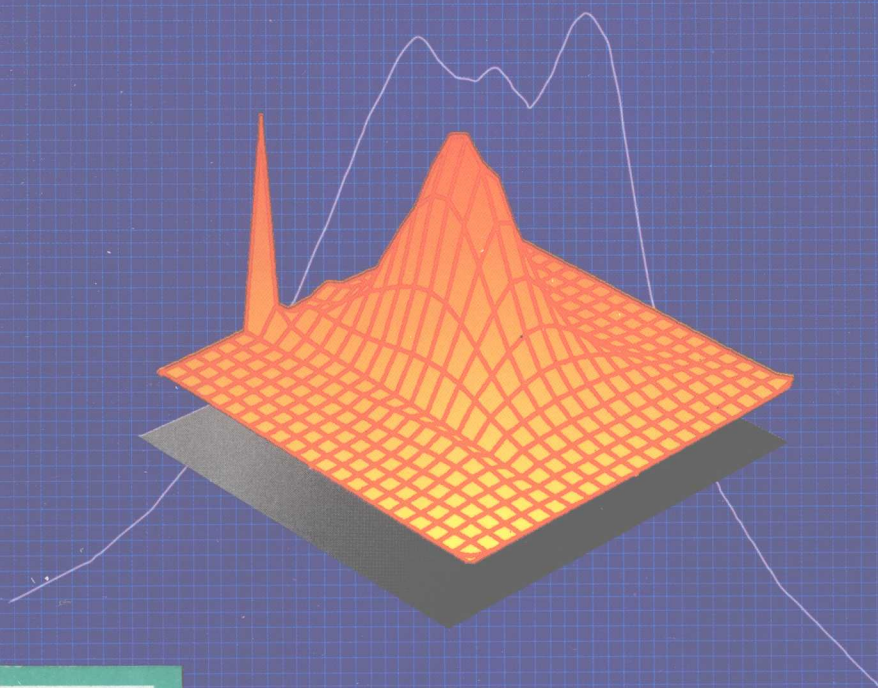


科学与工程计算丛书

工程与科学计算中的近似 非线性分析方法

GONGCHENGYUKEXUEJISUANZHONGDEJINSHIFEIXIANXINGFENXIFANGFA

何吉欢 著



812

SECS

河南科学技术出版社

内 容 提 要

本书提出了一些新的非线性分析方法,如同伦摄动方法和变分迭代算法.本书仅运用了简单的数学知识,因此,可作为应用数学专业及相关专业高年级大学生及研究生的教材,也可作为有关教师、技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工程与科学计算中的近似非线性分析方法/何吉欢
著. — 郑州:河南科学技术出版社,2002. 1

(工程与科学计算丛书)

ISBN 7-5349-2630-0

I. 工… II. 何… III. 非线性方程 IV. 0241. 7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 092527 号

责任编辑 刘嘉 责任校对 王艳红

河南科学技术出版社出版发行

(郑州市经五路 66 号)

邮政编码: 450002 电话: (0371) 5737028

河南第一新华印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本: 850mm × 1168mm 1/32 印张: 5.375 字数: 132 千字

2002 年 1 月第 1 版 2002 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7-5349-2630-0/T · 528 定价: 10.00 元

《科学与工程计算丛书》第二届编辑委员会

名誉主编：石钟慈

名誉编委：(按姓氏笔画为序)

于 敏	王 仁	石钟慈	曲钦岳	朱家鲲 (美)	
庄逢甘	李德元	何祚庥	谷超豪	况蕙孙	陈能宽
林 群	周毓麟	郑哲敏	胡思得	秦元勋	黄祖洽
符鸿源	程开甲	曾庆存	裴鹿成		

编 委：(按姓氏笔画为序)

于万瑞	王兴华	王肖均	王能超	文炯一	石济民
石中岳	田德余	冯士笮	任 兵	刘 林	刘儒勋
朱允伦	孙文心	纪立人	纪楚群	李开泰	李荫藩
邬华谟	杜书华	杨清建	吴辉碇	宋国乡	何延才
邱希春	陈光南	陈传森	陈雨生	陈健华	汪翼云
张春彝	张锁春	范宝春	范新亚 (美)		季达人
宓国柱	姜宗福	顾昌鑫	袁健民	袁耀初	徐国华
常铁强	傅德薰	蒋伯诚	鲍家駁 (美)		颜 宏

常务编委：(按姓氏笔画为序)

刘儒勋	孙文心	杜书华	何延才	张锁春	陈雨生
蒋伯诚					

本书执行主编：刘儒勋

编辑部成员：蒋伯诚 姜宗福 杜慧娴 陈吉斌 邵福球

代 序

为促进我国科学与工程计算事业的发展，1988年7月，中国核学会计算物理学会在青岛举办了全国计算物理学术研讨会。会议期间，经有关专家商议，决定出版一套《科学与工程计算丛书》，得到了许多著名科学家的热情关心和支持。经过两年多的筹备，正式开始了这套丛书的编辑出版工作。

计算机是一种延伸、强化人的思维的工具。当世界上第一台计算机 ENIAC 诞生时，冯·诺伊曼就预言这一新工具所拥有的巨大潜力和对人类社会的深远影响。在过去的四十多年里，计算机迅猛发展，其应用范围从国防尖端部门扩大到科学技术和国民经济建设的各个领域，计算机已经给人类社会带来了一场深刻的技术革命，计算机的发展和计算方法的进步极大地提高了人们的计算能力，从而引起了科学方法论上的巨大变革，使计算成为科学研究的第三手段，对研究的量化起到特殊重要的作用。“实验、理论、计算”三位一体是现代科学研究基本模式，三者既相对独立，又互相补充，互相依赖。人们在计算机上可充分利用数值计算来模拟现实世界的各种过程，部分替代实验或作为实验的补充，检验理论模型的正确性，尤其是还能呈现现实生活中无法重复或无法进行实验的现象，或模拟耗资巨大的实验工程，探索新的奥秘。由于有了计算这一强有力的手段，大大增强了人们科学研究的能力，促进了不同学科之间的交叉渗透，缩短了基础研究到应用开发的过程，加速了把科学技术转化为生产力的进程。

在计算机的发展和数值计算的广泛应用的推动下，科学与工

程计算（简称科学计算）作为一门工具性、方法性和边缘交叉性的新学科，已经开始了自己的发展。它既包含了在各种科学与工程领域中逐步发展起来的计算性学科分支，如计算数学、计算物理、计算力学、计算化学以及计算地震学等计算工程学，又包括经济科学、医学、生物学和系统科学等发展中所需要的计算理论。计算方法则是它们联系的纽带和共性的基础。科学计算就其本质而言，是要解决现代科学与工程中提出的大规模、非线性、非均匀和几何形状非规则的复杂问题，是数学理论和计算艺术的高度结合，是复杂系统的数值计算或模拟。计算机的性能与算法水平的乘积是衡量计算能力高低的指标。

我国在科学与工程计算领域已有了一支较高水平的、能打硬仗的队伍。这支队伍在我国计算机水平相对落后的条件下，以其智力优势和拼搏精神为我国的国防建设和经济建设做出了重大贡献，积累了丰富的实践经验，急需加以总结、提高、推广和交流。编写《科学与工程计算丛书》，正是为了适应这种形势的需要，它的出版将会填补我国这方面的空缺。

这套丛书是采用“众人拾柴火焰高”的集资方式创办的，由于丛书的涉及面极广，故不设主编，由常务编委轮流担任执行主编。丛书作者都是奋战在教学和科研第一线的专家学者，他们为发展我国的科技事业不辞劳苦，呕心沥血，无私奉献。谨向他们表示崇高的敬意。

可以期望，《科学与工程计算丛书》的出版发行，必将有力地推动我国科学计算事业的发展。

《科学与工程计算丛书》编委会
1990年8月

序

何吉欢博士编写的《工程和科学计算中的近似非线性分析方法》一书是对我国科教兴国战略的一大贡献，是我国青年科学家的非凡创造，特此致以最热烈的祝贺！

何吉欢博士是我国青年学者，他在变分原理及摄动理论等方面的研究屡结硕果，对这些学科的发展做出了很大的贡献，并独立开辟了诸多新领域（如变分迭代算法、同伦摄动方法及新的摄动理论体系），在国内外著名杂志（如 AMSE Applied Mechanics, International Journal of Nonlinear Mechanics, International Journal of Engineering Science, Meccanica 等）上发表了 70 多篇优秀论文，并担任两个国际杂志 International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation 和 International Journal of Nonlinear Modelling in Science and Engineering 的主编。其研究方法颇具有创造性，如把变分理论直接应用于非线性分析，提出了变分迭代算法；以及把同伦技术应用于摄动理论，提出了同伦摄动理论。本书中很多新方法首次以中文形式出现，有些内容还没有在杂志上发表过。

在本书中作者提出的一些新方法对摄动理论的发展具有很大的贡献，在国际上居前沿，享有一定声誉，扬我中华科学灿烂之光。该书主要反映了何吉欢博士在该领域研究成果之大成。

大家知道，摄动方法只适合于小参数的情况，其解只有在参数很小时才有效。与传统的摄动方法不同，何吉欢博士在本书中提出了很多新的方法，如人工参数摄动方法、变分迭代算法等，

这些方法思想新颖，有许多独到之处，这些方法不仅适合于弱非线性问题，而且也适合于强非线性问题，得到的解通常在全域内一致有效。

本书全面、精辟、系统、深入浅出地介绍了作者的一些新方法，虽然有些方法可能存在不同的意见，其数学上还不很严密，但不失为一般较优秀的专著。该书内容丰富实用，文字浅显易懂。作者不仅充分论述了各种方法的特点、应用背景，并且给出了很多具体的实例，理论联系实际，容易为读者理解和掌握。反复仔细领会这本书的字字句句，可以窥见作者提出的新方法的精髓，对各种具体方法会有新的更深刻的理解。

本书的最大特点是无须较深厚的数学基础，仅需要微积分和基本的常微分积分方程的准备知识，即可完全掌握书中的全部内容，并且可以在工程的实际问题中得到广泛的应用。

本书可作为应用数学、力学、物理学和其他相关专业高年级大学生、研究生以及科技人员使用，还适合生物数学、经济数学、控制理论、人口理论专业的学生和科研人员参考。对于担任摄动方法课程的教师，也是一本有价值的参考书。如今正值高新科技教育大发展时期，本书的出版必将推动我国科学技术与人才培养的进一步发展，也将为科教兴国与全人类的文明进步及繁荣做出可喜之贡献！

虞爱民

2001年5月

前 言

本书是作者最近几年工作的总结，系统地阐述了作者提出的一些新的非线性分析方法，如变分迭代算法、同伦摄动方法及各类改进的摄动方法，着重阐述了方法的基本概念、思想和方法。为了让更多读者掌握书中内容，作者用简单的实例加以说明，而避开繁杂的数学证明。读者只要掌握或理解了书中的各种方法，就可以十分方便地应用到各种复杂的非线性问题。

为了起到抛砖引玉的作用，本书着重阐述了作者提出各种方法的前因后果。如在介绍变分迭代算法时，作者先介绍了 Inokuti 的拉氏乘子法，再以大家熟悉的代数方程为例说明方法的基本思想，为了使本书具有一定的完整性，还简要地介绍了变分法的基本知识，所以，读者只要掌握微积分的基本知识，即可非常容易地掌握和应用该方法。

为了阐述同伦摄动方法，作者对数学里的同伦理论作了非常直观的解释，只引用了同伦理论的基本思想，所以并不要求广大读者首先掌握同伦理论。

在介绍传统的摄动方法时，作者着重分析了传统摄动理论的基本假设及主要缺陷，引导读者如何改进传统方法。本书提出了各种改进的摄动方法，思想都非常简单，操作也非常方便，只要对摄动理论有初步了解的读者，都能熟练掌握和应用。

本书有些方法不再需要传统摄动理论的基本假设（即小参数假设），但作者还是称这些方法为“摄动方法”，因为我们还是运用传统摄动法的基本思想。如在线化摄动方法和参化摄动方法

中，并不要求“摄动参数”或“展开参数”是小参数，而可以是
大参数或人工参数。

本书还介绍了作者提出的改进的 Adomian 分裂算法和一些
其他新的方法，本书只运用了简单的数学知识，可作为应用数学
专业及相关专业高年级大学生及研究生的教材，也可作为有关教
师、技术人员的参考书。

何吉欢

2001 年 8 月于上海大学

目 录

第一章	引言	(1)
第二章	摄动法简介	(7)
2.1	Lindsted-Poincare 方法	(14)
2.1.1	改进的 Lindsted-Poincare 方法 (方案一)	(16)
2.1.2	改进的 Lindsted-Poincare 方法 (方案二)	(18)
2.1.3	改进的 Lindsted-Poincare 方法 (方案三)	(22)
2.1.4	van der Pol 振子	(23)
2.1.5	改进的 Lindsted-Poincare 方法 (方案四)	(26)
2.2	重正规化法	(29)
2.3	多重尺度法	(31)
2.4	广义 PLK 方法及其改进	(35)
2.4.1	广义 PLK 方法	(35)
2.4.2	改进方案一	(37)
2.4.3	改进方案二	(38)
2.5	摄动理论的主要缺陷	(43)
2.6	一些振动方程的精确周期	(48)
第三章	人工参数摄动法	(58)
3.1	Nayfeh 方法	(58)

3.2	Shohat 方法	(60)
3.2.1	原 Shohat 方法	(60)
3.3.2	改进的 Shohat 方法	(63)
3.3	刘高联人工参数法	(64)
3.4	线化和校正方法	(67)
3.4.1	一阶近似	(67)
3.4.2	高阶近似	(72)
3.4.3	分裂算法	(76)
3.5	线化摄动方法	(80)
3.5.1	基本思想	(81)
3.5.2	应用	(83)
3.5.3	高阶近似	(92)
3.6	参化摄动方法	(97)
3.6.1	参化摄动方法的基本方法	(102)
3.6.2	参数摄动法的应用	(103)
第四章	同伦摄动方法	(113)
4.1	什么叫同伦	(113)
4.2	代数方程求根	(113)
4.3	同伦摄动方法的基本思想	(117)
第五章	变分迭代算法	(129)
5.1	广义拉氏乘子和牛顿迭代算法	(129)
5.2	Inokuti 法的改进	(134)
5.3	变分迭代算法的基本概念	(137)
5.4	分数阶微分方程的近似解析解	(151)
第六章	改进的 Adomian 分裂算法	(155)

第一章 引 言

随着计算机科学的突飞猛进,大型线性方程组的求解已不成问题.但是对于非线性方程,特别是强非线性方程,迄今为止还没有一种通用的有效求解方法.目前常用的数值方法在求解强非线性方程时会遇到以下困难:

(1)对初始近似非常敏感.当初始近似解在真解附近时,则容易收敛;但是当初始近似远离真解时,迭代过程很难收敛.

(2)数值解虽然可以解决很多工程问题,但是数值解往往会丢失一些非常重要的信息.例如,Duffing 方程虽然可用数值方法求解,但是其数值解不能反映振幅和频率的关系.有人曾预言,即使计算机科学按现在的发展速度发展 100 年,计算机也不可能精确求解一些大型的非线性方程,如用于天气预报的 N-S 方程.又如,数值方法还不能有效地求解下面具有分数阶导数的线性微分方程:

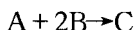
$$\frac{d^{1/2}u}{dx^{1/2}} + u = 0. \quad (1.1)$$

对于分数阶非线性微分方程的求解则更加困难.

虽然绝大多数非线性方程不存在精确解,但一般来讲,大部分非线性方程都存在某些基本特征,这些基本特征可用非线性分析方法近似地求得,如果再结合数值方法,则可求解绝大多数非线性方程.

对于有些非线性问题,虽然可求得其精确解,但其形式往往很复杂,不能给我们一些实用意义上的信息.作为一个例子,我们考

考虑以下一化学反应：



设 a 和 b 为 A 和 B 在 $t=0$ 时的浓度, n 是生成物 C 在时间 t 时的浓度, 则我们可得到以下方程:

$$\frac{dn}{dt} = K(a - n)(b - 2n)^2. \quad (1.2)$$

虽然我们可以求得精确解^[1]

$$t = \frac{1}{K} \left\{ \frac{1}{2a - b} \left(\frac{1}{b - 2n} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{(2a - b)^2} \ln \left(\frac{1 - 2n/b}{1 - n/a} \right) \right\}, \quad (1.3)$$

然而其解的形式很复杂, 不能提供一些有用的信息, 如物质 C 的浓度 n 是如何随时间变化的。

但是, 如果分析式(1.2)的近似解:

$$n \approx \frac{1}{2} b (1 - e^{-\beta t}), \quad (1.4)$$

式中

$$\beta = Kab \left(1 - \frac{1}{4a} \right), \quad (1.5)$$

这样, 我们可以非常清楚看出, 物质 C 的浓度随时间指数衰减, 最后稳定在 $b/2$ 。

再考虑一小球在无摩擦的弯管里的运动, 如图 1.1 所示。假设其恢复力与位移 u 的立方成正比, 在不考虑摩擦力的情况下, 其控制方程为

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + cu^3 = 0. \quad (1.6)$$

设初始时刻, 小球在 $u = u_0$ 处静止释放, 则其初始条件为

$$u(0) = u_0 \text{ (初始位置),}$$

$$u'(0) = 0 \text{ (初始速度为零).}$$

根据经验, 方程具有周期解, 而传统的摄动法无法求得其近似解! 本书将用不同的方法求其近似解, 其中一个近似周期可表示

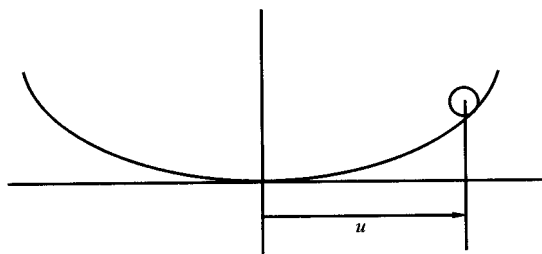


图 1.1 小球在无摩擦的弯管里的运动

为

$$T = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3c^{1/2}A}.$$

再考虑数学摆(图 1.2). 设小球的质量为 m , 则小球在图示位置的动能为

$$T = \frac{1}{2} mL^2 u'^2.$$

设 O 点的势能为零, 则小球的势能为

$$V = -mgL \cos u.$$

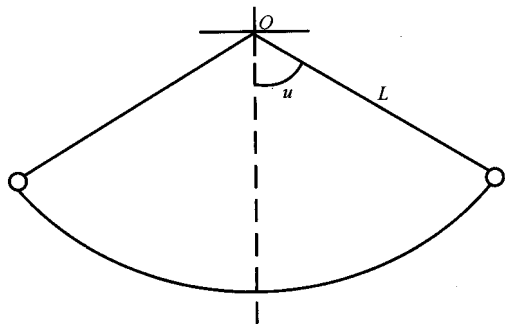


图 1.2 数学摆的周期运动

于是其 Lagrange 函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2} mL^2 u'^2 + mgL \cos u.$$

从而得数学摆的运动方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{du'}\right) - \frac{dL}{du} = 0,$$

即

$$-mL^2 u'' - mgL \sin u = 0, \quad (1.7)$$

或写成为

$$u'' + \omega^2 \sin u = 0, \quad (1.8)$$

式中 $\omega = \sqrt{g/L}$.

再考虑一硬弹簧(图 1.3). 设其恢复力可表示为

$$F = ku + pu^3,$$

则根据牛顿第二定律, 可得 Duffing 方程:

$$u'' + ku + pu^3 = 0. \quad (1.9)$$

当 $p \ll k$ 时, 可用传统摄动法求解. 而工程上有时对相反的情况更感兴趣. 在这种情况下, 又如何求其近似解呢? 本书以后各章将详细讨论这一问题.

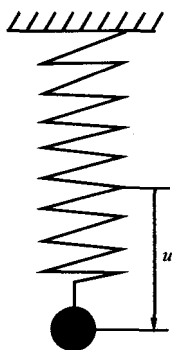


图 1.3 硬弹簧的振动

再考虑一个质点(图 1.4). 设有一个质点 C 同时受重力 G 和斥力 F 的作用, 质点 C 在它们作用下绕 A 点来回振动. 设斥力 F 可表示为

$$F = \frac{k}{BC^2} = \frac{k}{r^2 + L^2 - 2rL \cos u},$$

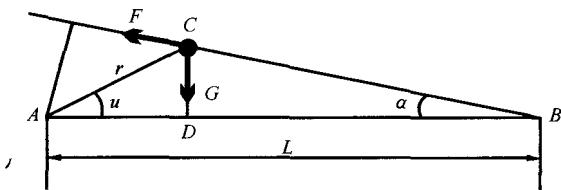


图 1.4 质点 C 的振动

式中 k 为比例常数. 由图我们还可得以下一个关系式:

$$\sin \alpha = \frac{CD}{BC} = \frac{r \sin u}{\sqrt{r^2 + L^2 - 2rL \cos u}}.$$

于是我们写出质点 C 的运动方程(不考虑摩擦力及空气阻力):

$$\begin{aligned} Ju'' &= Gr \cos u - F \sin \alpha = Gr \cos u - \frac{k \sin \alpha}{r^2 + L^2 - 2rL \cos u} \\ &= Gr \cos u - \frac{k r \sin u}{(r^2 + L^2 - 2rL \cos u)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

式中 J 为转动惯量. 这是一个典型的非线性方程.

另外, 如何求方程

$$u'' + \frac{c}{u} = 0 \quad (1.11)$$

的解析解, 在等离子物理中有很重要的意义和应用.

因此, 近似方法在工程中是很受欢迎的. 近似方法很多, 最常用的是摄动法. 最近非线性分析方法层出不穷, 如同伦分析方法^[2]、同伦摄动方法^[3]、变分迭代方法^[4]、线化摄动方法^[5,6]和参化摄动方法^[7]等. 在文献^[8]中, 作者对最近发展起来的非线性分析方法进行了总结和比较. 本书将介绍作者最近几年的主要工作, 着重阐述方法的应用, 而不给出严密的数学证明.

参考文献

- 1 Acton J R, Squire P T. Solving Equations with Physical Understanding. Bristol and Boston: Adam Hilger Ltd, 1985
- 2 Liao S J. A second-order approximate analytical solution of a simple pendulum by the process analysis method. ASME J. Appl. Mech., 1992(59), 970~975
- 3 He J H. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems. International J. of Nonlinear Mechanics, 2000(35),

37~43

- 4 He J H. Variational iteration method: a kind of nonlinear analytical technique: some examples. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1999, 34(4), 699~708
- 5 He J H. Analytical solution of a nonlinear oscillator by linearized perturbation technique. *Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 1999, 4(2): 109~113
- 6 He J H. A new perturbation technique which is also valid for large parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 229(5): 1 257~1 263
- 7 He J H. Some new approach to Duffing equation with strongly & high order nonlinearity (II) parametrized perturbation technique. *Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 1999, 4(1): 81~82
- 8 He J H. A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2000, 1(1): 51~70