TIANXING EDUCATION 天星教育

2009

高考研究权威专家

高考复习讲义

数学(理)

杜志建 主编

联合推荐

sina 新浪教育　搜狐教育 learning.sohu.com　人民网 people www.people.com.cn　教育频道 edu.QQ.com

天星教研中心十年奉献
北大清华状元年年首选

新疆青少年出版社
克孜勒苏柯尔克孜文出版社

TIANXING EDUCATION 天星教育

2009

高考研究权威专家

高考复习讲义

数学（理）

丛书主编：杜志建

本册主编：陈千勇　赵先举　刘捍东

本册副主编：王　忠　魏　娴　刘文君　刘传兴
韩云霞　吴淑娟　郭秀珍　李慧如
陈华欣

新疆青少年出版社

克孜勒苏柯尔克孜文出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考复习讲义.数学.理科/杜志建主编.—修订本.—阿图什:克孜勒苏柯尔克孜文出版社;乌鲁木齐:新疆青少年出版社,2008.2

ISBN 978-7-5374-0439-6

Ⅰ.试… Ⅱ.杜… Ⅲ.数学课—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 019776 号

策　　划:杜志建

责任编辑:郑　琴

责任校对:刘　娜

封面设计:魏晋文化

版式设计:侯会锋

高考复习讲义·数学(理科)

杜志建主编

出　版:新疆青少年出版社

社　址:乌鲁木齐市胜利路二巷 1 号　　邮政编码:830049

电　话:0991—2301401(编辑部)　　2864403(发行部)

网　址:http://www.qingshao.net

发　行:新疆青少年出版社

经　销:全国各地书店

印　刷:河南省瑞光印务股份有限公司

开　本:890×1240　1/16　　版　次:2008 年 3 月修订版

印　张:26.5　　印　次:2008 年 3 月第 1 次印刷

字　数:502 千字

印　数:20000 册

书　号:ISBN 978-7-5374-0439-6

定　价:42.00 元

目录
CONTENTS

第一章 集合与简易逻辑

考纲下载

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念. 了解空集和全集的意义.
2. 了解属于、包含、相等关系的意义. 掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.
3. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义. 理解四种命题及其相互关系.
4. 掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义.

高考趋向

1. 集合题型的考查以选择题、填空题为主，难度不大，要求考生掌握基础知识、基本题型(如 2007 年全国卷Ⅱ第 2 题). 近年试题加强了对集合运算的考查，并向无限集发展，考查考生的抽象思维能力，数形结合是解集合问题的常用方法(如 2007 年全国卷Ⅰ第 1 题).
2. 简易逻辑的考查趋向较多的是与其他知识的交汇问题，其中涉及简易逻辑的知识考查较为基础，较为稳定.
3. 有关“充要条件”、命题真伪的试题一般出现的是一些较为灵活且能有效考查能力的选择题、填空题，考查考生对数学概念的准确记忆和深层次的理解(如 2007 年全国卷Ⅰ第 9 题).

第一讲 集合的概念和运算

1 研习考纲重难点

考点一 集合的概念

梳理

(1)集合的定义

某些指定的对象在一起就成为一个集合.

自然数集用 $\mathbf{N}$ 表示，正整数集用 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 表示，整数集用 $\mathbf{Z}$ 表示，有理数集用 $\mathbf{Q}$ 表示，实数集用 $\mathbf{R}$ 表示.

(2)元素与集合的关系

集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

集合中的元素通常用小写拉丁字母表示，如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$(或 $a\overline{\in}A$).

(3)集合的表示方法

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法两种.

根据元素个数，集合可分为三类：

有限集：含有有限个元素；

无限集：含有无限个元素；

空集：不含任何元素，用 $\varnothing$ 表示.

深化

(1)集合是一个相对性概念，几个对象在一起就可以成为一个集合.

(2)根据元素与集合的关系，可以分析集合中元素的特征：确定性、互异性和无序性.

注意

(1)用集合的语言表述数学问题时，要注意养成自觉使用符号的意识和能力. 如在集合表示方法的选择、集合符号语言的使用中去培养习惯，运用集合的观点分析、处理实际问题.

(2)注意集合表示的列举法与描述法在形式上的区别. 列举法一般适合于有限集，而描述法一般适合于无限集.

(3)注意集合 $\{\varnothing\}$ 与空集 $\varnothing$ 的区别与联系：

$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$，$\varnothing\in\{\varnothing\}$.

考点二 子集、全集、补集的概念

梳理

(1)子集与真子集

①对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)，即集合 A 是集合 B 的子集. 空集是任何集合的子集，$\varnothing\subseteq A$. 任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

②对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$ 并且 $A\neq B$，就说集合 A

学习方法

空集的自白：“我是老大，谁遇到我都我说了算($A\cap\varnothing=\varnothing$)；但我又最渺小，谁都忽视我($A\cup\varnothing=A$).”

空集像一个无处不在的幽灵，因此我们要处处设防，时刻提高警惕，才不致掉进空集的陷阱之中. 如解决与子集有关的问题时，必须提醒自己：子集中是否考虑了空集这一特殊集合.

是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

③空集是任何非空集合的真子集.

(2)全集与补集

①设 S 是一个集合,A 是 S 的一个子集(即 $A\subseteq S$),由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集,记作 $\complement_S A$,即 $\complement_S A=\{x|x\in S$ 且 $x\notin A\}$.

②如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,全集通常用 U 表示.

深化

(1)子集与真子集的区别与联系:集合 A 的真子集一定是其子集,而集合 A 的子集不一定是其真子集;若集合 A 有 n 个元素,则其子集个数为 2^n,真子集个数为 2^n-1.

(2)全集是一个相对概念,一个全集又可以是另一个集合的子集或真子集,是我们为研究集合关系临时选定的一个集合.

(3)集合 A 与其补集的区别与联系:两者没有相同的元素;两者的所有元素合在一起,就是全集.

注意

(1)判断两个集合之间的子集、真子集关系可以比照两实数间的关系:

①$A\subsetneqq B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,类比于 $a<b\Leftrightarrow a\leqslant b$ 且 $a\neq b$;

②$A\subseteq B\Leftrightarrow A\subsetneqq B$ 或 $A=B$,类比于 $a\leqslant b\Leftrightarrow a<b$ 或 $a=b$;

③$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$,类比于 $a=b\Leftrightarrow a\leqslant b$ 且 $a\geqslant b$.

也可以用韦恩图直观地表示上述各种关系.

(2)子集、全集、补集等概念实质上是生活中的"部分"、"全体"、"剩余"等概念在数学中的抽象与反映.当 $A\subseteq S$ 时,$\complement_S A$ 的含义是:从集合 S 中去掉集合 A 的元素后,由所有剩余的元素组成的新集合.集合 A 的所有元素补上 $\complement_S A$ 的所有元素后即合成集合 S.

考点三 交集、并集的概念

梳理

(1)交集

①由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

②$(A\cap B)\subseteq A$,$(A\cap B)\subseteq B$,$A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cap B=B\cap A$.

(2)并集

①由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫做 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

②$(A\cup B)\supseteq A$,$(A\cup B)\supseteq B$,$A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$,$A\cup B=B\cup A$,$(\complement_U A)\cup A=U$.

深化

(1)两个结论:①若 $A\cap B=A$,则 $A\subseteq B$,反之也成立;

②若 $A\cup B=B$,则 $A\subseteq B$,反之也成立.

应用这两个结论时一定要注意不要忘记集合 $A=\varnothing$ 这一个特例.

(2)可以借助韦恩图或数轴来辅助理解两个集合的交集与并集的特征并用来解题.

注意

(1)对于交集概念的把握要注意以下三方面:

①交集仍是一个集合.

②交集中的元素都是两个集合的"公共元素",即若 $x\in A\cap B$,一定有 $x\in A$ 且 $x\in B$.

③交集中包括了两个集合的全体公共元素,即若 $x\in A$ 且 $x\in B$,一定有 $x\in A\cap B$.

(2)对于并集的理解应注意:

若 $x\in A\cup B$,则有三种可能:

①$x\in A$ 但 $x\notin B$;②$x\in B$ 但 $x\notin A$;③$x\in A$ 且 $x\in B$.

2 探究解题新思路

题型一 集合的基本概念

典例1 有三个实数的集合,既可以表示为 $\{a,\frac{b}{a},1\}$,也可以表示为 $\{a^2,a+b,0\}$,则 $a^{2\,009}+b^{2\,009}=$ ________.

解析 根据集合中元素的确定性,我们不难得到两集合的元素是相同的,这样需要列方程组分类讨论,显然复杂又繁琐.这时若能发现0这个特殊元素,和 $\frac{b}{a}$ 中的 a 不为0的隐含条件,就能得到如下解法.

由已知得 $\frac{b}{a}=0$ 及 $a\neq0$,所以 $b=0$,于是 $a^2=1$,即 $a=1$ 或 $a=-1$.又根据集合中元素的互异性 $a=1$ 应舍去,因而 $a=-1$,故 $a^{2\,009}+b^{2\,009}=(-1)^{2\,009}=-1$.

领悟整合

(1)利用集合中元素的特点,列出方程组求解,但仍然要检验,看所得结果是否符合集合元素的互异性的特征.

(2)此类问题还可以根据两集合中元素的和相等,元素的积相等,列出方程组求解,但仍然要检验.

典例2 (2007·广东)设 S 是至少含有两个元素的集合,在 S 上定义了一个二元运算"$*$"(即对任意的 $a,b\in S$,对于有序元素对 (a,b),在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应).若对任意的 $a,b\in S$,有 $a*(b*a)=b$,则对任意的 $a,b\in S$,下列等式中不恒成立的是

A. $(a*b)*a=a$　　B. $[a*(b*a)]*(a*b)=a$

C. $b*(b*b)=b$　　D. $(a*b)*[b*(a*b)]=b$

解析 本题考查集合的概念及运算,关键在于正确理解二元运算"$*$"的实质.

根据二元运算"$*$"的定义可知,对于B选项:$[a*(b*a)]*(a*b)=b*(a*b)=a$ 符合;C选项:将 $a*(b*a)=b$ 中的 a 换成 b,得 $b*(b*b)=b$ 符合;D选项:$(a*b)*[b*(a*b)]=(a*b)*a=b$ 符合;

而A选项:$(a*b)*a=a$ 不一定成立,故应选A.

技巧点拨

弄清集合 S 上的二元运算"$*$"的本质:"对任意的 $a,b\in S$,有 $a*(b*a)=b$"是本题实施求解的关键.本题是与集合有关的信息迁移题,这类题型将会更多地出现在今后的高考试题中,解决这类新颖试题的关键在于对题设中提供的信息进行有效地提取、转换、加工,并运用所学的知识加以解决.

题型二 考查集合间的基本运算

典例3 (2007·江苏)已知全集 $U=\mathbf{Z}, A=\{-1,0,1,2\}, B=\{x|x^2=x\}$,则 $A\cap \complement_U B$ 为

A. $\{-1,2\}$ B. $\{-1,0\}$ C. $\{0,1\}$ D. $\{1,2\}$

解析 本题主要考查集合的交与补的运算,求解的关键在于明确集合 B 的含义,即表示方程 $x^2=x$ 的根.

$\because$ 由条件可得集合 $B=\{0,1\}$,$\therefore \complement_U B=\{x|x$ 取除 0,1 外的所有整数$\}$,$\therefore A\cap \complement_U B=\{-1,2\}$,故应选 A.

评价探究

高考对集合的考查,往往考查集合的表示方法及集合的运算(交、并、补),对于集合的运算一定要先明确集合中元素的构成,并对其进行化简,化简时要注意集合中元素的特性"无序性、互异性、确定性".

典例4 已知集合 $M=\{x|x=m+\frac{1}{6}, m\in\mathbf{Z}\}, N=\{x|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}, n\in\mathbf{Z}\}, P=\{x|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6}, p\in\mathbf{Z}\}$,则集合 M、N、P 之间满足的关系为________.

解析 对于分式所表达的集合,可以用换元法解,也可以先将各分式通分,观察它们的分子是一些什么样的数,再判断它们之间的包含关系.

解法一 集合 $M=\{x|x=m+\frac{1}{6}, m\in\mathbf{Z}\}$;

$N=\{x|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}, n\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=\frac{2m}{2}-\frac{1}{3}$ 或 $x=\frac{2m+1}{2}-\frac{1}{3}, m\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=m-\frac{1}{3}$ 或 $x=m+\frac{1}{6}, m\in\mathbf{Z}\}$;

$P=\{x|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6}, p\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=\frac{2m}{2}+\frac{1}{6}$ 或 $x=\frac{2m-1}{2}+\frac{1}{6}, m\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=m+\frac{1}{6}$ 或 $x=m-\frac{1}{3}, m\in\mathbf{Z}\}$.

$\therefore M\subsetneqq N=P$.

解法二 $M=\{x|x=m+\frac{1}{6}, m\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=\frac{6m+1}{6}, m\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=\frac{3\cdot(2m)+1}{6}, m\in\mathbf{Z}\}$;

$N=\{x|x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}, n\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=\frac{3n-2}{6}, n\in\mathbf{Z}\}$;

$P=\{x|x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6}, p\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=\frac{3p+1}{6}, p\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=\frac{3n-2}{6}, n\in\mathbf{Z}\}=N$. $\therefore M\subsetneqq N=P$.

评价探究

集合间关系的探究属于高考中常考的基础题型,对于分式表达形式的集合间的关系,关键还是在于对特殊数集,如整数集,偶数集,3 的倍数及除 3 余数为几的数的详细分析.在已判断出 $B\subseteq A$ 时,要继续证明 $B\subsetneqq A$,只需要证明在集合 A 中有一个元素不在集合 B 中即可,这可以用反例法找出这一特殊元素.

题型三 考查集合与其他知识的交汇

典例5 如图 1-1-1 所示是一个 $5\times4\times4$ 的长方体,上面有 $2\times1\times4$,$2\times1\times5$,$3\times1\times4$ 的穿透的洞,则剩下部分的体积为

A. 50 B. 54

C. 56 D. 58

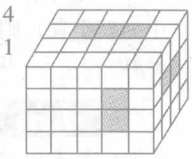


图 1-1-1

解析 本题考查立体几何空间想象能力,以集合思想来分析处理,往往使问题处理简捷,易于接受.

解法一 将长方体分为四层,分别计算各层空洞的数量为:3、12、6、3,求和得有 24 个空洞,剩下的体积为 $80-24=56$. 故应选 C.

解法二 如图 1-1-2,用韦恩图虚拟空洞的特征,然后作定性分析,应用交集思想得:所去掉的空洞共有 $2\times4+2\times5+3\times4=30$ 个,其中 $2\times1\times4$ 与 $2\times1\times5$ 有 2 个公共的空洞,$2\times1\times4$ 与 $3\times1\times4$ 有 2 个公共的空洞,$3\times1\times4$ 与 $2\times1\times5$ 有 3 个公共的空洞,而 $2\times1\times4$、$3\times1\times4$、$2\times1\times5$ 有 1 个公共的空洞,故计算得空洞共有 24 个,即剩下的体积为 $80-24=56$. 故应选 C.

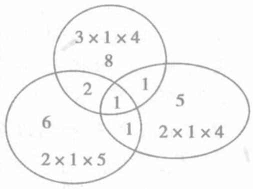


图 1-1-2

技巧点拨

本题为条件信息型开放题,应用交集思想将各个层面全面地交汇思考或结合韦恩图虚拟数据信息的主要特征进行"填图游戏式"的思考,进而进行定性分析或定量计算,从而得到结论,这在解题中是一种很好的尝试.

3.展望命题新动向

动向一 新概念集合类问题

以集合为背景的新概念问题是高考中常见的开放探究型问题,以集合概念为背景给出新的定义,使问题变得新颖巧妙.这类问题的特点是信息"新",意义深刻,往往具有一定的实际应用背景,可检测考生理解概念的程度和灵活应用知识的能力.

样题1 设全集 $I=\{1,2,3,\cdots,9\}$,A、B 是 I 的子集,若 $A\cap B=\{1,2,3\}$,就称集对 (A,B) 为"好集",那么所有好集的个数为

A. 6! B. 6^2 C. 2^6 D. 3^6

解析 要使 $A\cap B=\{1,2,3\}$,必须满足集合 A,B 中都含有元素 1,2,3,且对全集中的其他 6 个元素 4,5,6,7,8,9 中的每个元素,要么在集合 A 中,要么在集合 B 中或不在集合 A、B 中,这三种情况只能选其一,于是这 6 个元素所处集合的不同情况为 $3\times3\times3\times3\times3\times3=3^6$.而这 6 个元素所处不同集合的个数即为好集的不同个数.故应选 D.

热点点拨

新概念的引入不仅要求能深入理解新概念的信息，而且要能够调出已学习过的"旧"概念，进行相互对照．此类考题的关键在于一个"新"字，即背景新、概念新、题型新．解题时不要被"新"所迷惑，在理解与领会该概念后，掩藏在"新"的外衣下的往往是极为简单的知识点．

前瞻·预测1.（2007·湖南）设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，$S_1,S_2,\cdots,S_k$ 都是 M 的含两个元素的子集，且满足：对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$（$i\neq j$，$i、j\in\{1,2,3,\cdots,k\}$），都有 $\min\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\}\neq\min\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\}$（$\min\{x,y\}$ 表示两个数 x,y 中的较小者），则 k 的最大值是　（　）

A. 10　B. 11　C. 12　D. 13

动向二　集合元素个数的探究

集合元素个数的探究问题的考查通过三种语言：集合语言、符号语言、图形语言进行描述，其命题的依据也是从这三个方面着手，此类问题主要考查考生对集合概念及语言的理解．

样题2　已知集合 $\{a|a\in\mathbf{Z}$ 且 $\frac{2\,160}{3-a}\in\mathbf{Z}\}$，其中所有元素的和为________．

解析　问题需要从2 160的约数入手思考，找出2 160的所有约数，然后将 $3-a$ 作为一个整体，应用整体思想去求解．

$\because 2\,160=2^4\times3^3\times5^1$，$\therefore$ 2 160的所有正约数是由2，3，5这3个基本元素构成的，其中元素2可以构成新元素 2^0、2^1、2^2、2^3、2^4；元素3可以构成新元素 3^0、3^1、3^2、3^3；元素5可以构成新元素 5^0、5^1，将它们相乘即可得正约数，则数2 160的正约数共有 $5\times4\times2=40$ 个．从而可得数2 160的正、负约数共有 $2\times5\times4\times2=80$ 个，这80个数为40对互为相反数的数，即集合 $\{a|a\in\mathbf{Z}$ 且 $\frac{2\,160}{3-a}\in\mathbf{Z}\}$ 中共有80个元素．设为 $a_1,a_2,\cdots,a_{80}$，则 $3-a_1,3-a_2,\cdots,3-a_{80}$ 为数2 160的80个约数，由于这80个数是40对互为相反数的数，故其和为0，即 $(3-a_1)+(3-a_2)+\cdots+(3-a_{80})=0$，

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{80}=3\times80=240$，即集合 $\{a|a\in\mathbf{Z}$ 且 $\frac{2\,160}{3-a}\in\mathbf{Z}\}$ 中所有元素的和为240．

发散类比

本题在求解过程中应用了整体法，通过对2 160的所有约数进行分析，从而用列举法列出所有元素．集合元素个数问题的求解中，也要重视数轴的运用，利用数轴或韦恩图进行集合的运算，可以进一步掌握集合问题的常规处理方法．

前瞻·预测2. 已知集合 $P=\{x|(x-1)(x-4)\geqslant0\}$，$Q=\{n|(n+1)(n-5)<0,n\in\mathbf{N}^*\}$ 与集合 S，且 $S\cap P=\{1,4\}$，$S\cap Q=S$，那么集合 S 的元素的个数是　（　）

A. 2个　B. 2个或4个

C. 2个或3个或4个　D. 无穷多个

动向三　与集合相关的运算法则问题的探讨

集合命题中与运算法则相关的问题，是映射构建下的集合与集合、元素与元素间的运算相关性及封闭性的研究．此类考题多为竞赛题背景下的高观点命题，也是集合命题的一个新动向．

样题3　（2007·陕西理）设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$，在 S 上定义运算 $\oplus$ 为：$A_i\oplus A_j=A_k$，其中 k 为 $i+j$ 被4除的余数，i、$j=0,1,2,3$．满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为

A. 4　B. 3　C. 2　D. 1

解析　本题属于新定义概念的算法类开放题，考查了考生对新情境问题的探究能力，及分析数学问题与处理问题的能力．

$\because x\in S$，由定义有 $(A_0\oplus A_0)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2\neq A_0$，

$(A_1\oplus A_1)\oplus A_2=A_2\oplus A_2=A_0$，

$(A_2\oplus A_2)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2\neq A_0$，

$(A_3\oplus A_3)\oplus A_2=A_2\oplus A_2=A_0$，

$\therefore$ 满足关系式的 x 的个数有2个，故应选C．

领悟整合

转换思维模式可将复杂问题具体化、简单化，此类题的实质是将任意一个集合 S 中的每一个元素进行运算验证，它反映了集合元素运算的封闭性．

前瞻·预测3. 已知集合 $A=\{x|x=m+n\sqrt{2},m,n\in\mathbf{Z}\}$．

(1)证明：任何整数都是 A 的元素；

(2)设 $x_1,x_2\in A$，求证：$x_1\cdot x_2\in A$．

4 优化考题新演练

A.能力检测

（答案详见333）

1.（2008·郑州预测）已知集合 $M=\{1,-1\}$，$N=\{0,a+1\}$，若 $M\cap N=\{1\}$，则满足条件的所有实数 a 构成的集合是　（　）

A. $\{0,-1,1\}$　B. $\{0,-1\}$

C. $\{-1\}$　D. $\{0\}$

2.（2007·江苏模拟）给定集合 A,B，定义 $A*B=\{x|x=m-n,m\in A,n\in B\}$．若 $A=\{4,5,6\}$，$B=\{1,2,3\}$，则集合 $A*B$ 中的所有元素之和为　（　）

A. 15　B. 14　C. 27　D. -14

3. 已知集合 A 中有10个元素，B 中有6个元素，全集 U 有18个元素，$A\cap B\neq\varnothing$．设集合 $\complement_U(A\cup B)$ 有 x 个元素，则 x 的取值范围是　（　）

A. $3\leqslant x\leqslant8$，且 $x\in\mathbf{N}$　B. $2\leqslant x\leqslant8$，且 $x\in\mathbf{N}$

C. $8\leqslant x\leqslant12$，且 $x\in\mathbf{N}$　D. $10\leqslant x\leqslant15$，且 $x\in\mathbf{N}$

有一个青年人，请爱因斯坦说出成功的秘诀，他就写出了一个公式：A=X+Y+Z，并解释道："A代表成功，X代表劳动，Y代表适当的工作方法."青年人以为最大的秘诀在最后一项，就迫不及待地问："那么，Z代表什么呢？"不料他回答道："Z代表的是少说废话！"

4. 对于两个集合 S_1、S_2，我们把一切有序对 (x,y) 所组成的集合(其中 $x\in S_1$，$y\in S_2$)叫做 S_1 和 S_2 的笛卡儿积，记作 $S_1\times S_2$. 如果 $S_1=\{1,2\}$，$S_2=\{-1,0,1\}$，则 $S_1\times S_2$ 的真子集的个数为________个.

5. (2008·通州质检)集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，问是否存在这样的实数 a，使得 $B\subseteq A$，且 $A\cap B=\{1,a\}$？若存在，求出实数 a 的值；若不存在，说明理由.

B.高考回放

(答案详见333)

1. (2007·湖北)设 P 和 Q 是两个集合，定义集合 $P-Q=\{x|x\in P$，且 $x\notin Q\}$，如果 $P=\{x|\log_2x<1\}$，$Q=\{x||x-2|<1\}$，那么 $P-Q$ 等于 ( )

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant1\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|2\leqslant x<3\}$

2. (2008·上海春招)已知集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $2\leqslant x<3\}$，$B=\{x|-2\leqslant x<4\}$，则 $A\cup B=$________.

3. (2007·北京)已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant2)$，其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$，由 A 中的元素构成两个相应的集合：$S=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a+b\in A\}$，$T=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a-b\in A\}$. 其中 (a,b) 是有序数对，集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n. 若对于任意的 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 P.

(1)检验集合 $\{0,1,2,3\}$ 与 $\{-1,2,3\}$ 是否具有性质 P，并对其中具有性质 P 的集合，写出相应的集合 S 和 T；

(2)对任何具有性质 P 的集合 A，证明：$n\leqslant\dfrac{k(k-1)}{2}$；

(3)判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论.

第二讲　含绝对值的不等式与一元二次不等式

1 研习考纲重难点

考点一　含绝对值的不等式

梳理

(1)绝对值的几何意义：实数 a 的绝对值表示实数 a 在数轴上所对应的点 A 到原点的距离，且 $|a|\geqslant0$. $|x_1-x_2|$ 表示数轴上实数 x_1 与 x_2 所对应的两点间的距离.

(2) $|x|>a$ 及 $|x|<a(a>0)$ 分别表示数轴上到原点的距离大于 a，小于 a 的点，其解集为 $\{x|x>a$ 或 $x<-a\}$ 与 $\{x|-a<x<a\}$.

深化

(1)解绝对值不等式关键是正确去掉绝对值符号，转化为一般不等式求解，去绝对值常用的方法是定义法和平方法.

(2)一般地，$|ax+b|>c(c>0)$ 的解法是：先转化为不等式组 $ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$，再由不等式的性质求出原不等式的解集；$|ax+b|<c(c>0)$ 的解法是：先转化为不等式组 $-c<ax+b<c$，再由不等式的性质求出原不等式的解集.

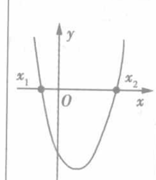
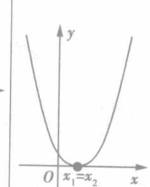
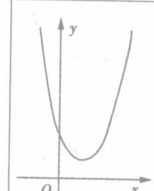
(3)含两个以上的绝对值的不等式，欲去掉绝对值符号，需先找出零点，划分区间，利用零点分段讨论，从而去掉绝对值符号.

考点二　一元二次不等式

梳理

(1)含有的未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式.

(2)一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 的解集：设相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根为 x_1,x_2 且 $x_1\leqslant x_2$，$\Delta=b^2-4ac$，则不等式的解的各种情况如下表：

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x|x\neq-\dfrac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

深化

(1) $\dfrac{x-a}{x-b}\geqslant0(a<b)$ 的解集为：$\{x|x\leqslant a$ 或 $x>b\}$；$\dfrac{x-a}{x-b}\leqslant0(a<b)$ 的解集为：$\{x|a\leqslant x<b\}$.

(2)从函数观点来看，一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0\ (a>0)$ 的解集是一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 在 x 轴上方的点的横坐标的集合.

妙语连珠

某校教职工宿舍贴有一副奇特而别致的婚联：一二三四五六七，ABCDEFG. 横批：OK. 此联颇费人猜测，一经点破，原来是一位音乐教师与一位外语教师喜结秦晋之好. 更奇妙的是横批中的“OK”中的“O”乃是乐谱符号，“K”还是英文字母，真可谓是同心永结，天缘地合.

2 探究解题新思路

题型一 解含绝对值的不等式

典例1 (2007 · 北京)已知集合 $A=\{x||x-a|\leqslant 1\}$,$B=\{x|x^2-5x+4\geqslant 0\}$.若 $A\cap B=\varnothing$,则实数 a 的取值范围是________.

解析 本题考查了集合的交集及一元二次不等式、绝对值不等式的解法,解题过程中应注意对集合进行化简.

由 $A=\{x||x-a|\leqslant 1\}=\{x|a-1\leqslant x\leqslant a+1\}$,$B=\{x|x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant 1\}$.$\because A\cap B=\varnothing$,

$\therefore \begin{cases}a+1<4,\\a-1>1,\end{cases}$ 解得 $2<a<3$,$\therefore a\in(2,3)$.

评价探究

高考中含绝对值的不等式的解法常以集合的形式出现,本题中集合 A 是含绝对值不等式的解的集合,而集合 B 是一元二次不等式的解集,准确、迅速地求出不等式的解集是求解这类问题的关键.

典例2 (2007 · 浙江)不等式 $|2x-1|-x<1$ 的解集是________.

解析 关键是去掉绝对值,可以分类讨论,也可以应用整体换元的方法转化求解.

解法一 原不等式可化为 $|2x-1|<x+1$,可等价于

$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\2x-1<x+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-1<0,\\-(2x-1)<x+1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x\geqslant \frac{1}{2},\\x<2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<\frac{1}{2},\\x>0,\end{cases}$ $\therefore \frac{1}{2}\leqslant x<2$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|0<x<2\}$.

解法二 $\because$ 原不等式可化为 $|2x-1|<x+1\Rightarrow -(x+1)<2x-1<x+1\Rightarrow 0<x<2$,

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|0<x<2\}$.

技巧点拨

用整体换元转化法解 $|f(x)|<g(x)$(或 $|f(x)|>g(x)$)型不等式,可以把不等式的右边看成常数 c,就同 $|f(x)|<c(c>0)$(或 $|f(x)|>c$)一样进行分析求解.最后的解集与分类讨论得到的解集是相同的,可以通过两种方法求解试试.

题型二 解一元二次不等式

典例3 不等式 $x^2-|x|<0$ 的解集是________.

解析 本题考查了含绝对值不等式的求解.

由 $x^2-|x|<0$ 可得 $0<|x|<1$,即得该不等式的解集为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

评价探究

一元二次不等式与含绝对值的不等式交汇命题可以考查基础不等式的掌握情况,这是高考考查的重点内容.解题时将 x^2 转化为 $|x|^2$ 可以先得出关于 $|x|$ 的不等式的解,此方法可以将问题化难为易,且易于掌握.

典例4 设不等式 $x^2-2ax+a+2\leqslant 0$ 的解集为 M,如果 $M\subseteq[1,4]$,则实数 $a\in$________.

解析 当不等式中含有字母系数时,应按字母的取值范围分类讨论,做到不重不漏.解题时,应注意将二次项系数化为正数.

$M\subseteq[1,4]$ 有两种情况:其一是 $M=\varnothing$,此时 $\Delta<0$;其二是 $M\neq\varnothing$,此时 $\Delta\geqslant 0$.分三种情况计算 a 的取值范围.

设 $f(x)=x^2-2ax+a+2$,有 $\Delta=(-2a)^2-4(a+2)=4(a^2-a-2)$.

(1)当 $\Delta<0$ 时,$-1<a<2$,$M=\varnothing\subsetneqq[1,4]$;

(2)当 $\Delta=0$ 时,$a=-1$ 或 2.当 $a=-1$ 时,$M=\{-1\}\not\subseteq[1,4]$;当 $a=2$ 时,$M=\{2\}\subseteq[1,4]$.

(3)当 $\Delta>0$ 时,$a<-1$ 或 $a>2$.设方程 $f(x)=0$ 的两根为 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,那么 $M=[x_1,x_2]$,$M\subseteq[1,4]\Leftrightarrow 1\leqslant x_1<x_2\leqslant 4\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)>0,\text{且}f(4)>0,\\\Delta>0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-a+3>0,\\18-7a>0,\\a<-1\text{ 或 }a>2,\end{cases}$

解得:$2<a<\frac{18}{7}$.

综上所述,$M\subseteq[1,4]$ 时,a 的取值范围是 $(-1,\frac{18}{7})$.

梳理总结

含参数的一元二次不等式关于字母参数的取值范围问题,其主要考查一元二次不等式的解与系数的关系及集合与集合之间的关系,涉及一元二次不等式根与系数的关系及集合与集合之间的关系,以及分类讨论的数学思想.

解一元二次不等式的步骤:

①把二次项的系数变为正数.(注意:如果是负数,那么在不等式两边都乘以 -1,把系数变为正数)

②解对应的一元二次方程.(注意:先看能否因式分解,若不能,再看 Δ,然后求根)

③求解一元二次不等式.(注意:根据一元二次方程的根及不等式的方向)

题型三 分式不等式及一元高次不等式的解法

典例5 (2007 · 南通联考)不等式 $3-\frac{2}{x}<x$ 的解集是________.

解析 化分式为整式,要注意转化过程中的等价转换.

解法一 原不等式可化为 $\frac{x^2-3x+2}{x}>0$,可等价于下面两个不等式组(Ⅰ)$\begin{cases}x>0,\\x^2-3x+2>0;\end{cases}$(Ⅱ)$\begin{cases}x<0,\\x^2-3x+2<0.\end{cases}$

1.不用再说.(猜一数学名词)
2.搬来数一数.(猜一数学名词)

答案:1.已知.2.运算.

不等式组(Ⅰ)的解集是$\{x|x>2$ 或 $0<x<1\}$.

不等式组(Ⅱ)的解集是$\varnothing$.

$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x|x>2$ 或 $0<x<1\}$.

解法二 化为高次不等式,用"序轴标根法".

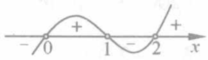


图 1-2-1

原不等式可化为$\frac{x^2-3x+2}{x}>0 \Leftrightarrow x(x^2-3x+2)>0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)>0$,在数轴上标根,如图 1-2-1,$\therefore$ 原不等式的解集为$\{x|x>2$ 或 $0<x<1\}$.

技巧点拨

关于分式不等式,一般将不等式转化为标准形式:即一边为零,将另一边进行通分,转化为等价的一元二次不等式或不等式组来解.解分式不等式不要轻易去分母,但在明确分母符号的情况下,也可考虑去分母,转化为整式不等式(组)来求解.另外分式不等式还可转化为高次不等式,用"序轴标根法"来解,利用"序轴标根法"时,应注意:①各一次因式中 x 的系数必须为正;②对于偶次或奇次重根,切记"奇穿偶不穿".

3 展望命题新动向

动向 不等式的创新应用

不等式试题主要体现了等价转化、函数与方程、分类讨论等数学思想,随着以培养创新精神和实践能力为重点的素质教育的深入发展,近年来高考命题越来越关注开放性、探索性等创新型问题.

样题 汽车沿道路 AE 行驶,AE 是由 AB(长 10 km),BC(长 5 km),CD(长 5 km),DE(长 6 km)组成,根据时刻表,汽车于9时从 A 处出发,经过 B、C、D 处的时刻分别为 $9\frac{1}{5}$时、$9\frac{3}{8}$时、$9\frac{2}{3}$时.如果汽车以匀速 v 行驶,为了使它经过 B、C、D 处的时刻与汽车时刻表的差的绝对值之和,再加上从 A 到 E 的行驶时间不超过 51.7 分钟,那么汽车行驶的速度 v 应是多少?

解析 依题意,得$\left|\frac{10}{v}-\frac{1}{5}\right|+\left|\frac{15}{v}-\frac{3}{8}\right|+\left|\frac{20}{v}-\frac{2}{3}\right|+\frac{26}{v}\leqslant\frac{517}{600}$.

设 $m=\frac{5}{v}$,则$\left|2m-\frac{1}{5}\right|+\left|3m-\frac{3}{8}\right|+\left|4m-\frac{2}{3}\right|+\frac{26}{5}m\leqslant\frac{517}{600}$.

(1)当 $m\leqslant\frac{1}{10}$时,不等式为:$\frac{1}{5}-2m+\frac{3}{8}-3m+\frac{2}{3}-4m+\frac{26}{5}m\leqslant\frac{517}{600}$,解得 $m\geqslant\frac{1}{10}$. $\therefore m=\frac{1}{10}$,$v=50$ km/h.

(2)当$\frac{1}{10}<m\leqslant\frac{1}{8}$时,不等式为 $2m-\frac{1}{5}-3m+\frac{3}{8}-4m+\frac{2}{3}+\frac{26}{5}m\leqslant\frac{517}{600}$,解得 $m\leqslant\frac{1}{10}$,与$\frac{1}{10}<m\leqslant\frac{1}{8}$矛盾,无解.

(3)当$\frac{1}{8}<m\leqslant\frac{1}{6}$时,不等式为 $2m-\frac{1}{5}+3m-\frac{3}{8}-4m+\frac{2}{3}+\frac{26}{5}m\leqslant\frac{517}{600}$,

解得 $m\leqslant\frac{77}{620}<\frac{1}{8}$,与 $m>\frac{1}{8}$矛盾,无解.

(4)当 $m>\frac{1}{6}$时,不等式为 $2m-\frac{1}{5}+3m-\frac{3}{8}+4m-\frac{2}{3}+\frac{26}{5}m\leqslant\frac{517}{600}$,解得 $m\leqslant\frac{631}{4\,260}<\frac{1}{6}$与 $m>\frac{1}{6}$矛盾,无解.

综上,$v=50$ km/h 时满足题意要求.

评价探究

通过对实际问题的分析、解决,建立不等式的数学模型,这一"建模"过程体现了命题的创新与不等式的实际应用,是"理论用于实践"的再现,在解题过程中可以学会用数学思想处理实际应用问题,另外分类讨论时要做到分类不重复,不遗漏.

前瞻·预测 (2008·湖北模拟)对于实数 x,若 $n\leqslant x<n+1$,$n\in\mathbf{N}$,规定$[x]=n$,则不等式$4[x]^2-40[x]+75\geqslant0$的解集是________.

4 优化考题新演练

A.能力检测

(答案详见 333)

1.(2008·海淀区期末)设集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant2\}$,$B=\{x|x\geqslant a\}$.若 $A\subseteq B$,则 a 的范围是 ( )

A. $a<1$ B. $a\leqslant1$

C. $a<2$ D. $a\leqslant2$

2.(2008·西城区测试)已知集合 $A=\{x|x^2-4x>0\}$,$B=\{x||x-1|\leqslant2\}$,那么集合 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $\{x|-1\leqslant x<0\}$ B. $\{x|3\leqslant x<4\}$

C. $\{x|0<x\leqslant3\}$ D. $\{x|-1\leqslant x<0$,或$3\leqslant x<4\}$

3.(2007·辽宁模拟)关于 x 的不等式 $ax+b<0$ 的解集为$\{x|x>1\}$,则关于 x 的不等式$\frac{ax-b}{x-2}>0$的解集为 ( )

A. $(1,2)$ B. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-1,2)$ D. $(2,+\infty)$

4. 若不等式$|x^2-8x+a|\leqslant x-4$的解集为$[4,5]$，则实数a的值等于____________.

5. 已知函数$g(x)=ax+b(a>0)$在$[-1,1]$上的最小值是$-c$，最大值是$1+c$，又方程$ax^2+(b-1)x+c=0$的两根为x_1，x_2，且满足$|x_2-x_1|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2a}$，试求$g(x)$的表达式.

6. 设$a\neq b$，解关于x的不等式$a^2x+b^2(1-x)\geqslant[ax+b(1-x)]^2$.

7. 已知$f(x)=x^2+px+q$.
(1)若$q=2$，且$f(x)<2$的解集A满足$(0,2)\subsetneqq A\subsetneqq(0,10)$，求$p$的取值范围；
(2)当p在(1)的范围内变化时，是否存在实数对(p,q)使不等式$|f(x)|>2$在区间$[1,5]$上无解？

B.高考回放

(答案详见334)

1. (2007·全国Ⅱ理)不等式$\frac{x-1}{x^2-4}>0$的解集是 ( )
A. $(-2,1)$　　B. $(2,+\infty)$
C. $(-2,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

2. (2007·广东理)设函数$f(x)=|2x-1|+x+3$，则$f(-2)=$__________；若$f(x)\leqslant5$，则x的取值范围是__________.

3. (2007·江西理)已知函数$f(x)=\begin{cases}cx+1\ (0<x<c),\\2^{-\frac{x}{c^2}}+k\ (c\leqslant x<1)\end{cases}$在区间$(0,1)$内连续，且$f(c^2)=\frac{9}{8}$.
(1)求实数k和c的值；
(2)解不等式$f(x)>\frac{\sqrt{2}}{8}+1$.

第三讲　逻辑联结词与四种命题

1 研习考纲重难点

考点一　命题与逻辑联结词

梳理　(1)命题：可以判断真假的语句叫做命题. 命题有真命题与假命题之分.
(2)逻辑联结词："或：两个简单命题至少一个成立；且：两个简单命题均成立；非：对一个命题的否定"这些词叫做逻辑联结词.
(3)复合命题：不含逻辑联结词的命题叫做简单命题. 由简单命题与逻辑联结词构成的命题，叫做复合命题. 其形式有：p或q，p且q，非$p(\neg p)$三种，其中非p也叫做命题p的否定.

深化　(1)数学中的定义、公理、公式、定理都是命题，但命题与定理是有区别的：命题有真假之分，而定理都是真的；命题一定有逆命题，而定理未必有逆定理.
(2)"或"与集合的"并"密切相关，集合的并集是用"或"来定义的. 命题"p或q"的三个含义：只有p成立、只有q成立、p与q同时成立.
(3)"或"、"且"联结词的命题的否定形式：命题"p或q"的否定是"非p且非q"，命题"p且q"的否定是"非p或非q". 其理解方式类似于集合中的$\complement_I(A\cup B)=(\complement_IA)\cap(\complement_IB)$、$\complement_I(A\cap B)=(\complement_IA)\cup(\complement_IB)$.

注意　(1)判断所给语句是否是命题. 此类问题要注意关键在于能不能判断其真假，不能判断真假的语句不能叫命题.
(2)判断复合命题的形式及构成它的简单命题. 此类命题要注意需根据其逻辑联结词"或"、"且"、"非"及其语句表达的含义进行判定.

考点二　复合命题的真假判断

梳理　真值表：

①

p	非p
真	假
假	真

②

p	q	p且q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

③

p	q	p或q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

深化　(1)非p形式的复合命题：当p为真时，非p为假；当p为假时，非p为真.
(2)p且q形式的复合命题：当p、q都为真时，p且q为真；当p、

法国数学家彭加勒(Poincare，1854～1912)曾经说过："逻辑是证明的工具，直觉是发明的工具."逻辑可以告诉我们走这条路或那条路保证不遇见任何障碍，但是它不能告诉我们哪条道路能引导我们到达目的地. 为此我们必须从远处瞭望目标，而教导我们瞭望本领的是直觉.

数学史话

q 中至少有一个为假时，p 且 q 为假.

(3) p 或 q 形式的复合命题：当 p、q 中至少有一个为真时，p 或 q 为真.

考点三 四种命题及其相互关系

梳理

(1) 四种命题

①在两个命题中，如果第一个命题的条件(或题设)是第二个命题的结论，且第一个命题的结论是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互逆命题. 如果把其中一个命题叫做原命题，那么另一个叫做原命题的逆命题.

②一个命题的条件和结论分别是另一个命题的条件的否定和结论的否定，这样的两个命题叫做互否命题. 把其中一个命题叫做原命题，另一个叫做原命题的否命题.

③一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论的否定和条件的否定，这样的两个命题互为逆否命题. 把其中一个命题叫做原命题，另一个叫做原命题的逆否命题.

(2) 四种命题之间的关系

①互逆关系：原命题与逆命题；否命题与逆否命题.

②互否关系：原命题与否命题；逆命题与逆否命题.

③互为逆否关系(等价关系)：原命题与逆否命题；逆命题与否命题.

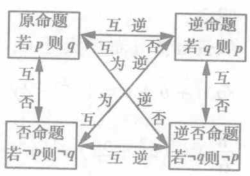


图 1－3－1

(3) 真假关系

原命题为真，它的逆命题不一定为真；

原命题为真，它的否命题不一定为真；

原命题为真，它的逆否命题一定为真.

深化

(1) 四种命题的定义和区别，主要在于命题的结论和条件的变化上.

(2) 在判断否命题的真假时，由逆命题和否命题等价，可以判断否命题的真假，因为逆命题容易写出，而否命题较难写.

注意

命题的否命题与命题的否定是不同的两个概念，若 p 表示命题，非 p 叫做命题的否定；如果原命题是"若 p 则 q"，那么命题的否定为"若 p 则非 q"；而否命题为"若非 p 则非 q"，既否定结论，又否定条件.

考点四 反证法

梳理

反证法证明命题的一般步骤如下：

①假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立.

②从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾.

③由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

深化

(1) 用反证法证明题目，一定要假设原结论的对立面成立，逐步推出矛盾才可以.

(2) 反证法适用的题型往往是从直接入手证明较难，而从反面容易推得矛盾的问题，并且最后的矛盾是比较明显的.

(3) 遇到"至多"、"至少"等问题时，通常考虑采用反证法去解决.

(4) 对一个命题进行否定，关键是对其关键词进行否定，常见的否定语句如下表：

正面词语	等于	大于	小于	是	都是	任意的	所有的	至多有 N 个
否定词语	不等于	不大于	不小于	不是	不都是	某个	某些	至少有 $N+1$ 个

注意

(1) 应用反证法解题时可能出现矛盾的四种情况：

①与题设矛盾；②与反设矛盾；③与公理、定理矛盾；④在证明过程中，推出自相矛盾的结论.

(2) 用反证法证明问题时，步骤要规范，并且是原来问题的对立面，可以看成是补集. 推理的最后，矛盾要明显才行.

2 探究解题新思路

题型一 复合命题的真假判断

典例1 (2007·枣庄模拟)给定下列结论：

①已知命题 p：存在 $x\in\mathbf{R}$，$\tan x=-1$；命题 q：对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1>0$，则命题"$p\land\neg q$"是假命题；

②已知直线 $l_1: ax+3y-1=0$，$l_2: x+by+1=0$，则 $l_1\perp l_2$ 的充要条件是 $\frac{a}{b}=-3$；

③若 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，则 $\tan\alpha=5\tan\beta$；

④圆 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 相交，所得弦长为 2.

其中正确命题的序号为________(把你认为正确的命题序号都填上).

解析 对各个命题分别判断如下：

对于①：因为当 $x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\tan x=-1$，所以命题 p 为真；又 $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，∴ 命题 q 也为真，

∴ 命题"$p\land\neg q$"是假命题，∴ 命题①正确.

对于②：∵ 当 $a=b=0$ 时，直线 $l_1: y=\frac{1}{3}$，$l_2: x=-1$，则 $l_1\perp l_2$，∴ 命题②不正确.

对于③：由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$，

$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，求得 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{12}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$，则 $\tan\alpha=5\tan\beta$，∴ 命题③正确.

对于④：圆 $x^2+y^2+4x+2y+1=0$ 可化为 $(x+2)^2+(y+1)^2=4$，直线 $y=\frac{1}{2}x$ 过圆心，则所得弦长为 4，不是 2，∴ 命题④不正确. 故应填①③.

名家论数

有个学生请教爱因斯坦逻辑学的用处. 爱因斯坦问他："两个人从烟囱里爬出去，一个满脸烟灰，一个干干净净，你认为哪一个该去洗澡？""当然是脏的那个."学生说.

"不对. 脏的那个看见对方干干净净，以为自己也不会脏，哪里会去洗澡？"

技巧点拨

复合命题的真假判断，主要是根据真值表，基础来自简单命题的真假性．判断复合命题的真假，首先是判断各个简单命题的真假性，这是基本前提．此类考题一般难度不大，但知识的覆盖面广，需要考生对所涉及的知识点的概念或公式、结论有较深层次的理解．

题型二 四种命题之间的关系

典例2 已知函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，写出命题："若$a+b\geqslant0$，则$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$"的逆否命题，并判断其真假，若是真命题，请加以证明．

解析 应注意分析清楚原命题的条件与结论，并充分利用逆否命题的定义．

逆否命题是"若$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，则$a+b<0$"，是真命题．

$\because a+b\geqslant0$，$\therefore a\geqslant-b$．又函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，$\therefore f(a)\geqslant f(-b)$①，同理可得，$f(b)\geqslant f(-a)$②，由①+②，得$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，即原命题为真命题．又原命题与其逆否命题是等价命题，$\therefore$"若$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，则$a+b<0$"为真．

技巧点拨

(1)本题是命题与函数、不等式综合的问题，通过四种命题的构成及真假的判断，把函数的单调性、不等式的性质有机地综合在一起，体现了在知识的交汇处立意的命题特点，这就要求考生对所学的知识要融会贯通．

(2)在判断一个命题的真假时，若直接判断它的真假比较困难，可以转化为判断其逆否命题的真假，这是因为一个命题和它的逆否命题是同真同假的．

题型三 反证法在证明题中的应用

典例3 若$p>0,q>0,p^3+q^3=2$，试用反证法证明$p+q\leqslant2$．

解析 本题证明的方法较多，下面仅介绍反证法的证明．

假设$p+q>2$，则$p>2-q$，那么$p^3+q^3>(2-q)^3+q^3=8-12q+6q^2-q^3+q^3$，即$2>8-12q+6q^2$．

$\therefore(q-1)^2<0$，这与$(q-1)^2\geqslant0$矛盾，

$\therefore$假设不成立，原命题正确，即$p+q\leqslant2$．

技巧点拨

反证法可以用于数学证明的各个方面，只要是从正面入手较难，都可以用反证法从反面推证．一般来说，出现"至多"、"至少"字样的题目可以用反证法．反证法证明题目的关键是假设后推出矛盾，矛盾主要有三种可能：与原命题的条件矛盾；与定义、公理、定理矛盾；与已知结论的反面矛盾．

典例4 若a、b、c均为实数，且$a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$，求证：a,b,c中至少有一个大于0．

解析 正向思考有难度，解释不清楚，故考虑用反证法证明之．

假设a、b、c都不大于0，即$a\leqslant0,b\leqslant0,c\leqslant0$，则有$a+b+c\leqslant0$．

而$a+b+c=(x^2-2y+\frac{\pi}{2})+(y^2-2z+\frac{\pi}{3})+(z^2-2x+\frac{\pi}{6})=(x^2-2x)+(y^2-2y)+(z^2-2z)+\pi$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(\pi-3)$，

所以$a+b+c>0$，与$a+b+c\leqslant0$矛盾．

故假设错误，从而原命题正确．

评价探究

反证法是一种常用的数学方法，属于一种间接证法．高考中证明问题的正面思考有困难时常考虑此方法．当待证命题中出现"不可能"、"一定"、"至多"、"唯一"等词语时，多运用反证法．运用反证法时常见词语的否定方式有："在"⇒"不在"；"是"⇒"不是"；"都是"⇒"不都是"；"大于"⇒"不大于"；"所有的…"⇒"至少有一个不…"；"至少一个"⇒"一个也没有"；"任意一个"⇒"存在某个不…"，等等．

3 展望命题新动向

动向一 分析推理判断题

新课标加强了简易逻辑学习的力度与深度，其知识点更为全面，作为全国各地的非新课标实验区的命题也受其影响．与此相关的分析推理判断题层出不穷，其对今后高考的命题改革也起到了一个推动与促进作用．

样题1 有甲、乙、丙、丁四位同学参加数学竞赛，其中有一位获奖．有人走访了四位同学，甲说："我获奖了"，乙说："甲、丙未获奖"，丙说："是甲或乙获奖"，丁说："是乙获奖"．比赛结果公布后表明，四人的话中只有两句是对的．则结果是

A. 甲获奖　　B. 乙获奖　　C. 丙获奖　　D. 丁获奖

解析 本题考查了简易逻辑的初步知识，考查分析问题与推理的能力．

设"话对"用"√"表示，"话错"用"×"表示，则对四人的话列表如下：

	若甲获奖	若乙获奖	若丙获奖	若丁获奖
甲的话	√	×	×	×
乙的话	×	√	×	√
丙的话	√	√	×	×
丁的话	×	√	×	×

由表可知：只有第一列符合题意，即甲、丙的话是对的，乙、丁的话是错的，即甲获奖了，故选 A.

技巧点拨

分析与推理判断题型的命题热点设置为由几个人的对话或对白，将相互干扰的信息透露出来，要求自行分析与提取重要的解题信息，从而推理与判断. 将每一个语句命题及复合命题之间的关系进行汇总，即可把实际问题和命题之间实现转化，这也是新型复合命题的特征. 本题的情景熟悉、立意新颖，若按常规解法依次对每人的话做真假讨论，显然很繁琐. 事实上，推理问题的一般解法是借助于表格，把各个已知条件的关系直观清楚地展示出来，通过正反对比与论证，从而确定得解.

前瞻 · 预测 1. 有一个游戏：将分别写有数字 1,2,3,4 的四张卡片随机发给甲，乙，丙，丁 4 个人，每人一张，并请 4 个人进行预测：

甲说：乙或丙拿到标有 3 的卡片；

乙说：甲或丙拿到标有 2 的卡片；

丙说：标有 1 的卡片在甲手中；

丁说：甲拿到标有 3 的卡片.

结果显示：甲、乙、丙、丁 4 个人预测的都不正确. 那么甲、乙、丙、丁 4 个人拿到的卡片依次为　　(　　)

A. 3 1 2 4　　B. 4 1 2 3　　C. 4 3 2 1　　D. 4 2 1 3

动向二　知识交汇性题型

逻辑联结词与四种命题的考查往往不是单独知识的单向考查，它总是依赖于与其他知识间的交汇. 高考命题大多是同一章节的交汇或不同章节间的知识交汇题. 本节的知识点可以看成是高中各章节知识点的起始，由此可以命制出异彩纷呈的考题.

样题 2　在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A、B 两点.

(1) 求证："如果直线 l 过点 $T(3,0)$，那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题；

(2) 写出 (1) 中命题的逆命题，判断它是真命题还是假命题，并说明理由.

解析　(1) 设过点 $T(3,0)$ 的直线 l 交抛物线 $y^2=2x$ 于点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=3$，此时，直线 l 与抛物线相交于点 $A(3,\sqrt{6})$、$B(3,-\sqrt{6})$. $\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$，其中 $k\neq 0$.

则 $\begin{cases} y^2=2x, \\ y=k(x-3), \end{cases}$ 得 $ky^2-2y-6k=0$，则 $y_1y_2=-6$.

又 $\because x_1=\frac{1}{2}y_1^2,\ x_2=\frac{1}{2}y_2^2$，

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{4}(y_1y_2)^2+y_1y_2=3.$

综上所述，命题"如果直线 l 过点 $T(3,0)$，那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题.

(2) 逆命题是：设直线 l 交抛物线 $y^2=2x$ 于 A、B 两点，如果 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，那么该直线过点 $T(3,0)$. 该命题是假命题. 例如：取抛物线上的点 $A(2,2)$，$B(\frac{1}{2},1)$，此时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$，直线 AB 的方程为 $y=\frac{2}{3}(x+1)$，而 $T(3,0)$ 不在直线 AB 上.

热点点拨

本题以命题的知识为载体，主要考查抛物线的基本性质、直线与抛物线的位置关系、向量的数量积、四种命题间的关系及命题的真假的判断. 本题别具匠心，构思巧妙，用最简单的材料，最朴素的方法，得到最一般的结论，考查最基本的能力，是简易逻辑命题改革的一个新的亮点，备受各级各类命题者的青睐，因而频频出现在各类考试卷中.

前瞻 · 预测 2. (2007 · 临沂质检) 已知 $\overrightarrow{OA}=(0,-2)$，$\overrightarrow{OB}=(0,2)$，直线 l：$y=-2$，动点 P 到直线 l 的距离为 d，且 $d=|\overrightarrow{PB}|$.

(1) 求动点 P 的轨迹方程；

(2) 直线 m：$y=\sqrt{k}x+1(k>0)$ 与点 P 的轨迹交于 M、N 两点，当 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}\geqslant 17$ 时，求直线 m 的倾斜角 α 的取值范围；

(3) 设直线 h 与点 P 的轨迹交于 C、D 两点，写出命题"如果直线 h 过点 B，那么 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=-12$"的逆命题，并判断该逆命题的真假，请说明理由.

4 优化考题新演练

A. 能力检测

(答案详见 334)

1. (2007 · 陕西模拟) 已知 p 是真命题，q 是假命题，则下列复合命题中，真命题的是　　(　　)

A. p 且 q　　B. $\neg p$ 且 $\neg q$

C. $\neg p$ 或 $\neg q$　　D. $\neg p$ 或 q

2. (2008 · 海淀区期末) 设 m、n 是不同的直线，α、β、γ 是不同的平面，有以下四个命题：

①若 $\alpha /\!/ \beta$，$\alpha /\!/ \gamma$，则 $\beta /\!/ \gamma$；②若 $\alpha\perp\beta$，$m /\!/ \alpha$，则 $m\perp\beta$；③若 $m\perp\alpha$，$m /\!/ \beta$，则 $\alpha\perp\beta$；④若 $m /\!/ n$，$n\subset\alpha$，则 $m /\!/ \alpha$.

智慧火花

赵先生欲从 A 国前往 B 国，途中经过岔路，其中一条为通往 B 国之路，另一条是回到 A 国之路. 每一条岔路上均放置了可供查询的机器人，只要付费一千元，机器人便会提供答案. 放置于通往 A 国之路的机器人说实话，放置于通往 B 国之路的机器人会撒谎，而且机器人只能说 A 国语言.（接下页）

其中真命题的序号是 ( )

A. ①④ B. ②③ C. ②④ D. ①③

3. (2007·江苏模拟)已知命题“$p:|x-1|\geqslant 2$”,命题“$q:x\in\mathbf{Z}$”,如果“p 且 q”与“非 q”都为假命题,则满足条件的 x 的集合为 ( )

A. $\{x|x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1,x\notin\mathbf{Z}\}$

B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3,x\notin\mathbf{Z}\}$

C. $\{-1,0,1,2,3\}$

D. $\{0,1,2\}$

4. (2008·湖北八校联考)命题 P:若 $x^2<2$,则 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$. 则 P 的否命题是________,命题非 P 是________.

5. (2007·临沂质检)有下列说法:

①函数 $f(x)=\ln x-\frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间是 $(2,3)$;

②命题 p:存在 $x\in\mathbf{R}$,使 $x-1>0$,则 $\neg p$:任意 $x\in\mathbf{R}$,$x-1<0$;

③一组数据方差越小,样本数据分布越集中、稳定;

④乒乓球赛前,决定谁先发球,抽签方法是从 1~10 共 10 个数中各抽 1 个,再比较大小,这种抽签方法是公平的;

⑤若函数 $f(x)=\lg(x^2+ax-a)$ 的值域是 $\mathbf{R}$,则 $a\leqslant -4$ 或 $a\geqslant 0$.

以上五个命题中,真命题是__________(写出所有真命题的序号).

B.高考回放

(答案详见 334)

1. (2007·北京)对于函数①$f(x)=\lg(|x-2|+1)$,②$f(x)=(x-2)^2$,③$f(x)=\cos(x+2)$,判断如下三个命题的真假:命题甲:$f(x+2)$ 是偶函数;命题乙:$f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数,在 $(2,+\infty)$ 上是增函数;命题丙:$f(x+2)-f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是 ( )

A. ①③ B. ①② C. ③ D. ②

2. (2007·上海)对于非零实数 a,b,以下四个命题都成立:

①$a+\frac{1}{a}\neq 0$;

②$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

③若 $|a|=|b|$,则 $a=\pm b$;

④若 $a^2=ab$,则 $a=b$.

那么,对于非零复数 a,b,仍然成立的命题的所有序号是__________.

3. (2007·江苏)如图 1-3-2,在平面直角坐标系 xOy 中,过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线,与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A、B 两点,一条垂直于 x 轴的直线,分别与线段 AB 和直线 $l:y=-c$ 交于点 P,Q.

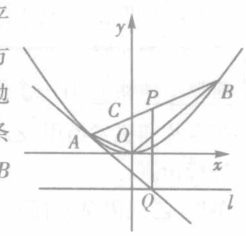


图 1-3-2

(1)若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$,求 c 的值;

(2)若 P 为线段 AB 的中点,求证:QA 为此抛物线的切线;

(3)试问(2)的逆命题是否成立?说明理由.

第四讲 充要条件

1 研习考纲重难点

梳理

(1)充分条件:如果已知 $p\Rightarrow q$,即若 p 则 q,称 p 是 q 的充分条件.

(2)必要条件:如果已知 $q\Rightarrow p$,即若 q 则 p,称 p 是 q 的必要条件.

(3)充要条件:如果既有 $p\Rightarrow q$,又有 $q\Rightarrow p$,就记作 $p\Leftrightarrow q$,这时 p 既是 q 的充分条件,又是 q 的必要条件,我们就说 p 是 q 的充分必要条件,简称充要条件.

(4)既不充分又不必要条件:如果 p、q 之间的关系为:$p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$,这时就称 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

深化

(1)从集合角度理解

①$p\Rightarrow q$,相当于 $P\subseteq Q$,即 $P\subsetneqq Q$ 或 $P=Q$. 如图 1-4-1. 即:要使 $x\in Q$ 成立,只要 $x\in P$ 就足够了——有它就行.

图 1-4-1

②$p\Leftrightarrow q$,相当于 $P=Q$. 如图 1-4-2. 即:互为充要的两个条件刻画的是同一事物.

图 1-4-2

若赵先生只会说 A 国语言中的“走这里通向 B 国吗?”他应如何以花钱最少的方式,打听出通往 B 国的道路?

答案:用手指向刚走过的路,用他会说的 A 国语言问机器人,例如他问其中一个机器人“走这里通向 B 国吗?”若回答“是”便继续走,若回答“不是”则走另一条路.

智慧火花