小升初

奥数精要15讲

凌科 主编

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

掌握方法
提高成绩
高效冲刺
直达目标

ISBN 978-7-80229-180-5

定价：18.50元

上架建议：小学毕业／奥数／六年级

责任编辑 赵立颖

责任校对 王 红

封面设计 華漢文化 13901284008

小升初

奥数精要15讲

凌科 主编

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

小升初奥数精要15讲/凌科主编.
—北京:中国石化出版社,2006(2008.5重印)
ISBN 978-7-80229-180-5

Ⅰ.小… Ⅱ.凌… Ⅲ.数学课-小学-升学参考资料
Ⅳ.G624.503

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第109468号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com.cn
中国石化出版社图文中心排版
北京科信印刷厂印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米16开本10.25印张221千字
2008年5月第1版第2次印刷
定价:18.50元
(购买时请认明封面防伪标识)

目录

第1讲 计算问题

内容概述

1. 数列相关问题

等差数列相关问题，等差数列前 n 项和的计算方法：倒序相加．

等比数列相关问题，等比数列前 n 项和的计算方法：错位相减．

（不涉及等差、等比复合数列）

等差数列的求和

范例1 求和：$1+3+5+7+9+\cdots+101$

【分析与解】 观察式子，后面数比前面的数大2，我们可以采用多种方法解决．

记 $S=1+3+5+7+9+\cdots+101$

则每个数字颠倒以后和不变 $S=101+99+97+\cdots+1$

$$2S=S+S$$

$$\begin{array}{r}1+3+5+7+9+\cdots+101\\101+99+97+95+\cdots+1\end{array}$$

$$2S=\underbrace{102+102+102+\cdots+102}_{(101-1)\div2+1=51个}=102\times51$$

$S=51\times51=2601.$

这种方法称为“倒序相加”

等差数列的求和公式	（首项＋末项）×项数÷2
等差数列的项数计算方法	（末项－首项）÷公差＋1

等比数列的求和

范例2 求和：$2+6+18+54+\cdots+13122$

【分析与解】 观察式子特点，后一项是前一项的3倍，那么每一个数都乘以3，则前一项变成后一项．

记 $S=2+6+18+54+\cdots+13122$

则 $3S=6+18+54+162\cdots+13122+39366$

$2S=3S-S$

$6+18+54+162+\cdots+13122+39366$

$2+6+18+54+162+\cdots+13122$

$2S=39366-2=39364$

$S=19682$

将其一般化：

对 S 乘以它的公比，然后再错位相减即可，这种方法称之为“错位相减”.

等比数列的求和公式	（末项×公比－首项）÷（公比－1）	（公比≠1）
	任何一项×项数	（公比＝1）

2. 整数的裂项

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)==\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n\times(n+1)\times(n+2)$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6+\cdots+n\times$

$(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

…… …… …… …… …… …… ……

3. 数的裂项

（1）常规裂项：

$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\times n}$

$=1-\dfrac{1}{n}$；

$\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\dfrac{1}{(n-2)\times(n-1)\times n}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left[\dfrac{1}{1\times2}-\dfrac{1}{(n-1)\times n}\right]$；

$\dfrac{1}{1\times2\times3\times4}+\dfrac{1}{2\times3\times4\times5}+\dfrac{1}{3\times4\times5\times6}+\cdots+\dfrac{1}{(n-3)\times(n-2)\times(n-1)\times n}$

$=\dfrac{1}{3}\times\left[\dfrac{1}{1\times2\times3}-\dfrac{1}{(n-2)\times(n-1)\times n}\right]$；

…… …… ……

(2) 较特殊裂项：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

4. 简算与巧算

每个数位单独计算，凑整法等.

例题精讲

1. 等差数列

例1 D 是 1 ~ 1999 的所有奇数之和，N 是 2 ~ 1998 的所有偶数之和，试求 $D-N$ 的值.

【分析与解】

方法一： D 对应的数列的项数为 $(1999-1)\div2+1=1000$

$D=(1+1999)\times1000\div2=1000000$

N 对应的数列的项数为 $(1998-2)\div2+1=999$

$N=(2+1998)\times999\div2=999000$；

所以 $D-N=1000000-999000=1000.$

方法二： 注意到 $D-N$ 可以写成：

D	1	3	5	7	…	1997	1999
N		2	4	6	…	1996	1998
差	1	1	1	1	…	1	1

所以 $D-N$ 的差为 $1+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{999个1}=1000.$

例2 试求 $1+2+3+4+\cdots+1991$ 的和除以 1993 的余数?

【分析与解】

方法一： 先求出这些数的和为 $\frac{(1991+1)\times1991}{2}=996\times1991=1983036$；

$1983036\div1993=995\cdots\cdots1$. 所以余数为 1.

方法二：

$$1+2+3+4+5+\cdots+1988+1989+1990+1991$$

注意到除了1，首尾相加，则和为1993，于是可以整除，并且1991个数除了1，还剩下1990个，为偶数，于是除了1可以成对出现，每对正好是1993，所以最终余1.

例3 试计算：$1+2+4+5+7+8+\cdots\cdots+100+101$ 的值.

【分析与解】 **方法一**：注意到从左到右相邻两个加数的差依次为

1、2、1、2、1、2、…、1.

注意到加数的差的周期为2，所以设想隔一个取出一个数组成一个新的数列，剩下的那些数可组成另一个数列.

$1+4+7+\cdots+100$，不难发现这个数列的公差为3，项数为 $(100-1)\div3+1=34$ 项，所以这个数列的和为 $(1+100)\times34\div2=101\times17$；

$2+5+8+\cdots+101$，不难发现这个数列的公差为3，项数为 $(101-2)\div3+1=34$ 项，所以这个数列的和为 $(2+101)\times34\div2=103\times17$.

所以原数列的和为 $101\times17+103\times17=(101+103)\times17=204\times17=3468$.

方法二：分析如方法一

每两个一组求和，那么原式的和为 $3+9+15+\cdots+201$，这些加数组成的一个新数列是公差为6的等差数列，项数为 $(201-3)\div6+1=34$ 项.

所以原数列的和为 $(3+201)\times34\div2=204\times17=3468$.

方法三：注意到原式中不包含3的倍数，

原式 $=(1+2+3+4+5+6+\cdots+101+102)-(3+6+9+12+\cdots+102)$

$=102\times103\div2-3\times(1+2+3+4+\cdots+34)$

$=5253-3\times595$

$=5253-1785$

$=3468$

思考题1：用1分、2分和5分的硬币组成1元钱（不必每种都有），共有多少种不同的凑法？

【分析与解】 先解不定方程 $x+2y+5z=100$，当 $z=0$，1，…，20时，分别有51，48，46，43，41，…，3，1组解，所以共有：

$51+\underline{48+46}+\underline{43+41}+\cdots+3+1$，利用例3中方法二可以解得答案为：

$51+94+84+74+64+\cdots+4=51+90+80+70+60+\cdots+10+4\times10$

$=51+450+40=541$.

2. 等比数列

例 4 计算 $5+20+80+320+1280+5120+20480+81920+327680$ 的值.

【分析与解】 首先可以判断出这个数列为等比数列，公比为4.

记 $S=5+20+80+320+1280+5120+20480+81920+327680$,

$4S=20+80+320+1280+5120+20480+81920+327680+1310720$.

那么 $4S-S=1310720-5=1310715$，所以 $S=1310715\div 3=436905$.

例 5 计算：$2^7+2^6\times 3+2^5\times 3^2+2^4\times 3^3+2^3\times 3^4+2^2\times 3^5+2\times 3^6+3^7$ 的值.（已知 $3^7=2187$，$3^8=6561$，$3^9=19683$，$3^{10}=59049$，$2^7=128$，$2^8=256$，$2^9=512$，$2^{10}=1024$）

【分析与解】 注意到式子的特点是从第一个加数开始，每一个加数比前一个加数2的指数减少1，3的指数增加1. 所以每一个加数是前一个加数的 $\frac{3}{2}$ 倍，如果将题中加数按原来的顺序排列起来就是一个公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列，于是按【内容概述】中的<u>错位相减法</u>进行运算即可.

记 $S=2^7+2^6\times 3+2^5\times 3^2+2^4\times 3^3+2^3\times 3^4+2^2\times 3^5+2\times 3^6+3^7$,

$\frac{3}{2}S=2^6\times 3+2^5\times 3^2+2^4\times 3^3+2^3\times 3^4+2^2\times 3^5+2^1\times 3^6+3^7+\frac{3^8}{2}$,

$\frac{3}{2}S-S=\frac{1}{2}S=\frac{3^8}{2}-2^7$，那么 $S=3^8-2^8=6561-256=6305$.

即原式的值为6305.

练习 1：$4^9+4^8\times 5+4^7\times 5^2+4^6\times 5^3+4^5\times 5^4+4^4\times 5^5+4^3\times 5^6+4^2\times 5^7+4\times 5^8+5^9$ 的值.（已知 $4^8=65536$，$4^9=262144$，$4^{10}=1048576$，$4^{11}=4194304$，$5^8=390625$，$5^9=1953125$，$5^{10}=9765625$，$5^{11}=48828125$）

【分析与解】 $\left(原式\times\frac{5}{4}-原式\right)\times 4=5^{10}-4^{10}=9765625-1048576=8717049$.

3. 常规简算

例 6 计算 $2006-200.6-20.06-2.006$

【分析与解】 **方法一：**

原式 $=2006\times(1-0.1-0.01-0.001)=2006\times 0.889=1783.334$.

方法二： 原式 $=2005+1-200-0.6-20-0.06-2-0.006$

$=2005-200-20-2+(1-0.6-0.06-0.006)$

$=1783+0.334$

$=1783.334$

评注：大多数同学可能采用方法一，而实际上方法二才是较简洁的方法.

练习 2：计算 $456+564+645-654-546$

【分析与解】 方法一：先计算百位为 $4+5+6-6-5=4$

再计算十位为 $5+6+4-5-4=6$

最后计算个位为 $6+4+5-4-6=5$

所以最后的计算结果为 465

方法二：注意到 $654+546=1200$

所以原式 $=(456+564+645)-1200=1020+645-1200=465$.

练习 3：计算 $123+456+789-312-654$

【分析与解】 先计算百位为 $1+4+7-3-6=3$

再计算十位为 $2+5+8-1-5=9$

最后计算个位为 $3+6+9-2-4=12$

本题必须考虑进位，个位为 12，必须往前进 1，所以十位变为 $9+1=10$，于是十位必须往前进位，所以百位变为 4. 那么原式的值为 402.

练习 4：计算 $(123456+234561+345612+456123+561234+612345)\div 7$ 的值.

【分析与解】 计算出每个数位上的和，再将每个数位上和除以 7：

十万位	$1+2+3+4+5+6$	$\div 7=3$
万位	$2+3+4+5+6+1$	$\div 7=3$
千位	$3+4+5+6+1+2$	$\div 7=3$
百位	$4+5+6+1+2+3$	$\div 7=3$
十位	$5+6+1+2+3+4$	$\div 7=3$
个位	$6+1+2+3+4+5$	$\div 7=3$

因此所得商的值为 333333.

例 7　在算式 $34.51-(\square\times 3.5+\square\times 4)=23.4$ 中，第一个方框中的数是第二个方框的 2 倍，那么第二个方框中的数是多少？

【分析与解】 设第一个方框内的数为 $2x$，那么第二个方框内的数为 x，那么有：

$34.51-(3.5\times 2x+4x)=23.4$

所以有 $34.51-11x=23.4$，所以 $11x=34.51-23.4=11.11$，所以 $x=11.11\div 11=1.01$.

即第二个方框中的数是 1.01.

4. 整数裂项

例8　试计算：　$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+6\times7+\cdots+100\times101$ 的值.

【分析与解】　记原式的值为 S,

则 $3S=1\times2\times3+2\times3\times3+3\times4\times3+4\times5\times3+5\times6\times3+6\times7\times3+\cdots+100\times101\times3$

$=1\times2\times3+2\times3\times(4-1)+3\times4\times(5-2)+4\times5\times(6-3)+\cdots+99\times100\times(101-98)+100\times101\times(102-99)$

$=1\times2\times3+2\times3\times4-1\times2\times3+3\times4\times5-4\times5\times6+4\times5\times6-3\times4\times5+\cdots+99\times100\times101-98\times99\times100+100\times101\times102-99\times100\times101$

$=100\times101\times102$

所以 $S=100\times101\times102\div3=100\times101\times34=343400$.

例9　试计算：$100\times101+101\times102+102\times103+\cdots+600\times601$ 的值.

【分析与解】　记原式的值为 S,

则 $3S=100\times101\times3+101\times102\times3+102\times103\times3+\cdots+600\times601\times3$

$=100\times101\times(102-99)+101\times102\times(103-100)+102\times103\times(104-101)+\cdots+600\times601\times(602-599)$

$=100\times101\times102-99\times100\times101+101\times102\times103-100\times101\times102+102\times103\times104-101\times102\times103+\cdots+600\times601\times602-599\times600\times602$

$=600\times601\times602-99\times100\times101$

所以原式的和为：$(600\times601\times602-99\times100\times101)\div3=216081300\div3=72027100$.

5. 分数裂项

例10　试计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{9\times100}$的值.

【分析与解】　原式 $=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$

$=1-\frac{1}{100}$

$=\frac{99}{100}$

例11　试计算：$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}+\cdots+\frac{1}{99\times100\times101}$的值.

【分析与解】

原式 $=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{4\times5}-\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{99\times100}-\frac{1}{100\times101}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{100\times101}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10100}\right)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{5049}{10100}$$
$$=\frac{5049}{20200}$$

例 12 试计算：$\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{100\times101}$的值.

【分析与解】 原式$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{101}$$
$$=\frac{98}{303}$$

例 13 试计算：$1\frac{1}{2}+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}+13\frac{1}{56}+15\frac{1}{72}+17\frac{1}{90}$的值.

【分析与解】 注意到整数部分为等差数列，分数部分也很有特点，先看整数部分情况：整数部分的和为 $1+3+5+7+\cdots+17=(1+17)\times9\div2=81$.

分数部分可以写成：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=1-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{9}{10}$$

所以原式的值为 $81\frac{9}{10}$.

例 14 试计算：$\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}}{\frac{1}{2008}+\frac{1}{2010}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2016}+\cdots+\frac{1}{4012}}$的值.

【分析与解】

$$\text{原式}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}-2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2006}\right)}{\frac{1}{2008}+\frac{1}{2010}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2016}+\cdots+\frac{1}{4012}}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1003}\right)}{\frac{1}{2008}+\frac{1}{2010}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2016}+\cdots+\frac{1}{4012}}$$

$$=\frac{\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\frac{1}{1008}+\cdots+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}}{\frac{1}{2008}+\frac{1}{2010}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2016}+\cdots+\frac{1}{4010}+\frac{1}{4012}}$$

$=2$

6. 定义新运算

例 15 利用 $1\times1+2\times2+\cdots+n\times n=n\times(n\times1)\times(2n+1)\div6$，试计算 $1\times1+3\times3+\cdots+29\times29$ 的值.

【分析与解】 注意到原式中不包含 2 的倍数平方，

原式 $=1\times1+2\times2+3\times3+\cdots+29\times29-(2\times2+4\times4+6\times6+\cdots+28\times28)$

$=29\times30\times59\div6-4\times(1\times1+2\times2+3\times3+\cdots+14\times14)$

$=29\times30\times59\div6-4\times14\times15\times29\div6$

$=29\times(5\times59-14\times10)$

$=29\times155$

$=4495$

例 16 定义一种新的运算"$*$"，对于任意两个自然数 a 和 b，$a*b$ 表示 a 除以 b 所得到的商与余数的和，例如 16 除以 5 商 3 余 1，那么 $16*5=4$，同理还有 $23*6=3+5=8$. 请计算 $(2003*12)*27=$ 是多少？

【分析与解】 $2003\div12=166\cdots\cdots11$，所以 $(2003*12)=166+11=177$；$177\div27=6\cdots\cdots15$，所以 $(2003*12)*27=177*27=6+15=21$.

例 17 将数字 0 ~ 9 不重复的填写到算式□. □□□ + □. □ − □□. □□中，所得差最大可能是多少？

【分析与解】 为了使得差尽可能的大，那么被减数尽可能大，减数尽可能小，被减数的高位尽可能大，减数高位尽可能小，

$9.754+8.6-10.23=8.124$

那么所得差最大可能是 8.124.

第2讲 比和比例及运用

引 述

在久远的古代，有一个智者叫芝诺，曾经类似地说过：兔子永远追不上10米外的乌龟．他这样解释：当兔子跑到10米处(即乌龟原来的地方)，乌龟已经往前走了一点；当兔子再次到达乌龟的位置时，乌龟又往前走了一点……，也就说当兔子到达乌龟以前的位置时，乌龟总是往前走了一点，所以兔子永远追不上乌龟．

他的结论"兔子永远追不上乌龟"当然是错的，可是他的分析也很有理，你能说明为什么吗?

引述解释：回到芝诺提出的问题，因为兔子的速度比乌龟快，为了方便叙述，假设兔子的速度是乌龟的10倍．那么，按芝诺的说法，这些时间，乌龟走的路程为：

10，1，0.1，0.01，0.001，……是无穷的，

而 $10+1+0.1+0.01+0.001+\cdots\cdots=\frac{100}{9}$，也就是说兔子只是在乌龟行走 $\frac{100}{9}$ 米之前追不上．等乌龟在 $\frac{100}{9}$ 米之后，兔子就在它的前面了．

在这里，芝诺用无穷个数的和来说明它们的和一定是无穷的，这显然是谬误的．

内容概述

1. 两个数相除又叫做两个数的比．

2. 正比例的数量关系为 $\frac{y}{x}=k$，k 为一定值．反比例的数量关系为 $x\times y=k$，k 也为一定值．

如：当速度一定时，行走的路程与行走的时间成正比；当工程量一定时，完成所需的时间与工作效率成反比．

3. 外项积等于内项积

若 $a:b=c:d$，则 $a\times d=b\times c$；(即外项积等于内项积)

4. 正比例与反比例

正比例：如果 $a \div b = k$（k 为常数），则称 a、b 成正比；

反比例：如果 $a \times b = k$（k 为常数），则称 a、b 成反比.

对于连比中，反比例即为原比例的倒数比，例如 $A:B:C=1:2:3$，如果甲、乙、丙与 A、B、C 成反比，则甲:乙:丙 $=1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$.

5. 比和比例在行程问题中的体现

在行程问题中，因为有速度 $=\frac{\text{路程}}{\text{时间}}$，所以：

当一组物体行走速度相等，那么行走的路程比等于对应时间的反比；

当一组物体行走路程相等，那么行走的速度比等于对应时间的反比；

当一组物体行走时间相等，那么行走的速度比等于对应路程的正比.

6. 比和比例问题当中，往往恰当的设定份数使得问题得以较简便的解决.

7. 在比和比例问题中，应将份数与常规数据区分开，分别计算.

例题精讲

1. 比和比例的认知

例1 下列各题中的两种量是否成比例？成什么比例？

① 速度一定，路程与时间.

② 路程一定，速度与时间.

③ 路程一定，已走的路程与未走的路程.

④ 总时间一定，要制造的零件总数和制造每个零件所用的时间.

⑤ 整除情况下被除数一定，除数和商.

⑥ 同时同地，杆高和影长.

⑦ 圆的半径和面积.

⑧ 长方体体积一定，底面积和高.

⑨ 正方形的边长和它的面积.

【分析与解】 成正比例的有：①、⑥；成反比例的有：②、④、⑤、⑧；不成比例③、⑦、⑨.

例2 一块长方形的地，长和宽的比是3:2，长方形的周长是120米，求这块地的面积？

【分析与解】 设长方形的长为“3”，宽为“2”，那么周长为 $(3+2)\times 2=$“10”，对应为120米，所以“1”对应为 $120\div 10=12$（米），那么长为 $3\times 12=36$ 米，宽为 $2\times 12=24$（米）.

所以面积为 $36\times 24=864$（平方米）.

例3 水果店运来橘子、苹果共96筐，橘子和苹果筐数的比是5∶3，求橘子、苹果各是多少筐?

【分析与解】 设橘子筐数为"5"，苹果筐数为"3"，那么共有水果的筐数为"8"，对应为96筐，则"1"对应为$96\div8=12$(筐).

所以橘子为$12\times5=60$(筐)，苹果为$12\times3=36$(筐).

2. 反比例应用题

例4 汽车由甲地开往乙地，如果每小时行80千米，5小时可以到达．如果按2小时行驶100千米计算，需要几小时到达?

【分析与解】 因为路程不变，则"速度×时间"为定值，所以速度与时间成反比，那么以2小时行驶100千米计算，所需时间为$80\times5\div(100\div2)=8$(小时).

例5 修一条路，如果每天修12米，8天可以完成．如果每天多修4米，多少天可以修完?

【分析与解】 因为总工程量不变，所以每天多修4米需$12\times8\div(12+4)=6$(天)即可修完.

3. 内项积等于外项积的运用

例6 已知$3:(2x+5)=5:(3x+9)$，试求x的值.

【分析与解】 利用内项积等于外项积知：$10x+25=9x+27$，解得$x=2$.

例7 已知$(1.5+3x):(6-2x)=1:2$，求x的值?

【分析与解】 因为比例的内项乘积等于外项乘积，所以$(6-2x)\times1=(1.5+3x)\times2$，化简后为$1.5+4x=3$；解得$x=0.375$.

例8 A和B两个数的比是8∶5，每一个数都减少34后，A是B的2倍，试求这两个数?

【分析与解】

方法一： 设A为"8"，B为"5"，则"8"$-34=2\times$("5"-34)，

"8"$-34=$"10"-68，"1"$=17$

所以A为$8\times17=136$，B为$5\times17=85$.

方法二： 设A为$8x$，则B为$5x$，于是有$(8x-34):(5x-34)=2:1$，$x=17$，所以A为136，B为85.

方法三：因为减少的数相同，所以前后A、B的差不变，开始时差占3份，后来差占1与B一样多，也就是说减少的34，占开始的$3-1=2$份，所以开始的1份为$34\div2=17$，所以A为$17\times8=136$，B为$17\times5=85$.

评注：在比和比例问题中，应将份数与常规数据区分开，分别计算.