高职高专“十一五”规划教材

● 公共基础课系列

应用数学

（理工类）上册

总主编　李　华

本册主编　潘晓伟

数学是研究数量关系与空间形式的一门科学。学习数学有助于提高学生分析问题和解决问题的能力、抽象思维的能力、空间图形想象的能力。本书根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写，突出“以学生发展为本”的教育思想，以“必需、够用、好用、实用”为原则，讲解了函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分等内容。

大象出版社

全国优秀出版社

高职高专"十一五"规划教材

公共基础课系列

应用数学

（理工类）

上册

总 主 编　李　华

本册主编　潘晓伟

大象出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学:理工类.上册/李华总主编;潘晓伟本册主编.
—2版.—郑州:大象出版社,2006.9(2008.9重印)
高职高专"十一五"规划教材.公共基础课系列
ISBN 978-7-5347-4287-3

Ⅰ.应… Ⅱ.①李…②潘… Ⅲ.应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第105901号

本书编委会名单

总主编 李 华
本册主编 潘晓伟
副主编 聂守丰 黄德成
编 委 常巧霞 陈 敏 李山林
严正香 郭海彦

策划组稿 王茂森
责任校对 何 众
封面设计 王晶晶
出 版 大象出版社(郑州市经七路25号 邮政编码450002)
网 址 www.daxiang.cn
发 行 全国新华书店经销
制 版 郑州普瑞印刷制版服务有限公司
印 刷 河南第一新华印刷厂
版 次 2008年9月第2版 2008年9月第1次印刷
开 本 787×1092 1/16
印 张 17.25
字 数 406千字
定 价 24.80元

印厂地址 郑州市经五路12号
邮政编码 450002 电话 (0371)65957860-351

大象出版社

大象出版社为全国优秀出版社，其前身是河南教育出版社，1983年12月成立，1996年10月经国家新闻出版署批准更为现名。大象出版社主要出版大中小学各类教材、教学参考书、教学辅助读物、学生课外读物及教育理论著作、工具书与有关学术著作。出版社在出版直接服务于教学的各类教育读物的同时，还致力于弘扬中华优秀传统文化。已基本形成编、印、发、物配套齐全，书、报、刊、电子读物良性互动的多元化发展格局。

建社20多年来，大象出版社出版图书6000余种，发行20多亿册。有400余种图书获得包括国家图书奖、“五个一工程”图书奖、中国图书奖在内的省、部级以上优秀图书奖，百余种图书发行海外市场。

2006年全国图书出版业竞争力研究课题组从反映出版社的六种能力（生产力、销售力、盈利力、组织力、资源力和成长力）对全国572家出版社进行综合排名，我社名列第40位。2007年在首届中国出版政府奖中我社连中四元。2007年我社通过ISO 9000认证，被评为AAA级信誉单位。

在新的形势下，大象出版社积极进取，不断强化其在教育图书出版领域的优势，充分展示大象出版社在新课程改革中锐意进取的雄姿和深厚实力。配合国家新课程改革，目前已形成了从小学至高中12个年级、国标教材与地方教材相结合的大象版教材体系。随着综合实力的加强，大象出版社近年来加大了大中专教材的出版力度，大中专教材也渐成体系。

今后我们会加大力度不断开发新品种的系列教材，欢迎有编写意向的老师积极与我们联系（daxianggj@163.com）。

大象出版社将继续秉承“脚踏实地，善于负重，坚忍不拔，勇往直前”的大象精神，实践“服务教育，介绍新知，沟通中外，传承文化”的出版宗旨，为读者奉献更多的精品图书！

前 言

本套教材是根据教育部颁布的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，组织了十多所高职院校负责教学工作的领导和多年从事一线教学的教师，经过深入探讨，结合高职院校所设专业、学生特点以及教育教学的特点而编写的。

教材突出“以学生发展为本”的教育思想，以“必需、够用、好用、实用”为原则，以培养学生良好的学习习惯、培养学生的创新精神为目的。

教材在编写时注意了以下问题：

1. 考虑到目前高职院校学生的数学基础以及各校基础课程学时数普遍压缩的实际情况，教材编写把握“够用”的原则，不过分强调数学体系的系统性，删去不必要的推导、证明，强调结论、定理的应用；删去在现实生活中、专业学习中涉及不多的内容，突出实际应用。

2. 教材在知识点、基本概念的引入、公式结论的应用中注意从实际问题出发，使同学们认识到数学不仅仅是解题，而且可以解决我们身边的很多实际问题。同时还注意为专业课服务，尽量采用专业课所涉及的实例。

考虑到学生对数学能力的不同需求，为满足基础较好的同学进一步深造的要求，教材在例题与习题的配备上编入了一些专升本考试中常见的题型，供学有余力的同学阅读，培养这些同学的解题能力。

本套教材分上、下两册，为适应大多数学校的教学要求，上册内容以微积分为主，下册内容以线性代数和概率与统计初步为主。考虑到高职院校所开设专业的多样性，不同专业对教学内容、教学能力的要求也不相同，因此，教材在内容上可供选择的弹性较大，各使用学校可在编写教学计划中自主取舍。

本套教材适合高职高专院校理工科类的专业使用，高职高专院校经济类的专业、五年制大专以及“3 + 2”大专学生学习高等数学课程时也可选用。

本书由李华任总主编，潘晓伟任本册主编。其他编写人员有聂守丰、黄德成、常巧霞、陈敏、李山林、严正香、郭海彦。

参加上册统稿的有：李华、潘晓伟、陈侃、陈玉发、陈全红。

本教材经过一些高职院校的使用，执教者们给我们提出了合理的建议，我们结合实际情况，作了一定的修改，力图使本书更加好用，更加实用。

由于水平所限,时间仓促,教材中难免还有欠妥之处,敬请广大师生、读者批评指正。

作者

2008.6

目 录

第一章　函数、极限与连续

微积分是人类文明发展史上理性智慧的精华，它的出现，不仅使数学的面貌焕然一新，而且极大地推动了数学的发展，同时也推动了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学及应用科学各个分支学科的发展，并在这些学科中有着越来越广泛的应用，特别是计算机的出现，更是有助于这些应用的不断发展．

微积分是微分学和积分学的合称，是高等数学的核心，是专门研究函数的数学分支，故本章进一步研究函数的问题．

1.1　函数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是微积分学的主要研究对象．本节将在中学数学已有函数知识的基础上进一步讨论函数概念，并介绍一些函数的简单性态．

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在某一数集 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的对应法则 f，有唯一确定的值与之对应，则称 y **是** x **的函数**，记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**函数**（**因变量**），自变量 x 的取值范围 D 称为函数的**定义域**．

对于确定的 $x_0\in D$，根据函数的定义，y 有唯一确定的值 y_0 与之相对应，称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=y|_{x=x_0}=f(x_0),$$

函数值的集合称为函数的值域，记作 M．

显然，一个函数的值域由定义域 D 及对应法则 f 完全确定，所以，函数的对应法则和定义域被称为函数的两个要素．

例如，$f(x)=3x^2+2x-1$，函数 $f(x)$ 确定的对应法则为

$$f(\quad)=3(\quad)^2+2(\quad)-1.$$

例 1 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$,求$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$f(x+1)$.

解 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1}=\dfrac{4}{5}$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=\frac{x^2}{1+x^2}.$$

$$f(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2+1}=\frac{1}{x^2+2x+2}.$$

例 2 设$f(x+1)=x^2+2$,求$f(x)$.

解 方法 1:令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,

所以 $f(t)=(t-1)^2+2=t^2-2t+3$.

所以 $f(x)=x^2-2x+3$.

方法 2:$f(x+1)=x^2+2=(x+1-1)^2+2$

$$=(x+1)^2-2(x+1)+3.$$

所以 $f(x)=x^2-2x+3$.

一般地,函数 $y=f(x)$的定义域是使 $y=f(x)$有意义的 x 的集合;若 $y=f(x)$是由实际问题产生,那么函数 $y=f(x)$的定义域由该实际问题确定.

例如,$y=x^2$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

又如,一圆盘的半径为 r,则其面积 A 为 r 的函数,

$$A=\pi r^2.$$

由问题的实际意义可知,函数 $A=\pi r^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$(注意:定义域不是 $\mathbf{R}$).

例 3 求函数$f(x)=\sqrt{2-x^2}+\lg(x+1)$的定义域.

解 当$2-x^2\geqslant0$ 时,即 $|x|\leqslant\sqrt{2}$ 时,$\sqrt{2-x^2}$有定义. 所以$\sqrt{2-x^2}$的定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

当 $x+1>0$ 时,即 $x>-1$ 时,$\lg(x+1)$有定义. 所以 $\lg(x+1)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

当且仅当$\sqrt{2-x^2}$和 $\lg(x+1)$同时都有定义时,函数$f(x)$有定义,所以,所求函数的定义域为:

$$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap(-1,+\infty)=(-1,\sqrt{2}].$$

在函数定义中,对应法则用f表示,也可以用其他记号,如 $g,h,F,\varphi,\cdots$来表示,所以 y 与 x 的函数关系,也可以记为 $y=g(x)$,$y=h(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$,…但应注意,在同一场合,不同的函数应该用不同的记号.

确定一个函数,主要是对应法则和定义域,至于自变量和因变量用什么记号来表示无关紧要. 只要定义域相同,f代表同一个对应法则,则 $y=f(x)$和 $u=f(v)$就是同一个函数.

例如,$y=\dfrac{1}{2}x^2+1$ 与 $s=\dfrac{1}{2}t^2+1$ 就是同一个函数.

2. 函数的表示法

函数可用三种不同的方法来表示：公式法、表格法、图象法.

公式表示法便于理论研究、推导论证、数值计算等，它的优点是形式简明，表达清晰、紧凑，缺点是抽象、不易理解. 表格表示法在设计、统计工作中常用，其优点是使用方便，如：对数表、三角函数表、天气预报中某地某年某月的最高气温统计表等. 它的缺点是不便于分析研究，也不直观. 图象表示法在工程中常用，例如生产的进度、仪器的记录等. 其优点是直观、形象，可直接从图形看出函数的变化.

例如，一质点从距地面高为 H 的位置自由下落，t 秒后，下落的距离 s 与时间 t 有如下关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2\left(0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2H}{g}}\right),$$

其中 g 为重力加速度. 此解析式就是区间$\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$上的一个函数.

1.1.2 分段函数

在电子技术中，经常会遇到一种矩形波(图 1－1)，图中表示每隔 100μs 产生一个 10V 的电压脉冲，持续时间是 10μs. 电压 u 随时间 t 而变，在一个周期内，它们之间的依赖关系可以表示成

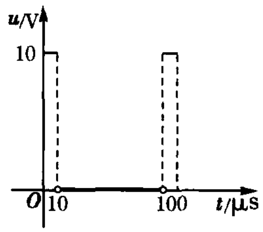


图 1－1

$$u=\begin{cases}10, & 0\leqslant t\leqslant 10,\\ 0, & 10<t<100.\end{cases}$$

像这样，自变量在不同的定义范围内用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**. 要注意本例是用两个式子表示的函数，而不是两个函数. 该函数的定义域为$[0,100)$.

分段函数的一般形式为：

$$y=\begin{cases}f(x), & x\in D_1\\ g(x), & x\in D_2\end{cases}$$

其定义域为 $D_1\cup D_2$.

下面列出几个数学上常见的分段函数：

(1) 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其定义域为$(-\infty,+\infty)$，如$|-2|=2$，$|3|=3$.

(2) 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 其定义域为 $\mathbf{R}$. 如 $\operatorname{sgn}2=1$，$\operatorname{sgn}(-4)=-1$.

(3) 取整函数 $y=[x]$，$x\in\mathbf{R}$. 表示“不超过 x 的最大整数”，如$[1.2]=1$，$[0.7]=0$，$\left[-\frac{2}{3}\right]=-1$，等等. 其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 4 请把由图 1－2 表示的函数用解析式表达出来.

解 所求函数 $s(t)$ 为一分段函数，其解析式如下：

$$s(t)=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2, & 1<t\leqslant 3,\\ 2(t-2), & 3<t\leqslant 5.\end{cases}$$

定义域为$[0,5]$.

一般来说,分段函数需分段讨论.

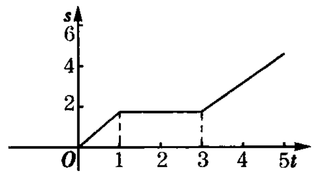


图 1-2

例 5 设函数$f(x)=\begin{cases}-1+x^2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1+x^2, & x>0.\end{cases}$

求:(1) $f(x)$的定义域;

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f(-3)$;

(3) 作$f(x)$的图形.

解 (1) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$,

$f(0)=0$,

$f(-3)=-1+(-3)^2=8$.

(3) 该分段函数的图形如图 1-3.

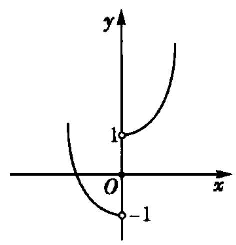


图 1-3

1.1.3 反函数

在函数的定义中有两个变量,一个是自变量,一个是因变量,但在实际问题中,哪一个是自变量,并不是绝对的,要根据所研究的具体问题来决定.

例如,一物体以 20km/h 的速度做匀速直线运动. 在 4h 内,所走过的路程与时间之间有函数关系

$$y=20x.$$

显然,定义域为$[0,4]$,值域为$[0,80]$.

可以看出,对于任意的$x\in[0,4]$,都有唯一确定的$y\in[0,80]$与之对应.

反过来,对于任意的$y\in[0,80]$,也都有唯一确定的$x\in[0,4]$与之对应,所以x也是y的函数. 即

$$x=\frac{y}{20}.$$

它的定义域为$[0,80]$,值域为$[0,4]$.

定义 1.2 设函数$y=f(x)$,其定义域为D,值域为M,如果对于任意的$y\in M$,都可以从关系式$y=f(x)$确定唯一的$x\in D$与之对应,这样就确定了一个以y为自变量的新函数,叫做函数$y=f(x)$的**反函数**,记作$x=f^{-1}(y)$,其定义域是M,值域是D.

在函数$x=f^{-1}(y)$中,y表示自变量,x表示函数. 但是习惯上,经常用x表示自变量,用y表示函数. 因此,反函数通常改写为

$$y=f^{-1}(x), x\in M.$$

函数$y=f(x)$的图形与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称.

例 6　求函数 $y=2x-1$ 的反函数.

解　由 $y=2x-1$ 解出 x,得 $x=\frac{1}{2}(y+1)$.

将 x,y 互换,改写为 $y=\frac{1}{2}(x+1)$. 所以,$y=2x-1$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}(x+1)$.

还有许多反函数的例子,如 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数;$y=e^x$ 是 $y=\ln x$ 的反函数;等等.

注意:并不是任何函数在其定义域内都存在反函数.

1.1.4　基本初等函数及其图形

常数函数 $y=C$(C 为常数).

幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)(图 1－4).

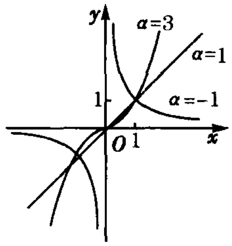
指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)(图 1－5).

对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)(图 1－6).

三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$(图 1－7).

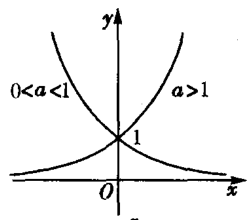
反三角函数 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$(图 1－8).

这六种函数统称为基本初等函数. 这些函数的性质在中学已学过,今后会经常用到.



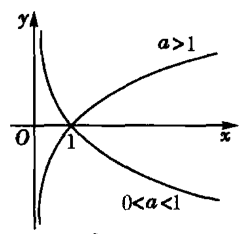
$y=x^{\alpha}$

图 1－4



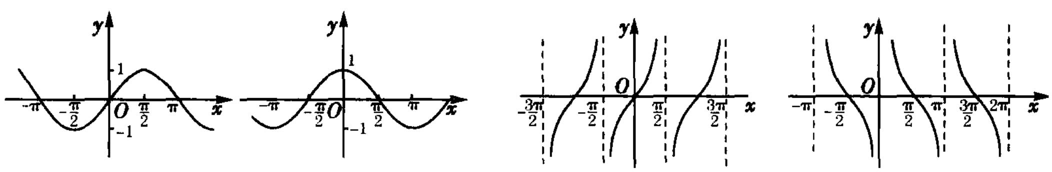
$y=a^x$

图 1－5



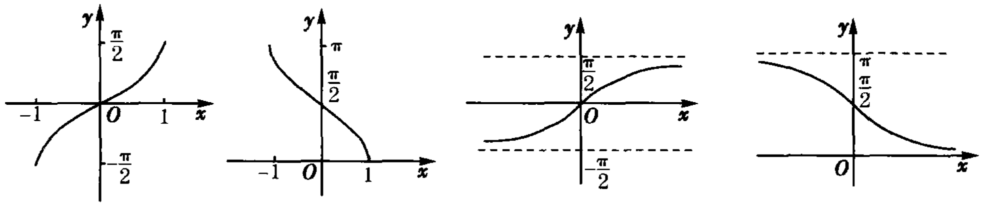
$y=\log_a x$

图 1－6



$y=\sin x$　　$y=\cos x$　　$y=\tan x$　　$y=\cot x$

图 1－7



$y=\arcsin x$　　$y=\arccos x$　　$y=\arctan x$　　$y=\operatorname{arccot} x$

图 1－8

1.1.5 复合函数

对于给定的两个函数,例如 $y=u^2$ 及 $u=\lg x(x>0)$,通过将后一个函数代入前一个函数,就产生一个新的函数

$$y=(\lg x)^2(x>0),$$

称为是由前两个函数复合而成的**复合函数**.一般地,有如下的复合函数概念:

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且当后一函数 $u=\varphi(x)$ 的自变量 x 在某一区间 I 上取值时,相应的 u 值可使 y 有定义,那么我们称 y 是 x 的一个定义于 I 的复合函数,记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

由复合函数概念可知,构成复合函数的关键是:后一个函数的值域至少要有一部分含于前一函数的定义域中.如:

(1) $y=\sin^2x$ 是由 $y=u^2,u=\sin x$ 复合而成的复合函数,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

(2) $y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u},u=1-x^2$ 复合而成的,其定义域为$[-1,1]$,它只是 $u=1-x^2$的定义域的一部分.

(3) $y=\arcsin u,u=2+x^2$ 不能复合成一个函数,因为无论 x 取什么值,$u=2+x^2\geqslant 2$,而 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,相应的 u 值不能使 $y=\arcsin u$ 有定义.

例 7 下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=(1+\ln x)^5$; (2) $y=\sqrt{\cos\sqrt{x}}$.

解 (1) $y=u^5,u=1+\ln x$.

(2) $y=\sqrt{u},u=\cos v,v=\sqrt{x}$.

1.1.6 初等函数

如果函数可用一个解析式子表示,且这个解析式子是由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合而构成的,则称这类函数为**初等函数**,否则称为非初等函数.

例如,$y=\cos(e^x)+3\lg\sqrt{1+x}$是初等函数.

一般来说,分段函数不是初等函数.但有些函数如$y=|x|=\sqrt{x^2}$,可以看做是由函数$y=\sqrt{u}$和 $u=x^2$ 复合而成,所以它是初等函数.类似地,函数 $y=|x+1|$等也是初等函数.

微积分的主要研究对象为初等函数.

1.1.7 函数的简单性态

1. 单调性

若对于某数集 I 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有$f(x_1)<f(x_2)$,则称$f(x)$在 I 上单调递增,若 I 为区间,则区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调递增区间;若当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>$

$f(x_2)$，则称$f(x)$在I上单调递减，区间I称为函数$f(x)$的单调递减区间.

单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**，其对应区间统称为**单调区间**. 图 1－9 中表示的函数均为单调递增函数（或增函数）.

图 1－9

图 1－10 中表示的函数均为单调递减函数（或减函数）.

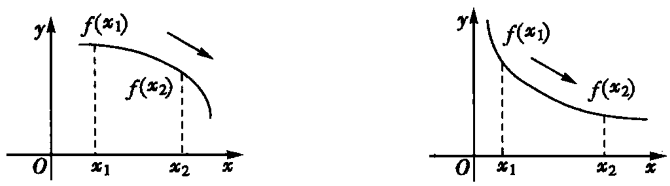


图 1－10

$y=x$，$y=x^3$，$y=\sqrt[3]{x}$，$y=\sqrt{x}$，$y=e^x$，$y=2^x$，$y=\ln x$，$y=\arctan x$ 等在它们的定义域内都是增函数. 而 $y=e^{-x}$，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$，$y=\operatorname{arccot}x$ 在它们的定义域内都是减函数.

2. 有界性

若存在正数M，使得对于某一数集I的任何x值总有$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在I上有界；否则，称为无界.

$y=\sin x$，$y=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界，因为在$(-\infty,+\infty)$上，$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$.

而$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

一个函数，如果在它的整个定义域内有界，就称该函数为有界函数. 有界函数的图形必位于两条直线$y=M$与$y=-M$之间（图 1－11）.

$y=\sin x$ 是有界函数，其图形位于$y=1$与$y=-1$之间（图 1－12）.

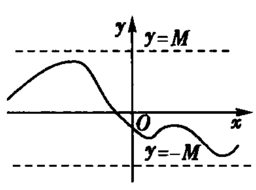


图 1－11

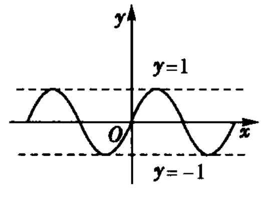


图 1－12

3. 奇偶性

设I为关于原点对称的区间，若对于任意$x\in I$，都有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**；若$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称(图 1-13).

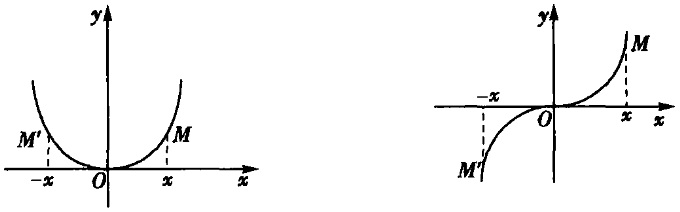


图 1-13

(1) $f(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 为偶函数.

(2) $f(x)=x^3$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$, $f(x)=\cot x$ 为奇函数.

(3) $f(x)=|\sin x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 为偶函数.

(4) $f(x)=|x+1|$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 为非奇非偶函数.

4. 周期性

若存在不为零的数 T，使得对于任意 $x\in I$，有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 若 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则 $kT(k\in Z)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

$f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ 为周期函数，周期为 2π；$f(x)=\tan x$, $f(x)=\cot x$ 为周期函数，周期为 π.

1.1.8 建立函数关系应用举例

寻找函数关系是高等数学研究的课题之一，下面从几个实际问题入手，介绍利用简单的几何或物理知识建立函数关系. 在以后的一些章节中还将介绍利用微积分的知识建立函数关系.

例 8 用铁皮做一容积为 V 的圆柱形罐头筒，试将它的表面积表示为底半径的函数，并求定义域.

解 设罐头筒的底半径为 r，表面积为 S，且其高为 h(图 1-14)，根据体积公式和面积公式有：$V=\pi r^2h$, $S=2\pi r^2+2\pi rh$.

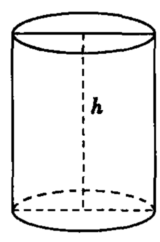


图 1-14

由 $V=\pi r^2h$，得 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，代入 $S=2\pi r^2+2\pi rh$，可得

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r},$$

其定义域为 $(0,+\infty)$.

例 9 设有一圆锥形容器，容器的底半径为 Rcm，高为 Hcm. 现以 $a\text{cm}^3/\text{s}$ 的速率往容器内注水. 试把容器中的水的容积 V 分别表示成时间 t 及水高 h 的函数(图 1-15).

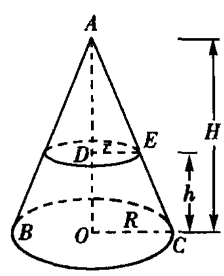


图 1-15

解 (1) 显然 t 秒时容器中水的容积为

$$V=at,\qquad t\in\left[0,\frac{\pi R^2H}{3a}\right]$$

(2) 设当容器中水的高度为 h 时水的容积为 V，并设此时水面的半径为 r. 根据锥体体积公式有

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi r^2(H-h).\tag{1}$$

因为$\triangle AOC\backsim\triangle ADE$,所以有

$$\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}.$$

即

$$r=\frac{R}{H}(H-h).$$

代入(1)式,得

$$V=\frac{\pi R^2H}{3}\left[1-\left(1-\frac{h}{H}\right)^3\right],h\in[0,H].$$

例 10　如图 1 - 16 所示,在 O 与 A 之间引一条平行于 y 轴的直线 MN,试将 MN 左边阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

解　当直线 MN 位于区间$[0,1]$内,即 $x\in[0,1]$时,

$$S=\frac{1}{2}x^2.$$

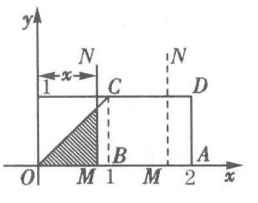


图 1 - 16

当直线 MN 位于区间$(1,2]$内,即 $x\in(1,2]$时,

$$\begin{aligned}S&=\triangle OBC\text{ 的面积}+\text{矩形 }BCNM\text{ 的面积}\\&=\frac{1}{2}+(x-1)=x-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以面积 S 为

$$S=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x\in[0,1],\\ x-\frac{1}{2}, & x\in(1,2].\end{cases}$$

1.1.9　邻域的概念

最后,我们介绍邻域的概念.

一元邻域有两种:(1)实心邻域;(2)空心邻域.

(1) 把以 x_0 为中心,以 δ 为半径的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为 **x_0 的 δ 实心邻域**,简称 x_0 的邻域,记作 $U(x_0,\delta)$(δ 表示很小的正数).

如,$U(3,0.02)=(2.98,3.02)$,表示以 3 为中心,以 0.02 为半径的开区间;又

$$(-1.03,-0.97)=U(-1,0.03).$$

(2) x_0 的实心邻域 $U(x_0,\delta)$去掉中心点 x_0,即开区间$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为 **$x_0$ 的 δ 空心邻域**. 记作 $U^0(x_0,\delta)$.

如,$U^0(3,0.02)=(2.98,3)\cup(3,3.02)$.

习题 1-1

1. 列表写出下列函数的定义域、值域,并画出其图形.

$y=C,x,x^2,x^3,\sqrt{x},\sqrt[3]{x},\frac{1}{x},e^x,e^{-x},\ln x,\log_{\frac{1}{2}}x,\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\arcsin x,\arccos x,$