



刘 嘉/编著

# 明心 数学

MINGXIN

# 资优教程

奥数培训 优中之选  
六年级以上学生专用

第四卷 上

(第 1 分册)



湖北长江出版集团  
湖北教育出版社





作者近照

刘嘉，1970年生于武汉。

由于小学酷爱文史而数学不及格屡遭训斥，所以中学发奋学习数学，导致偏科严重，无法成为“高考型人才”而辍学，索性一头扎进数学王国，在三尺讲台上找到了自己的人生坐标。

志趣：爱数学之智、钻数学之真、讲数学之美。

缺点：无学历、无文凭、无职称。

特长：用哲学讲思想、用禅宗讲方法、用文史讲精神。

信念：天道酬勤，格物致知，明心见性。

追求：传播数学思想，弘扬数学文化，培养资优人才。



这是一套提高思维、丰富智慧、锤炼情操的好书，要认真读一读。读了它，会使我们能够更加精彩地求解人生这一道数学题。

——余其煌

〔中国科学院数学与系统科学研究院研究员，博士生导师，华罗庚金杯少年数学邀请赛主试委员会副主任〕

这套教材中丰富的学习材料、有趣的追根溯源、深刻的理论方法、闪光的数学思维、平实的写作风格，都将给广大的数学爱好者、数学竞赛的指导者与参与者，带来耳目一新的感觉，也将会给“竞赛数学”的发展与提升带来可以预见的影响与推动。

——田化澜

〔湖北省数学特级教师，国务院津贴专家，湖北省首任十大名师，武汉市中学数学专业委员会理事长〕

“明星”关注的是荣誉，令星光耀眼，而“明心”关注的是智慧，让心灵升华；“明星”可以喧嚣一时，而“明心”才有益于一世；“明星”是世俗的追求，“明心”才是教育的旨趣；“明星”只偶尔把数学作为入场券，“明心”才会长久地把数学视为聪明泉。

——裴光亚

〔武汉市教育科学院数学教研室主任，鄂教版普通高中数学课程标准实验教科书副主编〕

这套书超越了竞赛解题的层次，找寻各种数学问题的历史源头，以朴素精要的数学思想为统摄，打通了知识的界限，将极其丰富的内容展现给我们。

——柳智宇

〔本书作者的学生之一，第47届国际数学奥林匹克（IMO）竞赛金牌得主，现就读于北京大学数学科学院〕

上架建议：小学(初中)奥数类

责任编辑/彭永东  
封面设计/牛红  
责任督印/张遇春

ISBN 978-7-5351-4890-2



9 787535 148902 >

定价:38.00元



刘嘉/编著

# 明心数学

# 资优教程

第四卷上

第1分册



(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

明心数学资优教程. 第4卷·上(第1分册)/刘嘉编著. —武汉:湖北教育出版社,  
2008.8

ISBN 978-7-5351-4890-2

I. 明… II. 刘… III. 数学课-小学-教材 IV. G624.501

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 091543 号

出版 发行:湖北教育出版社  
网 址:<http://www.hbedup.com>

武汉市青年路 277 号  
邮编:430015 电话:027-83619605

经 销:新 华 书 店  
印 刷:武汉中远印务有限公司  
开 本:880mm×1230mm 1/16  
版 次:2008 年 8 月第 1 版  
字 数:540 千字

(430034·武汉市硚口区长丰大道特 6 号)  
19 印张  
2008 年 8 月第 1 次印刷  
印数:1-8 000

ISBN 978-7-5351-4890-2

定价:38.00 元.

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

## 序

我国的奥林匹克数学教育,湖北做得很好。在历年的国内外数学奥林匹克竞赛中,湖北取得了令人瞩目的成绩。至今为止,湖北省的选手在国际数学奥林匹克竞赛(IMO)中获得的奖牌总数位居全国第一。这充分显示出湖北的数学竞赛教育工作做得很扎实、很有成效。

在与湖北的数学竞赛教育同行接触与了解中,给我印象很深刻的是一位年轻人——刘嘉,他创办的武汉明心资优教育中心所开设的数学奥林匹克课程已经有很多年,为武汉市培养了许多人才。在多年的教学实践与研究中,这位年轻人对于数学竞赛教育和数学课外教育的内容、本质、思想、途径等提出了许多独到的理念和方法,这些理念和方法既符合中国数学会普及工作委员会关于数学竞赛的基本原则,又符合数学学科学习发展的基本规律。现在他将这些理念和方法以教材的形式整理、编辑出版,这对正在不断发展的数学竞赛教育是一件有益的工作。

这套教材包含了丰富的内容,除了有完整的学习体系、科学的结构安排、详实的内容解读、具体的思路拓展外,还展示了丰富的数学文化知识。例如书中不惜花费篇幅,较详细地介绍了与小学、初中数学知识相关的数学史及有趣的数学轶事,不仅具有可读性,而且读起来趣味盎然。不仅使学生在学习过程中了解到数学这门学科的发展历程,而且让老师可以站在历史的角度去开展课堂教学。这在其他数学竞赛教材中是难以见到的。

这套教材在结构安排上,不是简单的知识叠加,也不是盲目的题型集合,而是通过系统的内容展现出了数学的本质,探求数学的规律,追寻数学的根源。让学生在掌握数学之真的同时,可以充分感受到数学之善和数学之美。另外,教材还集中表现出了数学思想与方法上的独特魅力:化复杂为简单,化抽象为直观,化理性为有趣,化高深为清晰,让学生易于理解,便于掌握,也让教师有较完整的理论依据和可操作性。

我认为这套书对正在从事小学、初中数学竞赛教练工作的教师和对数学有兴趣的学生都是一套开卷有益的课外书籍。

裘宗沪  
10/5/2007

【裘宗沪教授:中国科学院数学与系统科学研究院研究员,著名的数学奥林匹克专家,国家数学竞赛世界联盟 Erdos 奖获得者,前中国数学会理事,中国数学奥林匹克委员会常务副主席。】



朋友相聚,很多年了,刘嘉都没有变。身体还是那样单薄,营养丰富的现代餐没有让他胖起来;眼睛还是那样有神,浮华繁杂的世俗没有让它们暗下去。作为刘嘉多年的老朋友,我一点也不觉得奇怪,他一直活在自己的理想和快乐中。有理想和快乐相伴的人,任人世沧桑,世事变幻,坚持的东西总是“不变量”。正是这种坚持,让一个人与一门学问鱼水相融,让刘嘉成为武汉中小学的一种数学现象。

刘嘉的起点很低,低到只有一套《中学数理化自学丛书》的高度。那时候他上初一,第一学期数学期中考试52分、期末考试48分,这两次分数像两片极尽嘲讽之能事的嘴唇唾沫横飞,把他淹没在了自卑与失落之中,就是这一套自学丛书成了他自救的诺亚方舟,发奋,再发奋……在刘嘉成才的路途中,没有别的了。于是,班级第一,年级第一,保送重点高中,就成了一个顺理成章的过程。到了高一时,他已经在“奋不顾身”地自学大学的数学课程,之所以说他奋不顾身,是因为他近似疯狂的对数学的渴求,已不可避免地带来他的偏科,而这一点正好与只认总分的高考制度格格不入。他已经非常厌烦那些死记硬背的课程,而且开始对“应试”产生抵触情绪。到期末,他成为了一个数学的尖子和各科总成绩的“尾巴”。当然,这样的状态是无法进大学的,他得留级!

重读高一的三个月后,他毅然提出了退学申请。可能是他读过的大人传记对他影响太深;也可能是他除了数学这个唯一的理想之外,对升学或者其他前途从不抱有幻想,总之,他选择了一条在别人看来太不寻常,甚至没有前途的人生道路。

凭着对数学的热爱和理解,年仅17岁的刘嘉,很顺利地,在武汉市江岸区黄陂路小学谋得一个临时时代课老师的职位。尽管工资很低,但他却非常满足,因为他可以毫无顾忌地和数学相依为命了。

因为他没有文凭,所以他始终不可能成为一名正式的数学教师。两年后,无奈的他只能顶职去工厂当了一名工人。80年代末期国营企业普遍不景气,工厂里几乎无事可做。这样的美差正合刘嘉的胃口。他白天闲时研习竞赛数学和教育心理学,晚上则去搞家教或者数学竞赛培训班上课,此间的三年,刘嘉完成了自己从一名数学爱好者,向一名数学教师,特别是竞赛数学教师的过渡。他积累了宝贵的教学经验,并在教育理论和教学管理方面,使这些经验系统化。

93年国企内部优化,“不务正业”的刘嘉下岗。同时,他也在另一个地方——他自己的培训学校上岗了。

正是在这一年,我担任第4届华杯赛武汉市代表队的主教练,听同行谈起了他的故事,引起了我的好奇。记得那一年的春天,在武汉市外国语学校操场上我见到了他——骑着一辆锈迹斑斑的自行车,车篓里放着一个破旧的蓝色布袋,布袋里装满了各种数学专业书。通过与他的交谈,我发现了他对数学的执着及对数学教育独到的见解。至此,通过数学这个纽带我们成了朋友。我邀请他为华杯赛武汉市集训队讲课。

因为刘嘉“三无”:没有学历、没有学位、没有教师资格证,所以,当一位领导知道我邀请刘嘉为华杯赛武汉市集训队讲课时,批评我为什么请一个没有教师资格证的人来上课?我当时年轻气盛,回了这位领导一句:“一个人,那怕他是卖菜的,只要他在数学上有水平,能提高选手的水平,我都会不拘一格请他上课!华罗庚只有初中文凭,都可以走上清华大学的讲台!”回首往事,感叹万千!

刘嘉从喜欢数学、自学数学、研究数学到从事数学普及和数学资优教育工作,是一个艰难的转变过程,其中甘苦,鲜为人知。我知道他曾经在市场竞争中的举步维艰,知道他曾经为理想奋斗时的孤独与苦闷,然而他展现在人们面前的,几乎总是一个一个的传奇:是明心资优教育中心的成立;是他的学生在国

内外各项数学赛事中的频频获奖；是明心教育网站在全国数学教育界产生了广泛影响。这个传奇还在延续：现在，一套个性鲜明的奥数教材出版发行了。

这套奥数教材是刘嘉十几年从事数学普及和数学资优教育工作的结晶，该书设计新颖、构思巧妙、内容丰厚，不仅总结了奥数的内容与学习上的普遍规律，展现了奥数学习和解题技巧上的精妙神奇，还提出了独到的数学教育观点，阐述了奥数的精妙和数学文化的真谛。该书引导教师学生在教学和学习的过程中，一边探索数学思维的严密与巧妙，一边感受数学文化的深刻与睿智。更为可贵的是，教材从数学专业的角度体现了资优教育的原则和规律，为每一个普通学生发展成为全面优秀的资优生提供了可能。

刘嘉酷爱历史与哲学，在他书房里的数千册藏书中除了数学书就是历史与哲学书，文理相通，可集大成。所以我相信，刘嘉今后的路会越来越宽广，越来越辉煌。

朱华伟

2007年5月21日

【朱华伟博士：曾任武汉市教研室数学教研员（负责武汉市中小学数学竞赛）、武汉市江岸区教育局党委书记，现任广州大学计算机教育软件研究所所长、研究员，兼任中国数学奥林匹克委员会委员，第48届国际数学奥林匹克中国国家队副领队，全国华罗庚金杯赛主试委员会委员。】

十年前,我调入武钢三中担任省籍高中理科试验班班主任和数学奥林匹克教练,照例第一节课是了解学生。在回答“以前对你影响最深的老师”的问题时,百分之八十的学生给出的答案就是刘嘉。进一步调查得知,这些学生在读小学和初中的过程中,其课余时间大都是在刘嘉创办的“明心教育”学校度过的。多年来,刘嘉在他的数学培训课上,把他对初等数学的“重组”和“思辨”,通过他的“身体语言”和“幽默技巧”,与学生进行了良好的沟通。

认识刘嘉是五年前的事了。那是在一个中学数学期刊的编委会上,善谈的刘嘉和略为内向的我作了第一次沟通。我们都认为,在生活中谈数学、用数学容易,在数学中谈生活反而困难;如何在创造性的数学活动中让学生追求精神体验,为创新精神的培养和提升提供充足的养分和环境,让学生在在学习中体验创造性并学会创造性生活,始终是教学的难点。

虽然同在武汉,我们也很难碰面。一个月前,因出国路过北京,在中国科协偶遇刘嘉,他将本书的样稿给了我。在寂寞的异国他乡,不经意间拿起它阅读,一连用了十多天将其琢磨完毕。我进一步惊诧于刘嘉的“思辨”和“重组”的能力了。可以说,他用最生活的语言,最浅近的文字,将许多“死板”的东西,编成了活生生的故事;将历史知识、文化线索融入到逻辑体系中,充分展示了知识发生发展中生动活泼的认知、情感和意志过程;做到了严谨性与量力性相结合、具体与抽象相结合、理论与应用相结合;特别注重了知、情、意的整合;把结果与过程、模仿与创造并重起来,兼顾到了数学知识的展开和青少年认知结构发展的和谐统一。此书稿实质上是作者时过境迁后课堂教学的实录,是实感的迸发。因此,阅读书稿最强的感受是自然,流畅。

每个人开始都是平凡的,每天所做的事都是琐屑的。然而,正是对平凡和琐屑的超越,成就了刘嘉。

边红平

二〇〇七年五月于武钢三中

【边红平:湖北省特级老师,数学奥林匹克金牌教练。】



## 如何使用本书(代自序)

从上个世纪 90 年代初开始,我就利用学生们的业余时间,为武汉市各个不同层面——小学的、初中的学生讲授竞赛数学课程。这套教材就是这么多年来讲授过程的结晶。

任何一套教材都有两个使用对象——学生和教师,他们在使用教材的过程中各有各的目的。学生希望讲解的过程尽量深入浅出,直观易懂;教师希望内容丰富,形式尽可能多样,对所讲授的不同的数学内容尽可能展示它们之间的相互联系,并能够了解到相关知识的历史背景,然后在备课时挑选出在给定时间内能够讲也应该讲的内容。

这套教材的编写正是综合考虑了以上两个阅读群体,在此有必要向读者具体介绍一下它的内容、特点和使用方法。

### 一、指导思想

首先,在教育部颁发的《全日制义务教育数学课程标准》的前言部分强调“数学是人类的一种文化,它的内容、思想和方法是现代文明的重要组成部分”。其次,《全日制义务教育数学课程标准》也明确要求学生从“知识与技能、数学思考、解决问题、情感与态度”这四个方面来发展学生的数学能力。

这一方面强调了数学教育价值的核心是通过数学教育体现数学文化,提高学生的数学素养。另一方面,知识与技能、数学思考与解决问题是发展学生数学能力的基础,只有这个基础夯实了,才能有利于学生今后的全面发展,这也体现了数学这门学科作为自然科学的基础与工具在教育中有着不可替代的地位。

一般说来,数学文化表现为在数学的起源、发展和应用过程中体现出的对人类进步具有深远影响的方面,它既包含对学生的思想和思维方式的一种潜移默化的作用,也包括人类在认识和发展数学过程中体现出来的探索和进取精神。

有鉴于此,为了使学生与教师在学习与教学过程中,更能够感受到数学文化的深刻与睿智,也能够掌握数学思想与方法的精妙神奇,在这套教材的编写过程中着重从介绍数学知识的背景、联系与传授数学的思想方法两个方面来构建框架。

### 二、教材结构

每本教材由 15 讲组成、每讲一个专题,由三部分构成。

#### 第一部分 数学经纬

教学实践证明,站在历史的角度去学习和教授数学,会为讲解数学提供非常好的思路。数学思想的实际发展历程和历史背景往往能够有效地激励和启迪学生更积极地去学习这门学科,也能使教师更有效地教好数学。

在数学经纬这一部分,我们尽可能的把与该章节内容相关的数学史料或数学趣闻、趣题呈现给学生和教师,让学生的学习过程不是简单机械的题型训练,而是通过跨时空之旅,使学生去追寻数学发展的来龙去脉,让学生在掌握数学之真的同时,也感受到数学之善和数学之美,从而提高学生的数学素养。

#### 第二部分 奥数纵横

美国数学家哈尔莫斯说过,“问题构成数学的心脏”,所以,从整体上讲这套教材大部分内容是向学生传授解题方法的书。

由于任何学问都包含知识的积累和能力的训练,而能力的训练比单纯的知识积累又要重要得多。俗话说“熟读唐诗三百首,不会作诗也会吟”,要学好写诗,首先就要去学习千古传诵的经典名篇。要想学好数学,就必须去学习那些经典名题中所蕴含的经典数学思想与方法,因为数学的真、善和美往往就深藏在

经典中,只有通过经典问题的滋养,才能使学生的思维上升到一个全新的境界。所以在这一部分我们为 学生提供了内容丰富的各种数学问题,这些问题大多来自数学中的经典名题,或者国内外数学竞赛中我们 认为对学生的思维训练有价值的竞赛题,并对它们进行了详尽的讲解和剖析。为了使各种水平的读者 都能从中受益,尽量以大量形象直观的图示、平易浅显的语言、启发式的叙述、详细的推导过程来讲解问 题,目的是使读者看清问题的演变过程和本质特征,从而总结出各种数学方法,教会学生如何去思考和分析 问题,学会数学的思维方法。

### 第三部分 一 挑战奥数

上个世纪,美国出版了一套《新数学丛书》,书的序言中对学数学有一句中肯的建议:“学数学最好的 方法是做数学”。

著名的数学家波利亚也说过“解题是一种本领,就像游泳、滑雪、弹钢琴一样,你只能够靠模仿和实践 才能学到它……如果你想学会游泳,你必须得跳进水里去。同样的,如果你想成为一个善于解题的人,你 就必须去实地解题。假如你想要从解题中得到最大的收获,你就应当从所做的题目中去找出它的特征, 这些特征在你以后去求解其他的问题时,能起到指引的作用。一种解题的方法,它若是经过你自己的努力 得到的,或者是从别人那里学来或听来的,只要经过了你自己的体验,那么它对你来讲就可以成为一种 楷模,当你在碰见别的类似的问题时,它就是可供你仿照的模型”。

在这一部分,我们提供了与例题在思想方法上有共同特征、难易程度不同的问题,供学生在学完本章 内容后练习。

这些练习大致分两类:

第一类是通过对例题的数据结构的改编产生的。

这类习题学生做起来一般不会困难,学生只需要通过模仿例题中的方法与技巧就能很好地解决。通过 做这部分练习,可以强化、巩固本章所介绍的重要数学思想、方法与技巧。

第二类是通过对例题的逻辑结构进行变化而产生的。

这一类习题对学生而言显得较为困难,它需要学生在学完例题后,再通过复习本章的内容,仔细领悟 例题中所反映的数学思想与数学方法,灵活运用所学过的知识,从困难中找出一条越过思维障碍的途径。

根据这么多年的教学经验,每章的练习对于大部分学生而言不可能在很短的时间内全部完成(当然 对于能够全部正确完成的学生,应当祝贺你,为你感到高兴!),若不能全部完成,也不需要着急,不妨先放 一放,带着你遇到的问题继续学习,等学了后面的知识后,也许在某天清晨起床的时候,你的解题灵感就 会突然蹦出来了!

### 三、课程安排

本套教材共分四卷八册,每册包含 15 个专题,整套教材涉及了数学中算术、代数、几何、数论、组合这 几个方面的知识。

每卷所适合的学生年龄段分别为:

第一卷(上、下册)需要的预备知识为整数的四则运算,适合三年级以上学生学习。

第二卷(上、下册)需要的预备知识为小数的四则运算,适合四年级以上学生学习。

第三卷(上、下册)需要的预备知识为分数的四则运算,适合五年级以上学生学习。

第四卷(上、下册)需要的预备知识为简单的代数运算,适合六年级以上学生学习。

实际上,上面的建议也不是绝对的。根据多年的教学经验,一个学生,如果他在数学上的数感、空间 观念、统计观念、推理能力足够成熟的话(这一点尤为重要!这需要教师根据自己的教学经验及对学生平 时的学习状态进行判断),可以在教师的帮助下选取他感兴趣的任何一章进行学习。

在整个教学体系中,我们安排了大量的数学名题、趣题、智力游戏,其中蕴涵了丰富数学思想与思维 方法,充分展示出数学的神奇智慧和艺术魅力,以期激发孩子们的数学兴趣和探索知识的欲望。这些内 容,既巩固课堂知识,又给孩子们的数学能力提供了一个发展空间,在不知不觉中将孩子们引进奥妙无穷 的数学世界之中。

在数学结构的安排上即全面系统而又相对独立,结合不同年龄段学生的年龄特点、认知规律,遵循“最近发展区”教育理论,思维由浅入深、由表及里、由直观到抽象,以螺旋式上升的方式循序渐进地展开,引导学生从具体直观感受上升到理性分析,体验数学思维的全过程,形成科学思维的雏形,并掌握初步的学习方法。这样既可调动普通学生的学习积极性,又能激发资优生的学习主动性。

#### 四、教材鸟瞰

|               | 数学专题   | 解题方法   | 中外名题  |
|---------------|--|--|---|
| 第一卷<br>(上、下册) | 找规律、和差倍问题、年龄问题、植树问题、方阵问题、平均数问题、简单的计数、归一问题、鸡兔同笼、盈亏问题、重叠问题、周期问题、巧求周长、图形的切拼、相遇问题、追击问题、流水问题、桥长问题、配对求和等 30 个专题。               | 形象直观的列表法、图解法；<br>思路清晰的逆推法、配对法；<br>逻辑性强的推理法、比较法；<br>异想天开的凑数法、假设法；<br>步步为营的代换法、消去法。                                  | “七桥问题”“哈密顿环游世界问题”使你眼界大开；<br>“高斯求和”揭开了速算的神秘面纱；<br>“鸡兔同笼”“盈不足问题”“数字黑洞”等名题会吸引孩子们主动寻求数学的奥秘。   |
| 第二卷<br>(上、下册) | 最短路线、枚举树、计数的基本原理、图形计算、立体图形、最不利原则与抽屉原理、数阵与幻方、容斥原理、比赛中的推理、双人对弈、牛吃草问题、行程问题、数的整除、质数与合数、约数与倍数、余数问题、完全平方数与末位数问题等 30 个专题。       | 观察法让你的眼神中充满了智慧；<br>筛选法让你在纷繁复杂的状态中找到迈向成功的钥匙；<br>图形中的割补法使你学会化复杂为简单的数学精髓；<br>加法原理与乘法原理使你能够计算出宇宙的浩瀚；<br>对应法、标数法使你思维敏捷。 | 奇妙的“虫蚀算”将使你对于数字谜产生无穷的兴趣；<br>“将军饮马”“杨辉三角”“小蜜蜂回家”是你学习过程中可口的自助餐；<br>“苏步青跑狗题”“牛顿公牛吃草”“神奇的狮子”“东方智慧七巧板”向你呈现出妙趣横生的智慧；<br>“神秘的完全数”“帽子颜色问题”“天平称重问题”耐人寻味。         |
| 第三卷<br>(上、下册) | 长方体与正方体、整数串与分数串、乘法原理与加法原理、归纳与递推、染色问题、奇偶性分析、分数与小数的互化、分数的速算与估算、三类分数基本应用题、五种分率转换、两种分数解题的思想、报数问题、比例问题、典型工程问题、流水工程问题等 30 个专题。 | 不完全归纳法、递推法使你的思维从有限迈向无限；<br>不变量思想、整体思想使你掌握无序中的有序；<br>长方形思维法、染色法使你的思维从抽象的符号王国迈入多姿多彩的图形世界；<br>裂项法、换元法、对应法使你运算得心应手。    | “玄图”“完美正方形”“河图与洛书”“回文数”“有形状的数”使你领略数学王国的美；<br>“古埃及分数”“孙子定理”“勾股定理”“丢番图的墓志铭”“托尔斯泰割草问题”让你跨越时空感受古老的数学文化,惊叹人类文明的辉煌。   |
| 第四卷<br>(上、下册) | 浓度问题、利润问题、时钟问题、行程问题、圆的面积与周长、立体图形计算、图形的变换技巧、数论问题、组合问题、进位制问题、极端思想、对应思想、估算技巧、概率等 30 个专题。                                    | 博弈思想、类比思想使你的思维有序化；<br>奇偶性分析法、反证法让你跨出思维的定势,从谬论中找到真理；<br>等积变形中的对称与旋转、切割与拼补使你感受到图形中的和谐；<br>机会中的数学让你认识到偶然中的必然。         | “五猴分桃”“欧拉遗产问题”“百鸡问题”“阿基米德的牛群问题”让你在算术王国里自由地翱翔；<br>“斐波那契兔子数列”“世界末日”“伯努利信封问题”“四色问题”“柯克曼女学生问题”“三十六名军官排队问题”让你领略组合数学的绚丽多姿；<br>“Nim 游戏”“田忌赛马”“统筹问题”使你在被动中掌握主动。 |

## 五、课时安排

如果利用学生课外活动课的时间,每周授课一次(100分钟),每学期16次课(包含一次试卷讲评),那么本套教材中每一册所提供的教学内容在一学期内是无法完成的。这就需要任课教师根据自己的教学经验,以及学生的接受能力对授课内容进行取舍。

按照我们的教学经验,我常常按下面几种方式来处理每一个专题的内容:

1. 如果课时允许,可把一个专题分两次讲授;
2. 可以选择一部分内容留给学生作为阅读材料,这样更能够提高学生自主学习的能力;
3. 对于专题中学生较难理解的例题,可以暂时略过,放到后续的相关专题中进行学习。

## 六、致学生的建议

作为一名学生,应该采用什么样的方法去学习本书呢?我们提供下面几点建议:

### 1. 仔细阅读课文

你不可能只通过做习题来学会你需要的全部内容和数学方法与技巧,你需要仔细、耐心地阅读书中对例题的分析过程,然后合上书,在脑海中像放电影一样回顾分析过程中的要点,领悟整个解题过程的逻辑关系,然后再把书中的例题按自己的理解一步步地解出来。做完这个工作,再把自己的解答与书中的分析作一个比较,看看自己的解答在哪些地方还存在着问题,或者在你的整个推导过程中你会有那么关键的一步始终转不过弯来,这时你就需要再次去阅读课文,直到把你思维上的障碍彻底扫清为止。

快速阅读在这里对你是不起任何作用的,你必须一步一个脚印地、循序渐进地、专注耐心地阅读课文并探究问题的细节。

### 2. 做家庭作业

请你在学习数学的过程中记住下面的学习方法:

(a)只要有可能,你都把你所面对的数学题用图形的方式来表示。因为用图形来表示数学问题是理解数学和现实世界中的数量关系的重要工具。

(b)以步步为营、合乎逻辑地方式写下你的求解过程,就像是你在向别人讲解这个问题的求解过程一样。

(c)思考一下你现在做的这个练习与课文的例题有什么区别与联系,找出它们之间的同中之异与异中之同。

### 3. 学会“超前”

有些同学在课堂上“以听课为主,力争跟上老师的思路”,另有一些同学则像数学家那样“力争自己解决问题”。两种不同的学习方式得到的学习效果是不同的,前一种学习方式很被动,后一种学习方式则是把学习数学模拟成一次创造的过程,这种方式所获得地对数学的感悟要丰富深刻得多。为了做到这一点你要学会在课堂上做到下面的三个“超前”。

- (a)超前思考:尽量在老师讲解之前,提出自己解题的想法与思路;
- (b)超前提问:尽量在老师提问之前,发现问题、提出问题、研究问题;
- (c)超前总结:尽量在老师总结之前,对解答过程进行反思,做出总结。

### 4. 学会归纳

俗话说“不动笔墨不读书”,每当学完教材的一章后,你就应该试着对问题关键之处用自己的理解写一个简单的归纳描述。如果你成功了,你可能理解了有关的内容;如果你不能做到这一点,你就会明白在你的解题过程中差距何在。

归纳不仅能够提高你的学习能力,更能提高你对数学的领悟,它可以使你高屋建瓴、见木又见林。有许多同学在解数学问题时只会“见招拆招”,甚至只会解自己解过的题,题目稍一变化就无从下手,这往往就是不会在学习中把学过的知识进行归纳、整理导致的结果。

### 5. 学会复习

不会复习的人,是无法把知识真正掌握的人。为了把学过的知识变成自己的知识,你要学会:



(a)课后复习:每次课后,要通过阅读课本和整理笔记来巩固课堂上学过的知识;

(b)阶段复习:每学完一个阶段之后,要把你学过的知识进行整理、串联,筛选出典型的例题和习题,归纳出其中蕴含的数学思想与方法,使你对数学的理解达到更高的层面。

#### 6. 做一个“错题本”

在平时的学习中,你手头必须有一个“错题本”,把每一个类型中你做错的题归纳在一起,在关键的地方做上标记,或写一些提示性的话语,反思一下自己错误的症结所在,这样可以大大提高你的学习效率。

学习数学不可能一蹴而就,它是一个潜移默化、厚积薄发的过程。要有耐心、要锲而不舍、要提问、要和同学共同交流。学习数学的回报不仅在智力上,它对你人生的发展都会起着积极的作用。

#### 七、供学生、教师使用的补充材料

为配合本套教材的学习,武汉明心资优教育中心从2002年开始,就以本套教材的内容为大纲,组织全国数学教育领域内有丰富经验的一线教师及在数学领域术业有专攻的专家命题,在每年春、秋两季举办“明心奥数挑战赛”。

每套试卷的题型设计以体现数学的思想性与文化性为宗旨,具有以下几点:

活而不难——试题的编拟体现普及性,不超纲、不超前,每道题一定有一种简单的算术解法。

巧而不偏——试题注重趣味性,反对死记硬背,创导新颖性;通过竞赛提高参赛选手的数学素质及逻辑推理能力。

新而不怪——试题以考察数学思想与数学方法为主,每道题都要求能启迪学生的思维,寓知识、能力的考察于数学的美育之中。

“明心奥数挑战赛”每年举办两次,于秋季、春季开学第一周周末举行。

学习使用本套教材的学生和教师可以直接登陆武汉明心资优教育中心网站:

<http://www.ccmo.cn>

我们会及时发布“明心奥数挑战赛”考试信息,你可在“明心奥数测试”栏目中获得历年的“明心奥数挑战赛”试题汇编资料,同时网站也为学生和教师提供了有关数学的思想、方法与数学文化的丰富材料。

#### 八、反馈

笔者在这里欢迎大家对本书提出积极的批评和建议,包括对本书专题的评论、结论的归属、更新、历史的解读、对练习的构思、对教学的理解等。

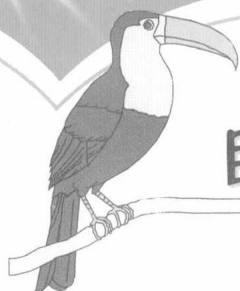
请将您宝贵的信息发至:Email:mx@ccmo.cn

通讯地址:武汉市武昌区新长江广场A座6楼武汉明心资优教育(武昌)中心。

邮编:430061。

刘 嘉

2007年6月6日



## 目 录

|        |                     |     |
|--------|---------------------|-----|
| 第 1 讲  | 利润问题 .....          | 1   |
| 第 2 讲  | 浓度问题 .....          | 19  |
| 第 3 讲  | 图形变换技巧 .....        | 40  |
| 第 4 讲  | 共边定理(B) .....       | 69  |
| 第 5 讲  | 平行线间的面积 .....       | 91  |
| 第 6 讲  | 奇妙的圆(一) .....       | 112 |
| 第 7 讲  | 奇妙的圆(二) .....       | 143 |
| 第 8 讲  | 组合计数的技巧与方法(上) ..... | 169 |
| 第 9 讲  | 组合计数的技巧与方法(下) ..... | 197 |
| 第 10 讲 | 对应 .....            | 209 |
|        | “挑战奥数” 参考答案 .....   | 227 |



### 一、数学与经济

诺贝尔奖是世界上最著名的科学大奖,但是诺贝尔奖中却没有设立数学奖,这不能说不是一个遗憾!但是却有许多数学家却获得了诺贝尔奖,这是为什么?

诺贝尔奖不设数学奖,但其中却有经济学的奖项,而数学家获得诺贝尔奖的原因就在于数学家开辟了经济学领域的广阔天地,从而获得了诺贝尔经济学奖。

综观诺贝尔经济学奖,从1969年开始颁奖,几乎所有的获奖成果都用到了数学工具;有一半以上获奖者都是有深厚数学功底的经济学家,其中有的获奖者本身就是著名的数学家,例如世界著名的数学家纳什就是这方面的典范。纳什获得的是数学博士学位,在数学领域有着重要的贡献,但他针对经济学家提出的问题,运用数学工具、以数学的方式确定了经济领域中出现的经济规律,既发展了数学,又发展了经济学,而且是在经济学问题的推动下发展了数学。

数学是研究现实世界数量关系的学科,数学中的数量关系是从现实中来的,又是现实世界数量关系的高度抽象,数学的高度抽象性决定了它必须从现实中超脱出来,摒弃那些次要因素,抓住量的关系,建立数学模型。

而在经济现象中,像投入量、产出量、成本、价格、价值、利润、利率、商品量、生产量、产值、消费量等数量关系、经济模型无处不凸现出数学的影子。因此,数学也就成为研究经济学的重要工具。数学家与经济学家从不同的目的出发去认识这个世界,但在某些方面却殊途同归。

数学一方面在经济学研究中起着重要作用,另一方面经济现象的复杂性也不断地向数学提出新的问题,推动着数学科学的发展。

综观近一百年来的科学发展,作为“自然科学王冠上的明珠”——数学,在社会科学的显学——经济学中一样熠熠生辉。

约翰·纳什生于1928年6月13日。父亲是电子工程师与教师,第一次世界大战的老兵。纳什小时候孤独内向,虽然父母对他照顾有加,但老师认为他不合群不善社交。



约翰·纳什

纳什的数学天分大约在14岁开始展现。他在普林斯顿大学读博士时刚刚20出头,但他在读书期间的一篇关于非合作博弈的博士论文和其他相关文章,确立了他博弈论大师的地位。在20世纪50年代末,他已是闻名世界的数学家了。

然而,正当他的事业如日中天的时候,30岁的纳什得了严重的精神分裂症。他的妻子——一位麻省理工学院物理系毕业生,表现出钢铁般的意志:她挺过了丈夫被禁闭治疗、孤立无援的日子,走过了唯一的儿子也同样罹患精神分裂症的震惊与哀伤……漫长的半个世纪之后,她的耐心和毅力迎来了了不起的奇迹:和她的儿子一样,纳什教授渐渐康复,并在1994年获得诺贝尔奖经济学奖。

如今,纳什已经基本恢复正常,他现在是普林斯顿大学数学教授,并重新开始科学研究。纳什教授多次访问过中国并在中国多所大学进行过讲学。

一部以纳什的生平经历为基础而创作的人物传记影片《美丽心灵》荣获2002年奥斯卡金像奖,影片主人公原型纳什因此而成为热门的公众人物。

## 二、基础数学中的经济

商店出售商品时,为了获得最大的利润,商家总是“低进高出”,只有这样才能赚取差价,这个差价就会产生利润。所以俗话说“只有买错的,没有卖错的”。

实际上,在商品贸易中的许多数学问题都会涉及到三个量:成本、利润及定价。

成本——购进商品所需的本钱,又叫进价或成本价;

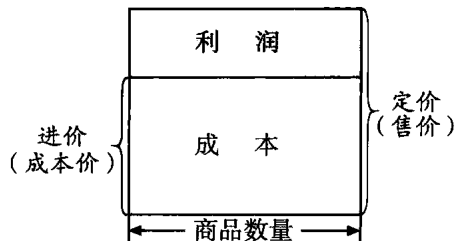
定价——商品出售时的价格,又叫售价或卖价;

利润——产品定价中高于成本以上的那一部分。

右边的矩形图就很直观地表示了这三个量。

为了衡量获得利润的大小,通常采用“利润百分数”或“利润率”这个量:

$$\begin{aligned} \text{利润百分数} &= \frac{\text{定价} - \text{成本}}{\text{成本}} \times 100\% \\ &= \left( \frac{\text{定价}}{\text{成本}} - 1 \right) \times 100\% \end{aligned}$$



从上面的定义可以看出,利润百分数是一个分数,这个分数是把“成本”作为标准量“单位1”,而把“定价-成本”这个差价作为比较量产生的。

由上面的公式还可以引申出下面两个公式:

$$\begin{aligned} \text{卖价} &= \text{成本} \times (1 + \text{利润百分数}) \\ \text{成本} &= \text{卖价} \div (1 + \text{利润百分数}) \end{aligned}$$

上面三个公式不需要死记硬背,要学会用图形去理解它们。

## 三、生活中的经济——打折销售

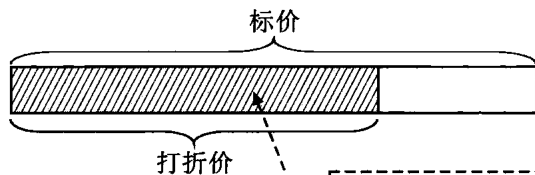
我们都有去商场买东西的经历,都知道商品有定价,但定价高了商品可能卖不掉,这时商家只能通过降低利润甚至亏本,减价出售商品,这时候就会出现打折的问题。

### 1. 打折的概念

商品在出售时标签上的价格称之为标价;

商品出售时的实际价格称之为售价(或卖价);

商店打  $x$  折出售,即按商品标价的  $x \times 10\%$  的价格卖出。



折扣实际上是把标价看做“单位1”,实际售价是它的  $(10x)\%$ ,那么就叫打了  $x$  折。

同一件商品打1折  
远比打9折更优惠!

$$\text{折扣} = \frac{\text{实际售出价格}}{\text{定价}} \times 100\%$$

从上面可以看出,所谓“打折”,即买卖货物时,照标价减去一个数目,减到原标价的十分之几就叫做几折或几扣。所以商品打几折的问题,实际上就是求顾客支付了现金与得到的物品价值的比值问题。

例如每年到了“圣诞节”,各大商场都会出现“买二百送一百”、“购物券”等促销手段,这实际上都与折扣有关。





有了上面的基础知识,我们就可以处理一些生活中的经济数学了。

例如,一件商品的进货价是 80 元,定价是 100 元,则这件商品的利润是 20 元,利润百分数是  $\frac{100-80}{80} \times 100\% = 20\%$ ,如果这件商品因为 100 元的定价太高而卖不掉,以 85 元的价格卖掉了,那么说明这件商品是按  $\frac{85}{100} \times 100\% = 85\%$  出售的,通常称作“八五折”。

无论商家制定何种销售方案,在千变万化的商战中始终存在着下面的等量关系:

$$\begin{aligned} \text{卖价} &= \text{标价} \times \text{折扣} \\ \text{标价} &= \text{卖价} \div \text{折扣} \end{aligned}$$

## 2. 一个容易混淆的折扣趣题

下面这个问题中,会出现多种耐人寻味的答案,每一种答案听起来非常有理,甚至得到不同的答案的人会争得面红耳赤。

**【题】**国际购物中心周年店庆酬宾,顾客每买 400 元送 100 元当日购物券,并加送二十元现金(赠券后购物不可再领赠券)。假如顾客购物金额均为 400 元的整数倍,国际购物中心的的活动相当于将商品打几折?

下面听听他们的说理:

**【答案 1】**认为打 7 折:

因为顾客总共支付 400 元,而又返还了 20 元钱和 100 元的购物券,所以,相当于实际上支付了  $(400 - 120)$  元钱而得到了 400 元的物品,因此  $\frac{400-120}{400} = \frac{7}{10}$ ,所以此活动相当于将商品打 7 折。

**【答案 2】**认为大约打了 0.769 折;

因为顾客总共支付 400 元,而实际上从商家那拿到了 400 元价值的物品和 100 元的购物券以及 20 元现金,所以总共得到  $(400+100+20)$  元价值的钱和物,因此  $\frac{400}{400+100+20} \approx 0.769$ ,所以此活动相当于将商品打 0.769 折。

**【答案 3】**认为大约打了 0.76 折。

因为顾客总共支付 400 元,从商家那拿回了 20 元现金,所以仅仅支付了 380 元钱,而得到的物品的价值是  $(400+100)$  元,因此  $\frac{400-20}{500} = 0.76$ ,所以此活动相当于将商品打 0.76 折。

这三种答案各不相同,每一个人都会觉得是自己的对。

实际上,第 3 种答案是正确的。

在解决这个问题时关键要注意以下三点:

### (一) 钱、物和券要分清楚

第 2 种答案犯的错误是:送 20 元实际上是钱,应在所支付 400 元中减掉,不应同物品混淆而加在分母中,因为它不属于得到的物品。而 100 元的券在这里就相当于货物,所以应加在顾客得到的物品的价值中,因此应该加在分母上。

第 1 种答案把 100 元的券当成钱给减掉了,这是不合理的。券不能兑换成钱,只能兑换成同价值的货物。

所以,钱、物和券要分清。

### (二) 顾客与商家的付出和回报要理清

顾客和商家的付出与回报要分清。

一方面,从顾客角度来考虑,顾客付出 400 元钱,但返回 20 元,所以共付出  $400 - 20 = 380$  元钱。顾