王后雄学案

教材完全解读

总策划：熊 辉

数学 九年级(上)

配北师大版

丛书主编：王后雄
本册主编：黄学军

X导航 丛书系列

中国青年出版社

X导航 丛书系列

教材完全解读·初中课标本
丛书目录

ISBN 978-7-5006-6370-6
03>
9 787500 663706
定价:19.70元

王后雄学案

教材完全解读

数学 九年级(上)

配北师大版

丛书主编：王后雄
本册主编：黄学军
编 委：罗建国 吴险峰
王金榜 袁爱喜
祁迎峰 吴秋桃
张理兵 任建超
靖红利 张得愿
叶 茂 胡恒送
李 进 陈少祥
杜海燕 熊志全
吴华章 汪海堂

导航丛书系列

中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

教材完全解读：北师大版课标版.九年级数学.上/王后雄主编.
—4版.—北京：中国青年出版社，2008
ISBN 978-7-5006-6370-6

Ⅰ.教… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第039548号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：蔚　蓝

教材完全解读
数学　九年级（上）　配北师大版

中国青年出版社 出版发行

社址：北京东四12条21号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（010）64034328
读者服务热线：（027）61883306
武汉市精彩印务有限公司印制　新华书店经销
889×1194　1/16　11.75印张　313千字
2008年5月北京第4版　2008年5月湖北第4次印刷
印数：15001—20000册
定价：19.70元
本书如有任何印装质量问题，请与承印厂联系调换
联系电话：（027）61883355

教材完全解读

本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

3层完全解读

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

对每道题目标明能力层级，用A、B、C表示试题的难度系数，它们依次代表基础题、中难题、难题。

解题错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，形成正确答案。

2

1　物质的变化和性质

学习目标·考纲解读

(1)物理变化、化学变化(C.理解)；(2)物理性质、化学性质(A.知道)；(3)物质变化过程中伴随能量变化(A.知道)；(4)运用上述概念解释自然、生活中的一些现象(C.运用)。

1 知识·能力聚焦

1. 物理变化和化学变化

(1)物理变化：物质发生变化时没有生成新物质，这种变化叫做物理变化　如：水蒸发、胆矾研碎、蜡烛熔化等。

(2)化学变化：物质发生变化时生成新物质，这种变化叫做化学变化，又叫化学反应　如：石灰石与盐酸反应生成二氧化碳，二氧化碳又与澄清石灰水反应生成碳酸钙沉淀。还有铁生锈、蜡烛燃烧、食物腐败、火药爆炸等都是化学变化。

2 方法·技巧平台

3. 判断与识别物质的变化和性质的方法

(1)化学变化和物理变化的本质区别是有无新的物质生成　因此判断和识别化学变化和物理变化的关键是认真分析变化后有无新的物质生成。

(2)物质性质的识别，关键是看物质的性质是不是只有通过化学变化才表现出来　如果是，就是化学性质，反之，则不是化学性质，而是物理性质。

(3)区别物质的性质和变化

物质的性质和变化是两个不同的概念。性质是物质的固有属性，而变化是一个过程，是性质的具体表现。

3 创新·思维拓展

5. 文学艺术作品中物理变化和化学变化的描述

有许多诗词和成语描述了物质的物理变化和化学变化，品味这些艺术作品对变化的性质作出判断。如：立竿见影、刻舟求剑、百炼成钢、量体裁衣……

名师诠释

[考题1]　(2007·鄂州市)下列变化中，不属于化学变化的是(　　)。

A. 蜡烛燃烧　B. 钢铁生锈

C. 冰雪融化　D. 食物腐烂

[解析]　是否发生化学变化的准确判据是是否“生成新物质”，A、B、D项中所描述物质的变化都生成了新物质，而冰雪融化只是形态变化，没有生成新物质。

[答案]　C

[考题4]　(2007·南京市中考调考题)选择“物理变化”“化学变化”“物理性质”和“化学性质”中的合适答案填在相应的空格里。

(1)在常温时空气是无色无气味的气体______；

(2)酒精受热变成了酒精蒸气______。

[解析]　(1)描述的是空气的颜色、状态、气味，属于物理性质；(2)酒精由液体变成了气体，状态发生了改变，但无新的物质生成，是物理变化。

[答案]　(1)物理性质　(2)物理变化

[考题6]　(2007·山东济宁)下列成语所描述的变化与对该变化的判断，不符合的是(　　)。

A. 沙里淘金——物理变化

B. 滴水穿石——物理变化

C. 百炼成钢——化学变化

D. 火树银花——化学变化

[解析]　水滴在石头上年长日久石头上形成了滴水坑，滴水坑的形成不是简单的物理变化，而是发生了复杂的物理化学变化，故选项B不符合。

[答案]　B

4 能力·题型设计

1A 下列工艺制作过程中包含了化学变化的是(　　)。

A. 红纸剪成窗花　B. 黏土烧制成瓷器

C. 冰块制成冰雕　D. 木板制成模型飞机

2A 古诗词是古人留给我们的宝贵精神财富。下列诗词中不涉及化学变化的是(　　)。

A. 好雨知时节，当春乃发生

B. 爆竹声中一岁除，春风送暖入屠苏

C. 千锤万凿出深山，烈火焚烧若等闲

D. 春蚕到死丝方尽，蜡炬成灰泪始干

点击考点

测试要点1

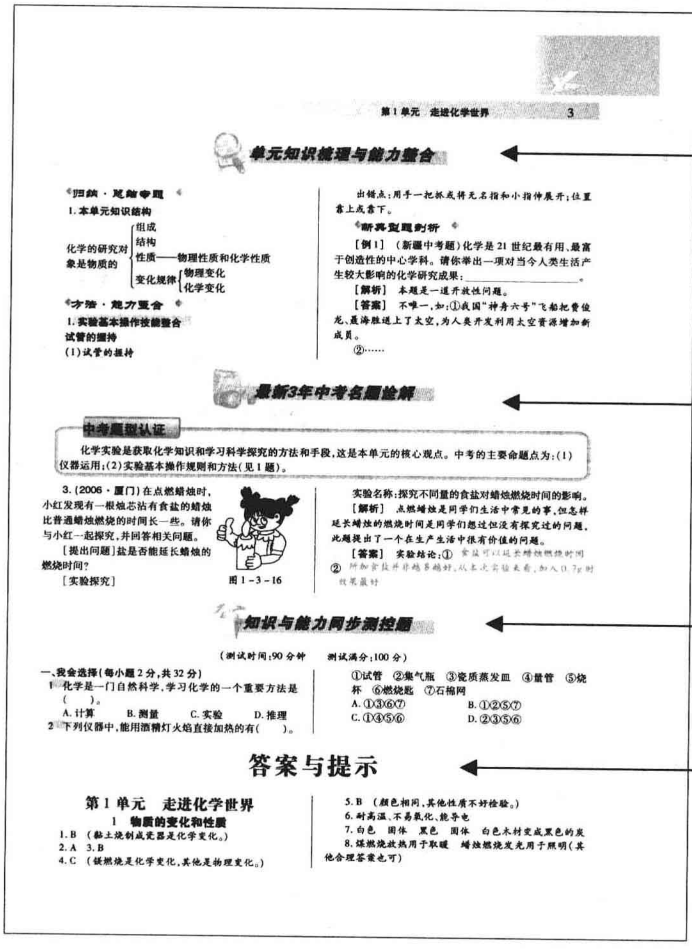
[考题1]的同类

测试要点3

[考题4]的同类

教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

——题记



单元知识梳理与能力整合

归纳·疑难专题

1. 本单元知识结构

化学的研究对象是物质的 { 组成；结构；性质——物理性质和化学性质；变化规律 { 物理变化；化学变化 } }

方法·能力整合

1. 实验基本操作技能整合

试管的握持

(1)试管的握持

出错点：用手一把抓或将无名指和小指伸展开；位置靠上或靠下。

新典型题剖析

［例1］（新疆中考题）化学是21世纪最有用、最富于创造性的中心学科。请你举出一项对当今人类生活产生较大影响的化学研究成果：________。

［解析］　本题是一道开放性问题。

［答案］　不唯一，如：①我国"神舟六号"飞船把费俊龙、聂海胜送上了太空，为人类开发利用太空资源增加新成员。

②……

最新3年中考名题诠解

中考题型认证

化学实验是获取化学知识和学习科学探究的方法和手段，这是本单元的核心观点。中考的主要命题点为：(1)仪器运用；(2)实验基本操作规则和方法(见1题)。

3.(2006·厦门)在点燃蜡烛时，小红发现有一根烛芯沾有食盐的蜡烛比普通蜡烛燃烧的时间长一些。请你与小红一起探究，并回答相关问题。

［提出问题］盐是否能延长蜡烛的燃烧时间？

［实验探究］

图1－3－16

实验名称：探究不同量的食盐对蜡烛燃烧时间的影响。

［解析］　点燃蜡烛是同学们生活中常见的事，但怎样延长蜡烛的燃烧时间是同学们想过但没有探究过的问题，此题提出了一个在生产生活中很有价值的问题。

［答案］　实验结论：①食盐可以延长蜡烛燃烧时间

②所加食盐并非越多越好，从本次实验来看，加入0.7g时效果最好

知识与能力同步测控题

（测试时间：90分钟　测试满分：100分）

一、我会选择（每小题2分，共32分）

1 化学是一门自然科学，学习化学的一个重要方法是(　　)。

A. 计算　B. 测量　C. 实验　D. 推理

2 下列仪器中，能用酒精灯火焰直接加热的有(　　)。

①试管　②集气瓶　③瓷质蒸发皿　④量管　⑤烧杯　⑥燃烧匙　⑦石棉网

A. ①③⑥⑦　B. ①②⑤⑦

C. ①④⑤⑥　D. ②③⑤⑥

答案与提示

第1单元　走进化学世界

1　物质的变化和性质

1. B　（黏土烧制成瓷器是化学变化。）

2. A　3. B

4. C　（镁燃烧是化学变化，其他是物理变化。）

5. B　（颜色相同，其他性质不好检验。）

6. 耐高温、不易氧化、能导电

7. 白色　固体　黑色　固体　白色木材变成黑色的炭

8. 煤燃烧放热用于取暖　蜡烛燃烧发光用于照明（其他合理答案也可）

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识二次提炼与升华，全面提高学习效率。

最新3年中考名题诠解

汇集中考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

X导航丛书系列最新教辅

讲 《中考完全解读》 复习讲解——紧扼中考的脉搏

练 《中考完全学案》 难点突破——挑战思维的极限

《中考完全学案》

《高考完全学案》

讲 《高考完全解读》 精湛解析——把握高考的方向

练 《高考完全学案》 阶段测试——进入实战的演练

讲 《教材完全解读》 细致讲解——汲取教材的精髓

例 《课标导航基础知识手册》透析题型——掌握知识的法宝

练 《教材完全学案》 夯实基础——奠定能力的基石

伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“X导航”丛书系列以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

目 录

目 录

第四章 视图与投影

第五章 反比例函数

第六章 频率与概率

知识与方法

阅读索引

第一章 证明(二)

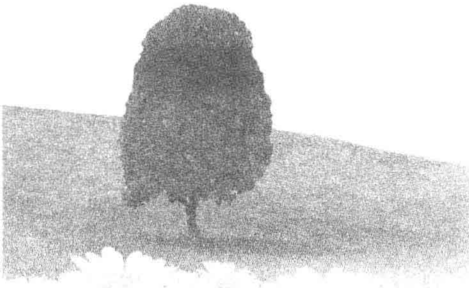
第二章 一元二次方程

第三章 证明(三)

第四章 视图与投影

第五章 反比例函数

第六章 频率与概率



编 者 寄 语

——怎样学好九年级数学

阳光多么灿烂，理想多么绚丽，前途多么美好，可时间却如此短暂. 转眼间，你已经步入九年级了，如何面对九年级数学——这个充满挑战的学科呢？当你捧读这本《教材完全解读》时，你就会惊喜地发现找到了打开这扇科学之门的金钥匙. 你会被它独特的例题设计所吸引，你会被它全面的知识讲解所折服，你会被它透彻的分析点评所震撼！

为了更好地学习九年级数学，请你做好以下几点：

1. 努力夯实基础知识

九年级的知识是前面所学知识的继续，它更加深入和系统. 学习时应了解知识产生及形成的过程，掌握《教材完全解读》中所归纳的每一个知识要点、方法、技巧和规律，做到灵活地运用它们；并对课本和《教材完全解读》中的例题、习题能变式进行引申研究，达到举一反三、触类旁通的目的，做到以不变应万变.

2. 领悟数学思想方法

九年级数学涉及的主要数学思想和方法有：数形结合思想、转化思想、分类讨论思想、方程思想、函数思想、概率与统计思想、配方法、待定系数法等，这些数学思想方法隐含在数学知识的产生、发展过程中，没有专门的章节介绍. 在学习中，你要善于领悟和积累这些常用的数学思想、方法，并能逐步转化为自己的经验，从而形成自觉运用它们解决问题的意识.

3. 善于建构学习模型

在新课标的要求下，出现了越来越多的实际应用问题，这些问题往往以富有趣味、立意新颖的背景将数学知识融汇到实际生活中，成为学生学习的难点. 因而，你要耐心地读题、审题，准确地吸收题中的信息，并对它进行加工、提炼，使之转化为数学问题，再运用数学方法来解决. 当然，平时学习你要多关注生活实际、科技发展、社会热点，有意识地进行研究性学习.

4. 注重思维能力训练

数学解题能力的提高依赖于数学思维能力的训练. 在平时的学习中，你要多关注阅读理解、归纳猜想、操作探究等思维能力要求较高的新题型，它们可以激发你学习数学的自信心、好奇心和求知欲. 对于这些新题型，你要多比较、多反思，努力提高自己思维的灵活性、发散性和批判性，避免盲目被动地去做题，使学习过程成为再发现、再创造的过程，从而不断提高自己的数学思维能力.

5. 重视归纳总结再思考

归纳总结再思考是完善知识结构、提高各种能力的最佳方式. 在解题的基础上认真总结、及时归纳，既能梳理所学的知识，掌握解题方法、技巧和规律，又能培养自己的探索创新能力. 在学完每一章后，你要对照《教材完全解读》中的单元知识梳理与能力整合，及时进行归纳、总结本章的知识结构与前后知识的联系，有哪些规律和方法，形成本章的知识网络系统. 通过这些归纳、总结，你要逐步把书本上的知识变为自己的知识.

6. 重视练习反馈结果

课本和《教材完全解读》后的配套习题和测试题都是经过精心设计、代表新课标要求的题目，题型全面、科学、新颖、层次感强，你要认真对待这些训练题. 通过它们，可以反馈你对知识的掌握程度，找出你在学习中的缺陷，以便你及时查漏补缺，弥补学习中的不足.

可以说，方法是我们扬帆远航的动力. 相信在《教材完全解读》的引领下，只要你充满信心，努力付出，再加上良好的学习方法，九年级的数学学习必能让你收获丰硕的果实. 最后，真诚地预祝你九年级数学学得成功，考出佳绩！

第一章 证明(二)

课标单元知识

1. 教材知识解读

从《证明(一)》开始,教科书从几条公理出发,展开了对平行线等图形性质的严格证明. 本章将继续对与等腰三角形和直角三角形有关的命题进行证明. 主要内容包括:等腰三角形(含等边三角形)的性质和判定,直角三角形的性质和判定,线段垂直平分线、角平分线的性质和判定及上述定理的证明与应用;命题的逆命题及其真假;用尺规作线段的垂直平分线、角平分线.

本章学习的重点是探索证明的思路和方法,难点是准确地表达推理证明的过程.

2. 考试说明要求

(1)了解作为证明基础的几条公理的内容,能够证明与三角形、线段垂直平分线、角平分线等有关的性质定理和判定定理,并会利用这些定理证明与之有关的几何命题.

(2)理解反证法的含义,会用分析法探求证明思路,会用综合法书写证明格式,并会添加常用的辅助线.

(3)了解逆命题的概念,会识别两个互逆命题,会判断命题的真假性,并会写一个命题的逆命题.

(4)能够利用尺规作已知线段的垂直平分线和已知角的平分线;已知底边及底边上的高,能用尺规作出等腰三角形.

(5)初步经历观察、实验、猜想、证明等数学活动过程,发展合情推理能力和初步的演绎推理能力,能有条理地、清晰地阐述自己的观点.

3. 学习方法导航

(1)本章内容与三角形全等的判定公理及推论密切相关,在学习过程中注意灵活地应用三角形全等的公理及推论.

(2)要深刻体会并灵活运用综合法、分析法、“两头凑”的方法,要注意及时对有关证明思路和证明方法进行总结,注意如何添加辅助线,如何构造辅助图形.

(3)要透彻理解各定理的含义,学以致用,而不是见到平面图形的证明就只会运用全等来证,分析问题要灵活.

(4)注意归纳、类比、转化等数学思想方法在学习过程中的渗透,要领会这些思想方法并会运用在问题的解决过程中.

中考命题趋向

证明题是历年中考的必考题型. 本章知识中,等腰三角形、特殊角度的直角三角形、线段的垂直平分线、角平分线的性质与判定是填空题、选择题考查的热点内容. 填空、选择一般直接考查这些知识点,且只涉及一个或两个单一的知识点,而一些证明题、开放探究题和综合题涉及知识点较多,解决此类问题时以上性质与判定也常被综合利用. 另外,互逆命题、互逆定理的考查以填空、选择的形式出现. 尺规作线段的垂直平分线、角的平分线常出现在中考作图题中,解决一些与生活息息相关的实际问题.

在近几年的中考试题中,涉及本章知识的开放题、探索题、操作题等题型在逐年增多,成为中考命题发展的方向.

1.1 你能证明它们吗

学习目标 · 考纲解读

(1)三角形全等的判定公理及推论(A. 知道);(2)证明的基本步骤和书写格式(B. 掌握);(3)等腰三角形的性质定理和判定定理的证明(B. 掌握);(4)等边三角形的性质定理和判定定理的证明(B. 掌握);(5)反证法(C. 理解);(6)含30°角的直角三角形的性质定理的证明(B. 掌握);(7)利用等腰(边)三角形的性质定理和判定定理进行证明、计算(D. 运用);(8)利用等腰(边)三角形的知识解决实际问题(D. 运用).

1 知识 · 能力聚焦

1. 三角形全等的四个公理及一个推论

(1)四个公理

①三边对应相等的两个三角形全等.(SSS)

②两边及其夹角对应相等的两个三角形全等.(SAS)

③两角及其夹边对应相等的两个三角形全等.(ASA)

④全等三角形的对应边相等、对应角相等.

(2)一个推论

两角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等.(AAS)

注意:不存在像"AAA"、"SSA"这样判定两个三角全等的定理.

2. 等腰三角形的性质定理

等腰三角形的两个底角相等(简写:等边对等角).

注意:要说明一个命题的正确性,需用已学过的公理或定理进行证明.命题证明的步骤是:先画图,写出已知、求证,再给出严格证明.

(1)定理证明:已知,如图1-1-1所示,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,求证:$\angle B=\angle C$.

证明:取BC中点D,连接AD.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中,

$$\begin{cases}AB=AC,\\AD=AD,\\BD=CD,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$(SSS),

$\therefore \angle B=\angle C$.

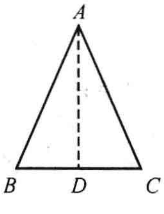


图1-1-1

也可由作顶角平分线证明两个三角形全等得到.

(2)应用格式:在$\triangle ABC$中,

$\because AB=AC$, $\therefore \angle B=\angle C$.

(3)定理作用:可用来证明两个角相等.

3. 等腰三角形性质定理的推论

等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合(简称"三线合一").

名师诠释

[考题1] (2007 · 福州中考题)如图1-1-8所示,点D、E分别在线段AB、AC上,BE、CD相交于点O,$AE=AD$.要使$\triangle ABE\cong\triangle ACD$,要添加一个条件是______(只需写一个条件).

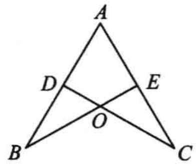


图1-1-8

[解析] 欲证明$\triangle ABE\cong\triangle ACD$,已具备的条件有:$AE=AD$(已知),$\angle A=\angle A$(公共角),即已有"SA",要使三角形全等,可设法构造"ASA"或"AAS"或"SAS",因此答案不唯一.

[答案] $\angle B=\angle C$、$\angle AEB=\angle ADC$、$\angle CEO=\angle BDO$、$AB=AC$、$BD=CE$(任选一个即可).

[点评] 利用公理及推论证明全等时,一定要选准三角形,看好对应边及对应角,选择并运用正确的公理或推论.

[考题2] 求证:与等腰三角形顶角相邻的外角的平分线平行于底边.

已知:如图1-1-9所示,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,AE是外角$\angle CAD$的平分线.

求证:$AE\parallel BC$.

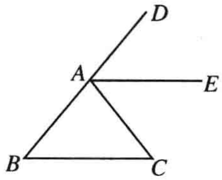


图1-1-9

[解析] 欲证$AE\parallel BC$,只需证$\angle DAE=\angle B$或$\angle EAC=\angle C$.由等边对等角知$\angle B=\angle C$,而$\angle DAC=\angle B+\angle C$,$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle DAC$,故$\angle DAE=\angle B$.

[证明] $\because \angle CAD$是$\triangle ABC$的外角,

$\therefore \angle CAD=\angle B+\angle C$.

$\because AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle C$(等边对等角).

又$\because \angle DAE=\frac{1}{2}\angle DAC$,

$\therefore \angle DAE=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\angle B$.

$\therefore AE\parallel BC$.

(1)定理证明:已知,如图 1-1-2 所示,$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,AD 平分 $\angle BAC$,求证:$AD\perp BC$,$BD=CD$.

证明:$\because$ AD 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle 1=\angle 2, \\ AD=AD, \end{cases}$

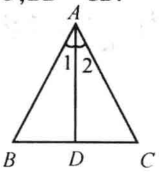


图 1-1-2

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$(SAS).

$\therefore BD=CD$,$\angle ADB=\angle ADC$.

$\because \angle ADB+\angle ADC=180^\circ$,

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90^\circ$,即 $AD\perp BC$.

(2)这一特性说明只要知道其中一个量,就可得出其他两个量. 如图 1-1-2 所示:

①$\because AB=AC$,$\angle 1=\angle 2$,

$\therefore AD\perp BC$,$BD=CD$;

②$\because AB=AC$,$AD\perp BC$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$,$BD=CD$;

③$\because AB=AC$,$BD=CD$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$,$AD\perp BC$.

(3)推论作用:可证明角相等、线段相等或垂直.

4. 等腰三角形的判定定理

有两个角相等的三角形是等腰三角形(简写:等角对等边).

(1)定理证明:已知,如图 1-1-3 所示,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=\angle C$,求证:$AB=AC$.

证明:过 A 点作 $AD\perp BC$.

$\because AD\perp BC$,$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90^\circ$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$\begin{cases} \angle B=\angle C, \\ \angle ADB=\angle ADC, \\ AD=AD, \end{cases}$

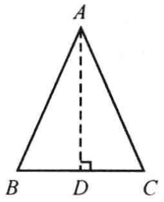


图 1-1-3

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$(AAS),$\therefore AB=AC$.

也可作 $\angle BAC$ 的平分线进行证明.

(2)应用格式:在 $\triangle ABC$ 中,

$\because \angle B=\angle C$,$\therefore AB=AC$.

(3)定理作用:证明同一个三角形中的边相等.

注意:该定理不能叙述为:有两个底角相等的三角形是等腰三角形. 因为在没有判断出一个三角形是等腰三角形之前,不能用"底角""腰"这些名词,只有等腰三角形才有"底角""腰".

5. 等边三角形的性质定理

等边三角形的三个角都相等,并且每个角都等于 60°.

(1)定理证明:已知,如图1-1-4,$\triangle ABC$ 是等边三角形,求证:$\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$.

证明:$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB=AC=BC$.

$\because AB=AC$,

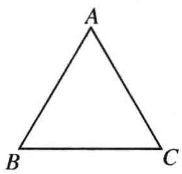


图 1-1-4

[考题3] (2008·湖北宜昌模拟题)如图 1-1-10 所示,点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上,$AB=AC$,$AD=AE$,求证:$BD=CE$.

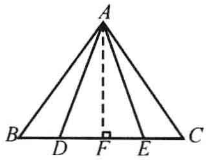


图 1-1-10

[解析] 要证 $BD=CE$,可以通过证明 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$ 得到,也可以用等腰三角形的"三线合一"来证,因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是有公共顶点,并且底边在同一直线上的等腰三角形,所以作 $\triangle ABC$(或 $\triangle ADE$)的高 AF,可同时平分 BC、DE.

[证法一] $\because AB=AC$,$AD=AE$,

$\therefore \angle B=\angle C$,$\angle ADE=\angle AED$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$(SAS),

$\therefore BD=CE$.

[证法二] 作 $AF\perp BC$,垂足为 F,则 $AF\perp DE$.

$\because AB=AC$,$AD=AE$,$AF\perp BC$,$AF\perp DE$,

$\therefore BF=CF$,$DF=EF$(等腰三角形底边上的高与底边上的中线互相重合),$\therefore BD=CE$.

[点评] 本题证法二抓住图形的左右对称性,构造出三线合一定理的基本图形,使证明更为简捷.

[考题4] 已知:如图 1-1-11 所示,$\triangle ABC$ 中,$\angle B$、$\angle C$ 的平分线相交于点 O,过点 O 的直线 MN 平行于 BC,分别交 AB、AC 于点 M、N,求证:$MN=BM+CN$.

[解析] 欲证 $MN=BM+CN$,先把 MN 分成 OM 与 ON 的和. 根据图形示意,结合已知条件可得:$BM=OM$,$CN=ON$,则 $MN=BM+CN$.

[证明] $\because MN/\!/BC$,

$\therefore \angle BOM=\angle OBC$.

又$\because BO$ 平分 $\angle MBC$,

$\therefore \angle MBO=\angle OBC$.

$\therefore \angle MBO=\angle BOM$.

$\therefore BM=OM$(等角对等边).

同理 $CN=ON$.

$\therefore MN=OM+ON=BM+CN$.

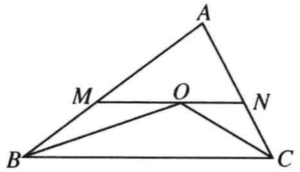


图 1-1-11

[点评] 一个图形中若具有"角平分线"与"平行线"的条件,常常可以找到等腰三角形,记住这个基本图形,很多题目便可迎刃而解.

[考题5] (2007·四川乐山中考题)如图1-1-12 所示,在等边 $\triangle ABC$ 中,点 D、E 分别在边 BC、AB 上,且 $BD=AE$,AD 与 CE 交于点 F.

(1)求证:$AD=CE$;

(2)求 $\angle DFC$ 的度数.

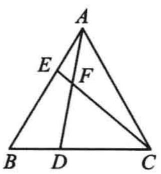


图 1-1-12

[解析] (1)根据等边三角形的性质定理,易证 $\triangle ABD\cong\triangle CAE$,可得 $AD=CE$;(2)由于 $\angle DFC=\angle FAC+$

$\therefore \angle B=\angle C$(等边对等角).

$\because AB=BC$,

$\therefore \angle A=\angle C$(等边对等角).

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C$.

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$,

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$.

(2)应用格式:如图 1-1-4,$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$.

注意:等边三角形具有等腰三角形的所有性质,并且每一条边上都有"三线合一",因此等边三角形是轴对称图形,它有三条对称轴;而等腰三角形只有一条对称轴.

6. 等边三角形的判定定理

定理1:有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形.

(1)定理证明:

情况①:顶角是60°.

已知:如图 1-1-5 所示,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle A=60°$.

求证:$\triangle ABC$ 为等边三角形.

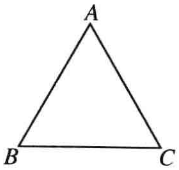


图 1-1-5

证明:$\because AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle C$(等边对等角).

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$,$\angle A=60°$,

$\therefore \angle B=\angle C=60°$,$\therefore \angle A=\angle B$.

$\therefore AC=BC$(等角对等边),

$\therefore AB=AC=BC$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

情况②:有一个底角是60°.

已知:如图 1-1-5 所示,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle B=60°$.

求证:$\triangle ABC$ 为等边三角形.

证明:$\because AB=AC$,$\angle B=60°$,

$\therefore \angle B=\angle C=60°$(等边对等角).

$\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$,

$\therefore \angle A=60°$.

$\therefore \angle A=\angle B$.$\therefore AC=BC$(等角对等边).

$\therefore AB=AC=BC$.

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

(2)应用格式:在$\triangle ABC$中,$\because AB=AC$,$\angle A=60°$,$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

注意:"有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形"这一结论中,60°角可以是顶角,也可以是底角.

定理2:三个角都相等的三角形是等边三角形.

(1)定理证明:如图 1-1-5 所示,在$\triangle ABC$中,$\angle A=\angle B=\angle C$.求证:$\triangle ABC$ 为等边三角形.

证明:$\because \angle A=\angle B$,

$\therefore BC=AC$(等角对等边).

$\because \angle B=\angle C$,

$\therefore AB=AC$(等角对等边).

$\angle ACE$.而由(1)知$\angle ACE=\angle BAD$,故$\angle DFC=\angle FAC+\angle BAD=\angle BAC=60°$.

(1)[证明] $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BAC=\angle B=60°$,$AB=AC$.

在$\triangle ABD$和$\triangle CAE$中,

$\begin{cases} BD=AE, \\ \angle B=\angle BAC, \\ AB=CA, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$(SAS).

$\therefore AD=CE$.

(2)[解] 由(1)$\triangle ABD \cong \triangle CAE$,

得$\angle ACE=\angle BAD$,

$\therefore \angle DFC=\angle FAC+\angle ACE=\angle FAC+\angle BAD=\angle BAC=60°$.

[考题6] 如图 1-1-13 所示,已知点 C 是线段 AB 上一点,分别以 AC、CB 为一边在 AB 的同侧作等边$\triangle ACD$和$\triangle CBE$,AE 交 CD 于 M,BD 交 CE 于 N.求证:$\triangle MCN$ 为等边三角形.

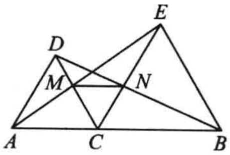


图 1-1-13

[解析] 由$\triangle ACD$和$\triangle BCE$为等边三角形知$\angle DCE=180°-\angle ACD-\angle BCE=60°$,故只需证 $CM=CN$ 即可.将 CM、CN 分别放在两个全等三角形中,可以发现这样的全等三角形有两对:$\triangle BCN \cong \triangle ECM$,$\triangle DCN \cong \triangle ACM$.顺藤摸瓜,要证明这两对三角形全等,就要先证明$\triangle BCD \cong \triangle ECA$,以便找足证明全等的条件.

[证明] $\because \triangle ACD$和$\triangle BCE$为等边三角形,

$\therefore CD=AC$,$BC=CE$,$\angle ECB=\angle DCA=60°$.

$\therefore \angle DCE=180°-\angle DCA-\angle ECB=60°$.

$\angle ACE=\angle DCB=120°$.

又$\because BC=CE$,$CD=CA$,

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ECA$(SAS),$\therefore \angle DBC=\angle AEC$.

又$\because BC=CE$,$\angle ECM=\angle BCN=60°$,

$\therefore \triangle BCN \cong \triangle ECM$(ASA),$\therefore CN=CM$.

$\because \angle MCN=60°$,

$\therefore \triangle MCN$ 为等边三角形(有一个角为60°的等腰三角形为等边三角形).

[考题7] 已知如图 1-1-14 所示,$\triangle ABC$ 是等边三角形,且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$,求证:$\triangle DEF$ 是等边三角形.

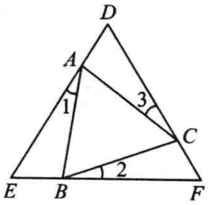


图 1-1-14

[解析] 根据已知条件,可证$\triangle ABE \cong \triangle BCF \cong \triangle CAD$,从而得$\angle D=\angle E=\angle F$,由此可证出$\triangle DEF$是等边三角形.

[证明] $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB=BC$,$\angle ABC=\angle BCA=60°$.

$\because E$、B、F 在一条直线上,

$\therefore \angle ABE+\angle 2=120°$.

同理$\angle BCF+\angle 3=120°$.

$\therefore AB=AC=BC$,

$\therefore \triangle ABC$为等边三角形.

(2)应用格式:在$\triangle ABC$中,

$\because \angle A=\angle B=\angle C$,

$\therefore \triangle ABC$为等边三角形.

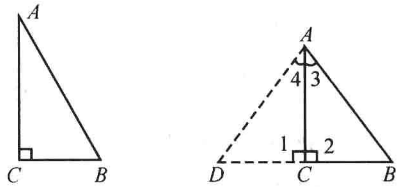
(3)定理1和定理2的作用:证明一个三角形是等边三角形.

7. 含30°角的直角三角形的性质定理

在直角三角形中,如果一个锐角等于30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半.

(1)定理证明:已知,如图1-1-6(1)所示,在Rt$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$\angle A=30°$.

求证:$BC=\frac{1}{2}AB$.



(1) (2)

图1-1-6

证明:如图1-1-6(2)所示,延长BC到D,使$CD=BC$,连接AD.在$\triangle ACD$和$\triangle ACB$中,

$$\begin{cases}AC=AC,\\ \angle 1=\angle 2=90°,\\ CD=BC,\end{cases}\therefore \triangle ACD\cong\triangle ACB(\mathrm{SAS}),$$

$\therefore \angle 4=\angle 3=30°$,$AB=AD$,即$\angle DAB=60°$.

$\therefore \triangle ABD$为等边三角形,$\therefore BD=AB$.

$\because CB=\frac{1}{2}BD$,$\therefore CB=\frac{1}{2}AB$.

(2)应用格式:如图1-1-6(1)所示,在Rt$\triangle ABC$中,

$\because \angle C=90°$,$\angle A=30°$,$\therefore BC=\frac{1}{2}AB$.

(3)定理作用:证明一条线段是另一条线段的一半或二倍.

2 方法·技巧平台

8. 反证法

在证明时,先假设命题的结论不成立,然后推导出与定义、公理、已证定理或已知条件相矛盾的结果,从而证明命题的结论一定成立,这种证明方法称为反证法.

对于一个数学命题,当用直接证法比较困难甚至不能证明时,往往采用间接证法,反证法就是其中的一种.当一个命题的结论涉及"一定""至少""至多""无限""是唯一的"等情况时,由于结论的反面简单明确,常常用反证法来证明.

用反证法证明命题的一般步骤:

(1)假设命题的结论不成立;

又$\because \angle 2=\angle 3$,

$\therefore \angle ABE=\angle BCF$.

在$\triangle ABE$和$\triangle BCF$中,

$\because \angle 1=\angle 2$,$AB=BC$,$\angle ABE=\angle BCF$,

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle BCF(\mathrm{ASA})$,同理$\triangle BCF\cong\triangle CAD$.

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle BCF\cong\triangle CAD$.$\therefore \angle D=\angle E=\angle F$.

$\therefore \triangle DEF$是等边三角形(三个角都相等的三角形是等边三角形).

[考题8] 如图1-1-15所示,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle BAC=120°$,D是BC中点,$DE\perp AB$于点E,求证:$EB=3EA$.

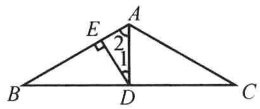


图1-1-15

[解析] 要证$EB=3EA$,注意到$\angle BAC=120°$,由$\triangle ABC$是等腰三角形和三线合一的性质,求出$\angle B=30°$,$AD=\frac{1}{2}AB$,在Rt$\triangle ABD$、Rt$\triangle AED$中反复运用30°角所对的直角边等于斜边的一半的性质进行转化.

[证明] $\because AB=AC$,$\therefore \angle B=\angle C$(等边对等角).

$\because \angle BAC=120°$,

$\therefore \angle B=\angle C=\frac{180°-120°}{2}=30°$.

又$\because D$是BC中点,$\therefore AD\perp BC$(三线合一).

$\therefore \angle 2=60°$.又$\because DE\perp AB$,$\therefore \angle 1=30°$.

在Rt$\triangle ABD$中,$\angle B=30°$,$\therefore AD=\frac{1}{2}AB$.

在Rt$\triangle AED$中,$\angle 1=30°$,$\therefore AE=\frac{1}{2}AD$.

$\therefore AE=\frac{1}{4}AB$,$\therefore BE=\frac{3}{4}AB$,$\therefore EB=3EA$.

[点评] 应用含30°角的直角三角形的性质时,前提条件是直角三角形,它反映了直角三角形中边与角的关系,是证明边的倍分关系常用的证明依据.

[考题9] 已知$\triangle ABC$,求证$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中不能有两个角是直角.

[解析] 用反证法证明命题的步骤:首先,要假设结论"$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中不能有两个角是直角"不成立,即它的反面是"$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中有两个角是直角"成立.然后,从这个假设出发推下去,找出矛盾即可.显然,如果$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中有两个角是直角,那么$\angle A+\angle B+\angle C>180°$,这与三角形内角和定理相矛盾,故假设不成立,原命题成立.

[证明] 假设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$中有两个角是直角,不妨设$\angle A=\angle B=90°$,则$\angle A+\angle B+\angle C=90°+90°+\angle C>180°$.这与三角形内角和定理矛盾,则$\angle A=\angle B=90°$不成立.

所以,一个三角形中不能有两个角是直角.

[点评] 由于题设中$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是任意的角,所以它们之中任意选两个,不失一般性,因此可用"不妨设",这是数学中常用的一种方法,同学们应掌握.