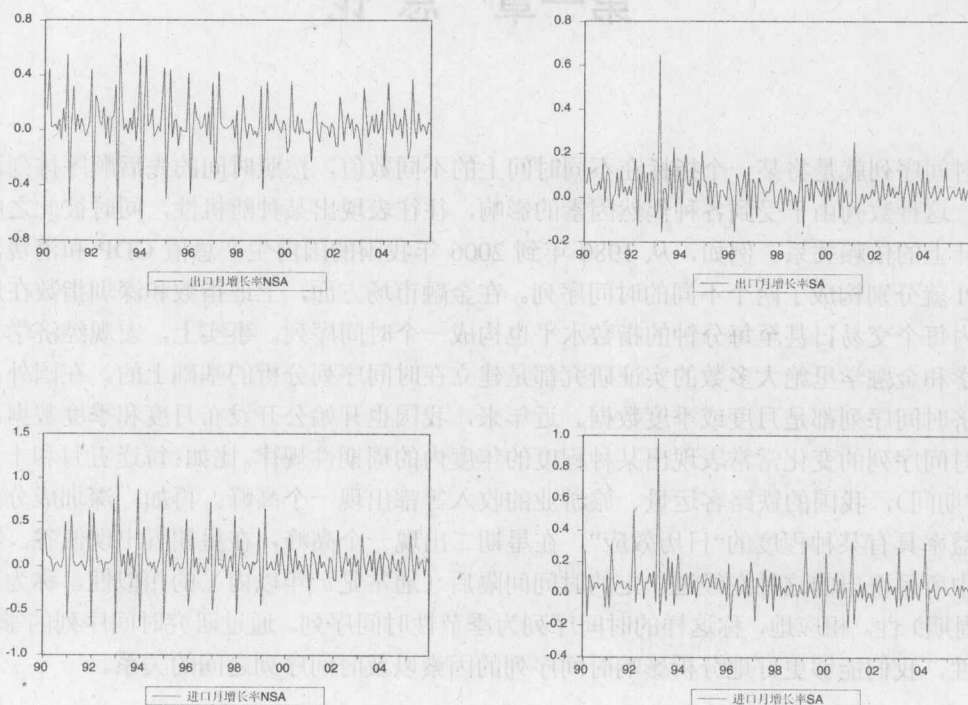


图 1.1 我国进出口月增长率曲线 (1990~2005)

将每个季度的数据分别用一条曲线来表示是用来研究时间序列季节性行为的一个简便而直观的工具。图 1.2 中左边两图是我国 1995 年第一季度至 2004 年第四季度的国内生产总值 GDP 季度增长率。在这个例子中可以看出，GDP 的季度增长率非常有规律性。其中，左上图是一个标准的时间序列，左下图是不同年份份季度的 GDP 季度增长率曲线。可以看出，季节曲线互不相交，趋于平行。除了季节性影响外，从中我们看不出任何受经济周期影响的迹象。这说明，在这一时期，我国国民经济的发展持续、稳定。图 1.2 中右边两图是我国 1990 年第一季度至 2005 年第四季度的货币供应量 M1 的季度增长率。在这个例子中可以看出，货币供应量 M1 的季度增长率同样具有很强的季节性，但它的波动显然是不平稳的，各个季度的增长率曲线交织在一起。这说明，在这一时期，我国货币政策具有某种程度的季节性，可能的原因是，虽然影响货币供应量 M1 的因素很多，但这一时期我国是根据宏观经济的发展态势不断调整的，而这一时期恰逢我国宏观经济持续稳定。

图 1.3 的上面两个图表示的是深圳成分指数 2002 年 1 月 1 日至 2003 年 7 月 31 日的日回报率以及日回报率的平方，中间的两幅图分别是它们的月份平均数，下面的两幅图分别是它们按照周一到周五的星期平均数。从图中可以观察到，不论是均值还是波动幅度它们在每年中不同的月份及每星期不同的星期几都有明显的区别。也就是说，存在我们常说的日历效应。

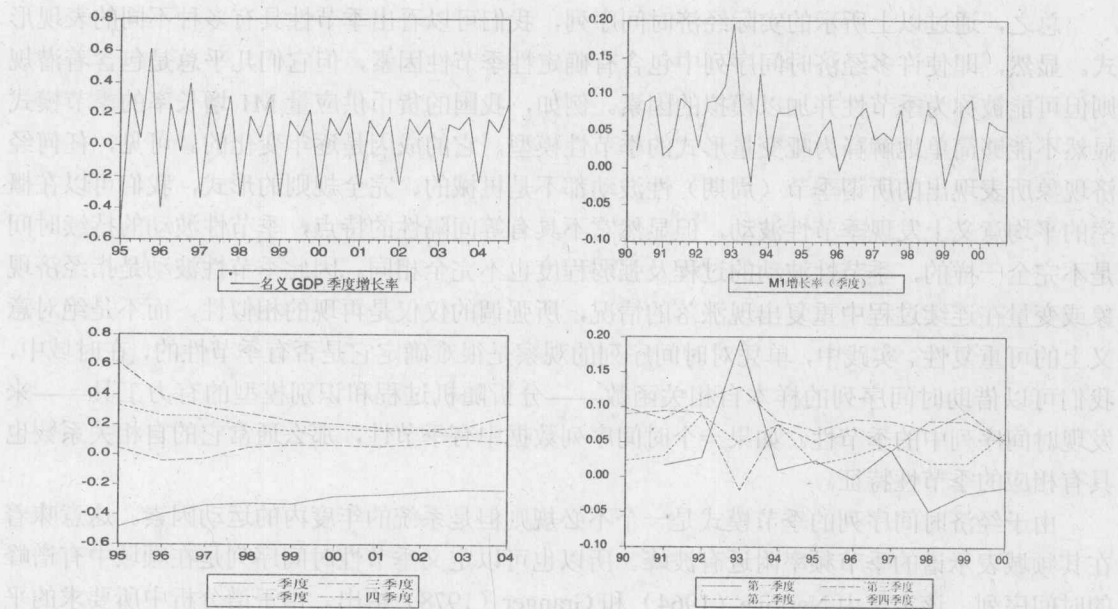


图 1.2 我国 GDP 及 M1 的季度增长率

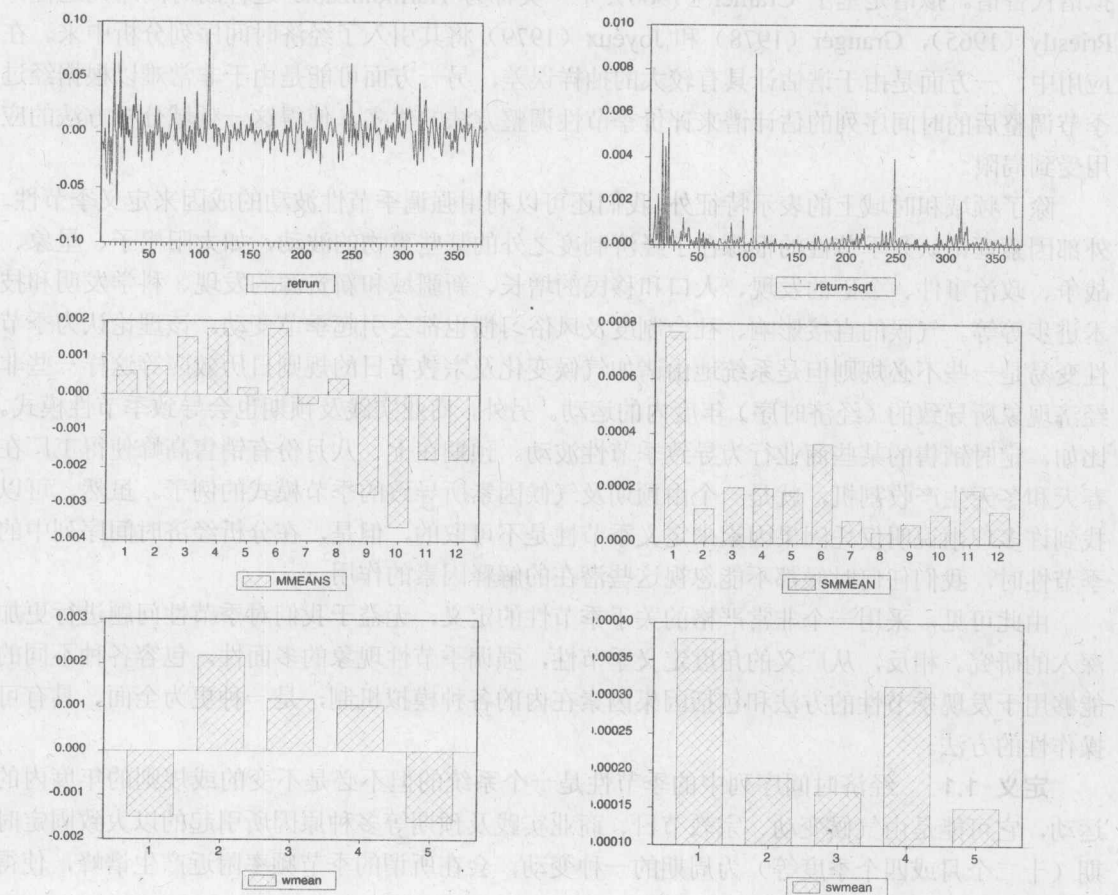


图 1.3 深圳成分指数的日回报率以及日回报率的平方 (2002.1.1~2003.7.31)

总之,通过以上所示的实际经济时间序列,我们可以看出季节性具有多种不同的表现形式。显然,即使许多经济时间序列中包含有确定性季节性因素,但它们几乎总是包含着潜规则但可能被称为季节性并加以模拟的因素。例如,我国的货币供应量 M1 增长率的季节模式显然不能够简单地解释为哑变量形式的季节性模型,它的成因是逐年变化的。可见,任何经济现象所表现出的所谓季节(周期)性波动都不是机械的、完全规则的形式,我们可以在概率的平均意义上发现季节性波动,但显然它不具有等间隔性的特点,季节性波动的持续时间是不完全一样的,季节性波动的过程及强弱程度也不完全相同。因此季节性波动是指经济现象或变量在连续过程中重复出现涨落的情况,所强调的仅仅是再现的相似性,而不是绝对意义上的可重复性。实践中,单凭对时间序列的观察是很难确定它是否有季节性的,在时域中,我们可以借助时间序列的样本自相关函数——分析随机过程和识别模型的有力工具——来发现时间序列中的季节性。如果一个时间序列数据中有季节性,那么通常它的自相关系数也具有相应的季节性特征。

由于经济时间序列的季节模式是一个不必规则但是系统的年度内的运动因素。这意味着在其频域表示谱的季节频率附近有波峰。所以也可以定义季节性时间序列是在频域中有谱峰的时间序列,该定义由 Nerlove (1964) 和 Granger (1978) 给出。由于谱分析中所要求的平稳性假设在经济时间序列中很少实现,在季节性因素的定义中我们以 Priestly (1965) 推荐的拟谱代替谱。拟谱是基于 Cramér (1960) 中一类称为 Harmonizable 过程的时间序列过程, Priestly (1965), Granger (1978) 和 Joyeux (1979) 将其引入了经济时间序列分析中来。在应用中,一方面是由于谱估计具有较大的抽样误差,另一方面可能是由于非常难以根据经过季节调整后的时间序列的估计谱来评价季节性调整方法的优劣,使得这一频域分析方法的应用受到局限。

除了频域和时域上的表示特征外,我们还可以利用强调季节性波动的成因来定义季节性。外部因素理论认为季节性的根源在于经济制度之外的某些事物的波动,如太阳黑子、星象、战争、政治事件、金矿的发现、人口和移民的增长、新疆域和新资源的发现、科学发明和技术进步等等。气候的直接影响、社会制度及风俗习惯也都会引起季节变动。该理论认为季节性变易是一些不必规则但是系统地由诸如气候变化及宗教节日的规则日历效应等这样一些非经济现象所导致的(经济时序)年度内的运动。另外,商业实践及预期也会导致季节性模式。比如,定时销售的某些商业行为导致季节性波动。预期在七、八月份有销售高峰使得工厂在春天和冬天生产收割机,就是一个由预期及气候因素所导致的季节模式的例子。虽然,可以找到许多理由说明仅凭因果因素来定义季节性是不可取的,但是,在分析经济时间序列中的季节性时,我们任何时候都不能忽视这些潜在的解释因素的作用。

由此可见,采用一个非常严格的关于季节性的定义,无益于我们对季节性问题进行更加深入的研究。相反,从广义的角度定义季节性,强调季节性现象的多面性,包容各种不同的能够用于发现季节性的方法和包括因果因素在内的各种模拟机制,是一种更为全面、具有可操作性的方法。

定义 1.1 经济时间序列中的季节性是一个系统的但不必是不变的或规则的年度内的运动,它可能是由气候变动、宗教节日、商业实践及预期等多种原因所引起的以大致固定时期(十二个月或四个季度等)为周期的一种变动,会在所谓的季节频率附近产生谱峰,使得时间序列的自相关系数具有周期性。

第二节 季节时间序列模型

经济时间序列中关于季节性的模型是多种多样的,常用的模型主要可以分为以下三大类:季节 ARIMA 过程、周期性过程 (Periodic Processes) 和 nonlinear 季节模型 (Nonlinear Seasonal Models)。

一、季节 ARIMA 过程

季节 ARIMA 过程是一般的 ARIMA 过程在季节时间序列模型中的推广。按照它们在均值和方差上的不同特征,可以分为确定性季节过程和季节单整过程。

1. 确定性季节过程

假定 S 表示序列的周期,即一年观察 S 次。为了简便起见,我们总是假定 $t=1$ 时的观测值所对应的季节恰好是第一个季节。则确定性季节时间序列有如下表达式:

$$y_t = \sum_{s=1}^S \delta_{st} \gamma_s + z_t, \quad t=1, 2, \dots, T, \quad (1.1)$$

其中 δ_{st} 是季节哑变量; γ_s 是季节为 s 时序列的无条件期望,表示确定性的季节水平推移。 z_t 是均值为零的弱平稳过程,它可以是具有随机季节性特征的 SARMA 过程

$$\phi_S(L^S)z_t = \theta_S(L^S)\varepsilon_t, \quad (1.2)$$

其中, $\phi_S(L^S) = 1 - \sum_{i=1}^P \phi_{iS}L^{iS}$, $\theta_S(L^S) = 1 - \sum_{j=1}^Q \theta_{jS}L^{jS}$ 且特征多项式的根都在单位圆外。序列的期望和自相关函数有周期性,以一阶季节自回归过程为例:

$$z_t = \phi_S z_{t-S} + \varepsilon_t, \quad (1.3)$$

其中 ε_t 是均值为零,方差为 σ_ε^2 的独立同分布的随机序列,且 $|\phi_S| < 1$ 。用滞后算子可将式 (1.3) 表示为

$$(1 - \phi_S L^S)z_t = \varepsilon_t. \quad (1.4)$$

通常,我们总假定其无条件期望为零。则其条件期望为

$$E(z_t | z_{t-1}, \dots) = \phi_S z_{t-S}, \quad (1.5)$$

序列的自相关函数为

$$\rho(kS) = \phi_S^k, \quad k=1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

方差为

$$\text{Var}(z_{st}) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_S^2}. \quad (1.7)$$

对于式 (1.1) 中的 y_t 与 z_t 仅在一阶矩上有所不同, 在自相关函数以及方差上是相同的。图 1.4 为一个确定性季节时间序列, 数据生成过程为式 (1.1), 其中 $S=4$, z_t 为 SAR(1), $\phi_s=0.5$, $\gamma_1=4.5$, $\gamma_2=1.1$, $\gamma_3=-1.8$, $\gamma_4=-5.2$, 样本容量 $T=200$ 。

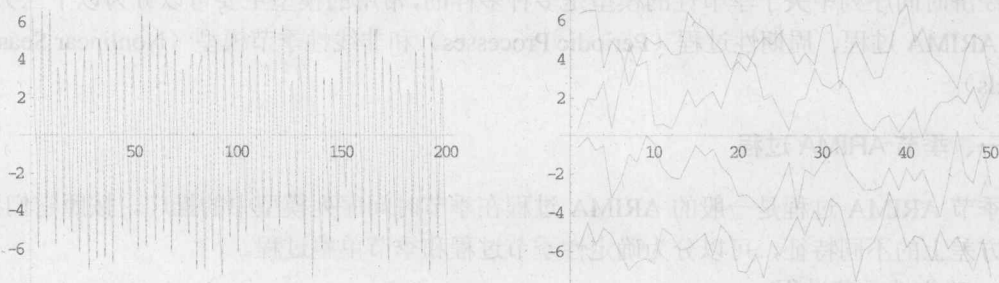


图 1.4 确定性季节时间序列示例

2. 季节单整过程

对在一年中 S 个等间隔时间点取值的非平稳随机过程 y_t , 如果 $(1-L)^d S(L)^D y_t$ 是一个平稳可逆的 ARMA 过程, 则称 y_t 是季节单整过程, 一般记作 $y_t \sim I(d, D)$, 其中 $S(L) = 1 + L + L^2 + \dots + L^{S-1}$ 。在第二章中将对这类过程进行详细介绍, 下面仅以季节随机游走过程为例对其特点进行说明。季节随机游走过程是最简单的季节单整过程, 它相当于在式 (1.3) 的一阶季节自回归过程中取 $\phi_s=1$ 的情形

$$\Delta_S y_t = \varepsilon_t, \quad (1.8)$$

它的无条件期望具有确定性季节性 (初值), 它的条件期望为

$$E(y_t | y_{t-1}, \dots) = E(y_{t+kS} | y_{t-1}, \dots) = y_{t-S}, \quad k=1, 2, \dots \quad (1.9)$$

持续受到初值中季节性的影响。季节随机游走过程的方差

$$\text{Var}(y_{s\tau}) = \text{Var}(y_{s0}) + \tau\sigma^2, \quad (1.10)$$

它随着年份 τ 的增加而线性增加, 最后趋向于无穷。图 1.5 是季节 AR(1) 序列的样本轨迹, 其中, 周期 $S=4$, 样本容量 $T=200$, 一阶季节自回归系数 ϕ_s 依次取值为 0.5, 1。从图中我们可以很直观地发现这些特点。

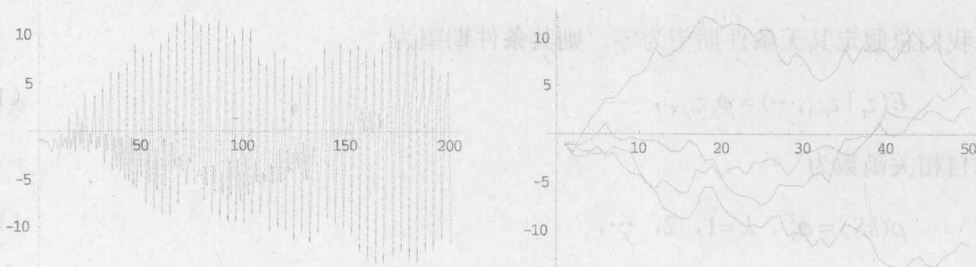


图 1.5 季节随机游走序列的样本轨迹

将 ARIMA 模型用于结构因素模型中对因素过程的模拟, 得到 UCARIMA 模型。以加法模型为例,

$$y_t = y_t^{ic} + y_t^s + y_t^i.$$

假定 y_t^i 是白噪声过程, 而对于 y_t^{ic} 和 y_t^s 用两个不同的 ARMA 过程

$$\Phi_c(L) y_t^{ic} = \Theta_c(L) u_t,$$

$$\Phi_s(L) y_t^s = \Theta_s(L) v_t$$

进行模拟。其中 $\Phi_c(L)$ 、 $\Theta_c(L)$ 、 $\Phi_s(L)$ 和 $\Theta_s(L)$ 分别是多项式, 而 $\varepsilon_t = (u_t, v_t)$ 是随机向量, 服从 $N(0, \Omega_\varepsilon)$ 。此时等价于

$$\Phi_c(L) \Phi_s(L) y_t = \Phi_s(L) \Theta_c(L) u_t + \Theta_s(L) v_t + \Phi_c(L) \Phi_s(L) y_t^i.$$

这是一个施加了限制的 ARIMA 模型。UCARIMA 模型比一般的 ARMA 模型更加符合简约原则 (Nerlove 等, 1979)。

二、周期性过程

周期性过程 (Periodic Processes) 是系数随季节变动而发生周期变化的过程, 对于一般的周期过程 PARMA(p, q) 过程, 有

$$\phi_s(L) y_{s\tau} = c_s + \theta_s(L) \varepsilon_{s\tau}, \quad s=1, 2, \dots, S \quad \tau=1, 2, \dots, T_\tau, \quad (1.11)$$

其中, $\varepsilon_{s\tau} \sim N(0, \sigma_s^2)$ 并且关于年份 τ 和季节 s 相互独立。 $\phi_s(L) = 1 - \phi_{s1}L - \phi_{s2}L^2 - \dots - \phi_{sp}L^p$ 和 $\theta_s(L) = 1 - \theta_{s1}L - \theta_{s2}L^2 - \dots - \theta_{sq}L^q$ 是关于滞后算子 L 的多项式 (其中多项式的阶数 p 和 q 分别为非零系数的最大阶数)。以一阶周期性自回归过程 PAR(1) 为例:

$$y_t = \sum_{s=1}^S \delta_{st} \phi_s^p y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1.12)$$

其中, P 表示参数具有季节性的周期变化。假定其无条件期望为零, 则它的条件期望为

$$E(y_t | y_{t-1}, \dots) = \sum_{s=1}^S \delta_{st} \phi_s^p y_{t-1}. \quad (1.13)$$

为了便于分析, 通常采用向量形式来表示周期过程。譬如, 当 $S=2$ 时, 有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_2^p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1\tau} \\ y_{2\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1^p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1\tau-1} \\ y_{2\tau-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1\tau} \\ u_{2\tau} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

其中, τ 表示第 t 个观测值所对应的年份。根据 VAR 向量自回归过程平稳的充分必要条件可知, 当

$$|\phi_1^p \phi_2^p| < 1 \quad (1.15)$$

时, 该过程是平稳的。

图 1.6 分别给出了平稳和非平稳周期性过程的样本轨迹, 其中左图为平稳周期性过程,

$\phi_1^p = 0.5, \phi_2^p = 1.1, |\phi_1^p \phi_2^p| < 1$; 右图为非平稳周期性过程, $\phi_1^p = 0.7, \phi_2^p = 1.35, |\phi_1^p \phi_2^p| \approx 1$ 。