兼顾各版教材　概括三年高中

新课标活学活用

表解一点通

高中数学

顾鸿达　主编

上海科学普及出版社

新课标

活学活用　表解一点通

高中数学

顾鸿达　主　编

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标活学活用表解一点通·高中数学/顾鸿达主编. —上海:上海科学普及出版社,2009.1

ISBN 978-7-5427-4214-8

Ⅰ.新… Ⅱ.顾… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 189381 号

责任编辑 张建青

新课标

活学活用表解一点通

高中数学

顾鸿达 主编

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号 邮政编码 200070)

http://www.pspsh.com

各地新华书店经销 上海译文印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 19.5 字数 510000

2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5427-4214-8 定价:30.00 元

前　言

新课程标准正在全国范围内得以贯彻与落实，与之相配套的各种教材也应运而生，其中许多内容和原来的全国统编教材相比，无论是从内容的取舍、难易度的把握、宽广度的控制，还是从编写的结构次序、编写的指导原则等众多方面都有较大的变化。同时与之相对应的高考，从题型到题量，从命题的价值取向到选拔测试的方法都在发生着深刻的变化。因此无论是对学生，还是对教师都带来了巨大的挑战。

本书试图在体现新课程标准的精神下，为高中学生全面梳理高中数学知识，逐步形成高中数学内容的网络结构体系，深刻理解高中数学的主要解题策略与思想，综合提高高中学生的数学能力。同时力争顺应高考命题方向，为高中学生全面掌握高中数学教学内容和进行有效高考复习提供参考与帮助。

全书按内容分为十七章，对教材的顺序作了适当的调整，这样更便于高考复习，同时也能使内容间的联系更紧密，知识结构更清晰。

每章的编写均有：知识网络、知识表解、活学例题与活用训练题四个部分组成。知识网络以网络结构图的方式对全章的内容作一个宏观的概括，便于学生总体把握内容，同时将各章的网络汇总就形成了整个高中数学内容的网络体系，让学生一目了然。知识表解将全章的主要知识点以表解的方式给出，便于学生查找，提高复习效率，同时对相关内容作必要的解读，以帮助学生提高对知识点的认识。活学例题则精选了近年来全国各地的部分优秀高考试题，紧扣所在章节的知识内容与思想方法，更能体现高考对这部分内容的考核要求与考核方式，对其进行深入剖析，提取其精要展现给学生，让学生的复习有更明确的目标，做到事半功倍。活用训练题结合了部分高考原题与作者多年积累的优秀训练题，给学生提供了一组少而精的练习题，以备学生训练之用，同时也给出了完整的解答供参阅。在所选例题与训练题中，以“精”、“活”为原则，不以题海战来替代效率，在使用中希望同学们能多加体会。

本书可为高三学生作复习参考之用，也可为高中其他年级学生及高中教师作查阅工具之用。

上述编写意图我们尽力体现在本书的内容之中，但由于作者水平有限及编写较为仓促，书中难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2008. 12

编委会名单

主　　编：顾鸿达

本书编写：顾鸿达　邵　骁　张亚东　杨岚清

桂思铭　朱兆和　白伟雄

编委名单：白伟雄　桂思铭　顾鸿达　顾跃平

胡　军　马德彬　邵　骁　杨岚清

张亚东　朱兆和

目　　录

第一章　集合与简易逻辑

知识网络

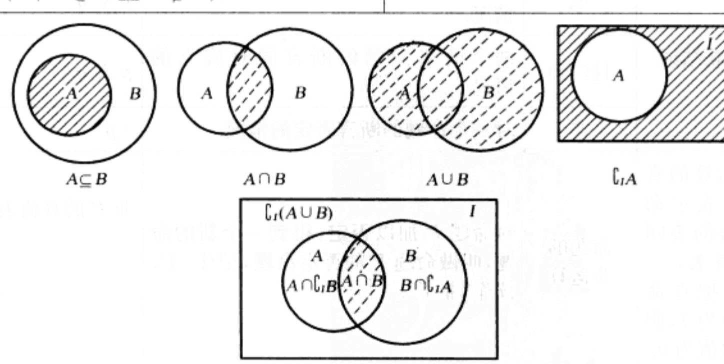
- 集　合
  - 基本概念
    - 集合与元素
    - 元素的性质
    - 集合的表示
    - 集合的分类
    - 常用数集
    - 空集
  - 集合关系
    - 子集
    - 真子集
    - 相等的集合
  - 集合运算
    - 交集
    - 并集
    - 补集
    - 差集
    - 文氏图
- 简易逻辑
  - 命题
    - 简单命题
    - 复合命题
    - 命题运算真值表
    - 四种命题的关系
    - 命题的否定方法
    - 等价命题
  - 充分必要条件
  - 逻辑联结词
    - 或
    - 且(与)
    - 非

知识表解

1. 集合

<table>
<tr><th colspan="2">知识点</th><th>定　义</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td colspan="2">集合定义</td><td>我们把能够确切指定的一些对象组成的整体叫做集合，简称集，通常用大写字母 A，B，C，… 来表示集合(该定义仅为描述性定义).</td><td rowspan="3">当某元素 a 是集合 A 中的元素时，我们称 a 属于 A，记作 $a \in A$；
当元素 a 不是集合 A 中的元素时，我们称 a 不属于 A，记作 $a \notin A$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">元素定义</td><td>我们把集合所研究的确切对象称为元素，通常用小写字母 a，b，c，… 来表示元素.</td></tr>
<tr><td colspan="2">集合元素的性质</td><td>集合元素具有确定性、无序性和互异性.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">集合的表示方法</td><td>列举法</td><td>把集合中元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做列举法.</td><td>当元素个数不多时，建议用列举法表示(它指出集合元素的范围).</td></tr>
<tr><td>描述法</td><td>把集合中元素的共同属性以文字或数字表达式写在大括号内表示集合的方法叫做描述法. 通常记为：$A = \{x \mid x$ 具有性质 $P\}$.</td><td>当元素个数较多或无限时，建议用描述法表示(它指出集合元素的属性).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">集合分类</td><td>有限集</td><td>含有有限个元素的集合叫做有限集.</td><td rowspan="2">对于任意正整数 k，记集合 $N_k = \{x \mid x \leqslant k,\ x \in \mathbf{N}^*\}$. 若集合 A 能与某一集合 N_k 一一对应，则集合 A 为有限集，且它的元素个数为 k，记作 $\mathrm{card}(A) = k$. 若集合 A，对于任何正整数 M，总有子集 A'，使 $\mathrm{card}(A') > M$，则集合 A 为无限集.</td></tr>
<tr><td>无限集</td><td>含有无限个元素的集合叫做无限集.</td></tr>
<tr><td colspan="2">空集</td><td>不含任何元素的集合叫做空集，记为 $\varnothing$.</td><td>任何元素都不是 $\varnothing$ 的元素，$\varnothing$ 中没有元素.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="5">常用数集</td><td>自然数集 $\mathbf{N}$(非零自然数集 $\mathbf{N}^*$)</td><td rowspan="5">集合中的元素都是数.</td></tr>
<tr><td>整数集 $\mathbf{Z}$(正整数集 $\mathbf{Z}^+$，负整数集 $\mathbf{Z}^-$)</td></tr>
<tr><td>有理数集 $\mathbf{Q}$(正有理数集 $\mathbf{Q}^+$，负有理数集 $\mathbf{Q}^-$)</td></tr>
<tr><td>实数集 $\mathbf{R}$(正实数集 $\mathbf{R}^+$，负实数集 $\mathbf{R}^-$)</td></tr>
<tr><td>复数集 $\mathbf{C}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">子集</td><td>对于两个集合 A 和 B，如果 A 中任何一个元素都属于集合 B，即任意 $a \in A$，都有 $a \in B$，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读作“A 包含于 B”，或“B 包含 A”.</td><td>(1) 规定空集是任何集合的子集；
(2) 任何一个集合是它本身的子集；
(3) 若 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；
(4) 对于两个集合 A 和 B，如果 A 中存在一个元素不属于 B，即存在 $a_0 \in A$，但 $a_0 \notin B$，那么集合 A 就不是集合 B 的子集，记作 $A \not\subseteq B$.</td></tr>
</table>

（续表）

知识点		定 义	说 明
真子集		对于两个集合 A 和 B，如果 $A\subseteq B$ 且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$，读作"A 真包含于 B"，或"B 真包含 A".	(1) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$，则 $A\subsetneqq B$； (2) 空集是任何非空集合的真子集； (3) 对于集合 A,B,C， ① 若 $A\subseteq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$； ② 若 $A\subsetneqq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subsetneqq C$； (4) 含 n 个元素集合的全部子集的个数为 2^n，真子集有 2^n-1 个.
相等的集合		对于两个集合 A 和 B，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，那么叫做集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$，读作"集合 A 等于集合 B".	若 $A=B$，则 A,B 两个集合中的所有元素完全都相同.
集合运算	交集	由集合 A 与集合 B 的所有公共元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.	(1) $A\cap A=A$； (2) $A\cap\varnothing=\varnothing$； (3) $A\cap B=B\cap A$； (4) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$； (5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$； (6) $\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$ (De Morgan 法则).
	并集	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.	(1) $A\cup A=A$； (2) $A\cup\varnothing=A$； (3) $A\cup B=B\cup A$； (4) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$； (5) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$； (6) $\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$ (De Morgan 法则).
	补集	在研究集合与集合之间的关系时，如果一个集合含有所要研究的各个集合的全部元素，那么这个集合可以看作一个全集，全集通常用 I 来表示. 若 I 是全集，$A\subseteq I$，则由 I 中不属于 A 的所有元素组成的集合叫做 A 在 I 中的补集，记作 $\complement_I A$，读作"A 补"，即 $\complement_I A=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$.	(1) $A\cup\complement_I A=I$； (2) $A\cap\complement_I A=\varnothing$； (3) $\complement_I(\complement_I A)=A$； (4) $\complement_I\varnothing=I$； (5) $\complement_I I=\varnothing$； (6) 若 $A\subsetneqq B$，则 $\complement_I B\subsetneqq\complement_I A$.
	差集	设 A,B 为两个集合，所有属于集合 A 而不属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的差集，记作 $A-B$ 或 $A\backslash B$，即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.	当 $B\subseteq A$ 时，$\complement_A B=A-B$.
	集合运算的图示法		

（续表）

<table>
<tr><th>知识点</th><th colspan="2">定　义</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td rowspan="4">区间概念</td><td rowspan="4">通常把介于两个实数 $a,b(a<b)$ 之间的实数集合称为区间，并规定：</td><td>$\{x \mid a<x<b\}$ 叫做开区间，记作 (a, b)；</td><td rowspan="4">实数集 $\mathbf{R}$ 记作 $(-\infty, +\infty)$，通常把 $\{x \mid x>a\}$，$\{x \mid x<b\}$ 分别记作 $(a, +\infty)$，$(-\infty, b)$；把 $\{x \mid x \geqslant a\}$，$\{x \mid x \leqslant b\}$ 分别记作 $[a, +\infty)$，$(-\infty, b]$. 上述区间中，a，b 称为区间的端点，∞ 读作无穷大.</td></tr>
<tr><td>$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 叫做闭区间，记作 $[a, b]$；</td></tr>
<tr><td>$\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 叫做半闭半开区间，记作 $[a, b)$；</td></tr>
<tr><td>$\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 叫做半开半闭区间，记作 $(a, b]$.</td></tr>
<tr><td>文氏图</td><td colspan="2">用封闭曲线直观地表示集合及其关系的图形称为文氏图（以英国逻辑学家 John Venn 命名）或韦恩图.</td><td></td></tr>
<tr><td>两个有限集的并集的元素个数</td><td colspan="2">有限集 A 的元素个数记作 $\mathrm{card}(A)$，一般地，对任意两个有限集合 A，B，有 $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$.</td><td>(1) 规定：$\mathrm{card}(\varnothing) = 0$；
(2) 也可将 $\mathrm{card}(A)$ 记作 $n(A)$ 或 $|A|$.</td></tr>
<tr><td>对偶原理</td><td colspan="3">集合论中成立的任一定理，如果将其中的 $\cup$ 与 $\cap$，A 与 $\complement_I A$，$\subseteq$ 与 $\supseteq$，I 与 $\varnothing$ 互换，则该定理仍然成立.</td></tr>
</table>

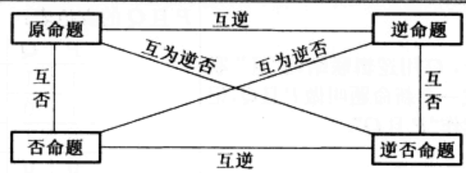
2. 简易逻辑

<table>
<tr><th>知识点</th><th colspan="2">定　义</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td rowspan="3">命题</td><td colspan="2">命题是对事物判断真假的语句，通常用陈述句表示（第二定义：用文字或符号表达判断的语句）.</td><td>正确的命题叫做真命题，错误的命题叫做假命题. 任何命题或者真，或者假，不能同时既真又假.</td></tr>
<tr><td>简单命题</td><td>不含逻辑联结词的命题叫简单命题.</td><td>用 p，q，r，s 等字母表示.</td></tr>
<tr><td>复合命题</td><td>由简单命题与逻辑联结词构成的命题称为复合命题.</td><td>p 或 $q(p \vee q)$
p 且 $q(p \wedge q)$
非 $p(\neg p)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">逻辑联结词</td><td>或</td><td>两个简单命题至少有一个断言成立的情况.</td><td>$p \vee q$</td></tr>
<tr><td>且（与）</td><td>两个简单命题的断言同时成立的情况.</td><td>$p \wedge q$</td></tr>
<tr><td>非</td><td>对一个命题的断言否定的情况.</td><td>$\neg p$</td></tr>
<tr><td>命题运算的真值表：表示命题真假的表叫做真值表，一般地，把真命题取值为 1，假命题取值为 0.</td><td>命题的非运算</td><td>对命题 P 加以否定，得到一个新的命题，叫做命题 P 的否定命题，记作 $\neg P$，读作“非 P”.</td><td>非 P 的真值表：
<table><tr><th>P</th><th>$\neg P$</th></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
</table>

（续表）

<table>
<tr><th>知识点</th><th colspan="4">定　　义</th><th colspan="2">说　　明</th></tr>
<tr><td rowspan="3">命题运算的真值表：表示命题真假的表叫做真值表，一般地，把真命题取值为 1，假命题取值为 0.</td><td>命题的且运算</td><td colspan="3">两个命题 P，Q 用逻辑联结词“且”联结起来构成一个新命题叫做 P 且 Q，记作 $P\wedge Q$，读作“P 且 Q”.</td><td colspan="2">P 且 Q 的真值表：<table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P\wedge Q$</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>命题的或运算</td><td colspan="3">两个命题 P，Q 用逻辑联结词“或”联结起来构成一个新命题叫做 P 或 Q，记作 $P\vee Q$，读作“P 或 Q”.</td><td colspan="2">P 或 Q 的真值表：<table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P\vee Q$</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>假言命题</td><td colspan="3">把命题 P，Q 用“如果……，那么……”联结起来的新命题叫做假言命题，记作 $P\rightarrow Q$ 或 $P\Rightarrow Q$，读作“若 P，则 Q”.</td><td colspan="2">$P\rightarrow Q$ 的真值表：<table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P\rightarrow Q$</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>由 α 推出 β</td><td colspan="4">如果条件 α 成立可以推证出结论 β 成立，那么就说由 α 推出 β，记作 $\alpha\Rightarrow\beta$，读作“α 推出 β”；如果 α 成立而 β 不成立，读作“α 推不出 β”.</td><td colspan="2" rowspan="2">在这里，条件 α 必须为真.</td></tr>
<tr><td>α 与 β 等价</td><td colspan="4">若 $\alpha\Rightarrow\beta$，且 $\beta\Rightarrow\alpha$，则称 α 与 β 等价，记作“$\alpha\Leftrightarrow\beta$”.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">命题的否定方法</td><td>正面</td><td>等于</td><td>大于(>)</td><td>小于(<)</td><td>是</td><td>都是</td></tr>
<tr><td>否定</td><td>不等于</td><td>不大于(⩽)</td><td>不小于(⩾)</td><td>不是</td><td>不都是</td></tr>
<tr><td>正面</td><td>至多有一个</td><td>至少有一个</td><td>任意的(所有的)</td><td>至多有 n 个</td><td>任意二个</td></tr>
<tr><td>否定</td><td>至少有二个</td><td>一个也没有</td><td>某个(某些)</td><td>至少有 $n+1$ 个</td><td>某二个</td></tr>
<tr><td rowspan="3">命题的充分必要条件</td><td>充分条件</td><td colspan="3">若条件 A 可以使事件 B 成立，则称条件 A 为事件 B 成立的充分条件，简称 A 为 B 的充分条件.</td><td colspan="2">充分为足够的意思，保证能由 A 推证得到 B，即 $A\Rightarrow B$.</td></tr>
<tr><td>必要条件</td><td colspan="3">若没有条件 A，则事件 B 不能成立，则称事件 A 为事件 B 成立的必要条件，简称 A 为 B 的必要条件.</td><td colspan="2">(1) 必要为不可缺少的意思，缺少了 A，则 B 不成立，即 $\neg A\Rightarrow\neg B$；
(2) 由于逆否命题与原命题等价，故若由 B 能推证得到 $A(B\Rightarrow A)$，即 A 是 B 的必要条件($B\Rightarrow A$ 等价于 $\neg A\Rightarrow\neg B$).</td></tr>
<tr><td>充要条件</td><td colspan="3">对于事件 A 与 B，若 $A\Rightarrow B$，且 $B\Rightarrow A$，即 $A\Leftrightarrow B$，则称 A 是 B 的充分而且必要条件，简称充要条件.</td><td colspan="2">(1) 欲证 A 是 B 的充要条件，需要两个方面：① $A\Rightarrow B$(充分性)，② $B\Rightarrow A$(必要性)；
(2) 一个用充要条件叙述的命题，实际上包含了两个互逆的命题，这类命题还常常用“当且仅当”等语句来表述.</td></tr>
</table>

（续表）

知识点	定　义	说　明
四种命题的关系		原命题：若 α，则 β $(\alpha \Rightarrow \beta)$. 逆命题：若 β，则 α $(\beta \Rightarrow \alpha)$. 否命题：若 $\neg\alpha$，则 $\neg\beta$ $(\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta)$. 逆否命题：若 $\neg\beta$，则 $\neg\alpha$ $(\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$.
等价命题	如果两个命题 P，Q 满足 $P \rightarrow Q$ 且 $Q \rightarrow P$，那么 P，Q 叫做等价命题，记作 $P \leftrightarrow Q$ 或 $P \Leftrightarrow Q$，读作"P 等价于 Q".	互为逆否命题的两个命题为等价命题，但等价命题不一定互为逆否命题.

活学例题

【例 1】 设 $a, b \in \mathbf{R}$，集合 $\{1, a+b, a\} = \left\{0, \dfrac{b}{a}, b\right\}$，则 $b-a=$ ________.

解：设 $a, b \in \mathbf{R}$，由 $\{1, a+b, a\} = \left\{0, \dfrac{b}{a}, b\right\}$ 知 $a \neq 0$，

$\therefore a+b=0,\ a=-b$，

$\therefore a=-1,\ b=1$，则 $b-a=2$.

说明：注意集合元素的互异性，抓住元素 0 这个突破口，展开逻辑推理分析.

【例 2】 已知 $A=\{x, xy, \lg(xy)\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，且 $A=B$，则 $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2008}+\dfrac{1}{y^{2008}}\right)$ 的值为________.

解：由集合元素的互异性知 $x \neq 0$，$y \neq 0$，所以只能 $\lg(xy)=0$，即 $xy=1$，此时 $A=\{x, 1, 0\}$，$B=\left\{0, |x|, \dfrac{1}{x}\right\}$，显然 $x \neq 1$，因此 $x=-1$，$y=-1$，所以原式为 0.

【例 3】 记函数 $f(x)=\log_2(2x-3)$ 的定义域为集合 M，函数 $g(x)=\sqrt{(x-3)(x-1)}$ 的定义域为集合 N，

(1) 分别求集合 M，N；

(2) 求 $M \cap N$ 和 $M \cup N$.

解：(1) 由函数 $f(x)=\log_2(2x-3)$ 可知 $2x-3>0$，

所以 $M=\left\{x \middle| x>\dfrac{3}{2}\right\}$；

由函数 $g(x)=\sqrt{(x-3)(x-1)}$ 可知 $(x-3)(x-1) \geqslant 0$，

所以 $N=\{x \mid x \leqslant 1$ 或 $x \geqslant 3\}$.

(2) 集合运算 $M \cap N=\{x \mid x \geqslant 3\}$，$M \cup N=\left\{x \middle| x \leqslant 1 \text{ 或 } x>\dfrac{3}{2}\right\}$.

说明：熟练掌握集合间的运算，可充分借助数轴的形式帮助进行集合运算.

【例 4】 已知集合 $P=\{(x,\ y)\mid(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant 4\}$，集合 $Q=\left\{(x,\ y)\mid(x+1)^2+(y-m)^2<\dfrac{1}{4}\right\}$，且 $P\cap Q=Q$，求实数 m 的取值范围.

解： 分析题意，点集 P 表示平面上以 $O_1(-2,\ 3)$ 为圆心，2 为半径的圆所围成的区域(包括圆周)；点集 Q 表示平面上以 $O_2(-1,\ m)$ 为圆心，$\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆的内部区域. 要使得 $P\cap Q=Q$，应使 $\odot O_2$ 内含或内切于 $\odot O_1$，故有 $|O_1O_2|^2\leqslant(R_1-R_2)^2$，即 $(-1+2)^2+(m-3)^2\leqslant\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2$. 解得 $3-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant 3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，所以实数 m 的取值范围为 $\left[3-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ 3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

说明：学会运用集合语言表述几何问题，利用数形结合方法解题.

【例 5】 若集合 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0\}$，且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

解： 由集合 A 满足 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，可对集合 A 进行分类讨论：

情况 ①：当集合 $A=\varnothing$ 时满足条件，此时 A 中方程 $\Delta=(p+2)^2-4<0\Rightarrow -4<p<0$；

情况 ②：当集合 $A\neq\varnothing$ 时，若要满足条件，则 A 中方程无正数解，不妨令 $\varphi(x)=x^2+(p+2)x+1$，所以 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ -(p+2)<0\\ \varphi(0)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p\leqslant -4\text{ 或 }p\geqslant 0\\ p>-2\end{cases}\Rightarrow p\geqslant 0$. 综上所述，实数 p 的取值范围为 $(-4,\ +\infty)$.

说明：解集合问题时要注意 $\varnothing$ 的情形，针对方程根的讨论往往结合函数图像进行分析.

【例 6】 若 $B=\{x\mid x^2-3x+2<0\}$，问是否存在实数 a 使 $A=\{x\mid x^2-(a+a^2)x+a^3<0\}$ 满足 $A\cap B=A$？请说明你的理由.

解： 由题意可知 $B=\{x\mid 1<x<2\}$，$A=\{x\mid(x-a)(x-a^2)<0\}$，假设存在实数 a，使 $A\cap B=A$，则

① 若 $a=a^2$，即 $a=0$ 或 $a=1$ 时，$A=\{x\mid(x-a)^2<0\}=\varnothing$，满足 $A\cap B=A$，

$\therefore$ $a=0$ 或 $a=1$ 满足题意；

② 若 $a^2>a$，即 $a>1$ 或 $a<0$ 时，$A=\{x\mid a<x<a^2\}$，要使 $A\cap B=A$，即 $A\subseteq B$，则 $\begin{cases}a>1,\\ a^2\leqslant 2,\end{cases}$ 因此 $1<a\leqslant\sqrt{2}$，

$\therefore$ $a\in(1,\ \sqrt{2}]$ 时满足题意；

③ 若 $a^2<a$，即 $0<a<1$ 时，$A=\{x\mid a^2<x<a\}$，要使 $A\subseteq B$，则 $\begin{cases}a\leqslant 2\\ a^2\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 2$，

$\therefore$ 此时 $a\in\varnothing$.

综上所述，当 $a\in[1,\ \sqrt{2}]\cup\{0\}$ 时满足 $A\cap B=A$，即存在实数 a 使 $A\cap B=A$ 成立.

说明：针对含有字母的数学问题往往需要分类讨论，讨论时须注意各种情况不重不漏.

【例 7】 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，有下列三个命题：

① 若存在常数 M，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\leqslant M$，则 M 是函数 $f(x)$ 的最大值；

② 若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$x\neq x_0$，有 $f(x)<f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最大值；

③ 若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值.

这些命题中，是真命题的是________.

解： ① 显然错误，可举反例：$f(x)=-x^2$ 和 $M=1$，满足命题条件，但 $M=1$ 不是函数 $f(x)$ 的最大值；仔细阅读 ②、③，结论均正确.

说明：命题真假的判定需慎重，假命题要能举出反例，真命题要能予以证明.

【例 8】 设 a，b 是实数，① $a+b>1$； ② $a+b>2$； ③ $a^2+b^2>2$； ④ $ab>1$. 其中是"a，b 中至少有一个大于 1"的充分条件的是（　　）.

A. ①和④　　B. ②和④　　C. ②和③　　D. 只有②

解： 由充分条件的概念，只需分析条件能使结论成立的命题即可. ①中元素可以都小于 1，如 $a=b=\dfrac{3}{4}$；③中元素可以都是负数；④中元素可以为 $a=b=-2$；通过举反例推得这三项都不满足要求. ②中元素中至少有一个大于 1，所以本题选择 D.

【例 9】 设 m，$a\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2+(a-1)x+1$，$g(x)=mx^2+2ax+\dfrac{m}{4}$，若"对于一切实数 x，$f(x)>0$"是"对一切实数 x，$g(x)>0$"的充分条件，求实数 m 的取值范围.

解： 对一切实数 x，$f(x)>0\Leftrightarrow\Delta_f=(a-1)^2-4<0\Leftrightarrow -1<a<3\Leftrightarrow a\in A$，这里 $A=(-1,3)$. 当 $m=0$ 时，$g(x)=2ax$，因为 $g(0)=0$，所以不可能对一切实数 x，$g(x)>0$. 因此，对一切实数 x，$g(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta_g=4a^2-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{m}{2}<a<\dfrac{m}{2}(m>0)$. "对一切实数 x，$f(x)>0$"是"对一切实数 x，$g(x)>0$"的充分条件，必须且只需 $A\subseteq\left(-\dfrac{m}{2},\dfrac{m}{2}\right)\Leftrightarrow\dfrac{m}{2}\geqslant 3\Leftrightarrow m\geqslant 6$. 所以 m 的取值范围为 $[6,+\infty)$.

说明：$f(x)$ 是一个二次项系数为正数的二次函数，对一切实数 x，$f(x)>0$ 的充要条件是判别式 $\Delta_f<0$，由此可求出参数 a 的取值范围 A. 对一切实数 x，$g(x)>0$ 的充要条件是 $m>0$，且 $\Delta_g<0$，由此也可求出参数 a 的取值范围 $A(m)$（这是一个与 m 有关的数集）. 满足题设等价于对一切 $m>0$，$A\subseteq A(m)$. 这样就可求得 m 的取值范围. 实际上本例指出了充分条件（或必要条件）与集合关系之间的内在联系. 不妨设 $A=\{a\mid a$ 使 α 成立$\}$，$B=\{b\mid b$ 使 β 成立$\}$，则 $\alpha\Rightarrow\beta$（即 α 是 β 的充分条件）与 $A\subseteq B$ 是等价的.

【例 10】 求关于 x 的方程 $|x-2n|=k\cdot\lg x(2n-1<x\leqslant 2n+1，n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2)$ 有两个不相等实根的充要条件.

解： 关于 x 的方程 $|x-2n|=k\cdot\lg x$ 有两个不相等实数根，由题意可等价理解为函数 $f_1(x)=|x-2n|$ 与函数 $f_2(x)=k\cdot\lg x$ 在 $2n-1<x\leqslant 2n+1(n\in\mathbf{N}^*，n\geqslant 2)$ 范围内有两个不同交点. 作出示意图观察图像，可得充要条件为 $\begin{cases}k>0\\ f_1(2n+1)\geqslant f_2(2n+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k>0\\ 1\geqslant k\cdot\lg(2n+1)\end{cases}$，注意到 n 的范围，所以所求的充要条件为 $0<k\leqslant\dfrac{1}{\lg(2n+1)}$.

说明：充要条件的寻找必须注意考虑是否满足等价性，超越方程的求解可借助图像数形结合解决.

【例 11】 设 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，$B=\{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$，$A$ 中元素都是非零自然数且 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，并满足 $A\cap B=\{a_1, a_4\}$，又 $a_1+a_4=10$，$A\cup B$ 中所有元素之和等于 224，求集合 A.

解：由 a_1 是 A，B 的公共元素，且 a_1，a_1^2 分别为 A，B 中的最小的元素，从而有 $a_1=a_1^2=1$，由 $a_1+a_4=10$ 可知 $a_4=9$，$a_4^2=81$. 利用 $A\cup B$ 中所有元素（只有 8 个元素）的和等于 224，同时 $a_1^2+a_4^2=82$，可知 $a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2=142$. 因为 $a_4<a_5$，所以 $a_5>9$，而由 $a_4=9$，所以 a_2，a_3 中有一个为 3，设另一个为 x，若 $a_5\geqslant 11$，则 $142=a_2+a_3+a_5+a_2^2+a_3^2+a_5^2\geqslant 3+x+11+9+x^2+121>144$，这是不可能的. 所以可得集合 A 中最大的数 $a_5=10$，再求得 $a_2=3$，$a_3=4$，可知 $A=\{1, 3, 4, 9, 10\}$.

【例 12】 设集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，S_1，S_2，…，S_k 都是 M 的含两个元素的子集，且满足：对任意的 $S_i=\{a_i, b_i\}$，$S_j=\{a_j, b_j\}$($i\neq j$，i、$j\in\{1, 2, 3,\cdots k\}$)，都有 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\right\}$($\min\{x, y\}$ 表示两个数 x，y 中的较小者)，则 k 的最大值是(　　).

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

解：分析题意可知含两个元素的子集有 15 个，但 $\{1, 2\}$，$\{2, 4\}$，$\{3, 6\}$ 只能取一个，$\{1, 3\}$，$\{2, 6\}$ 只能取一个，$\{2, 3\}$，$\{4, 6\}$ 只能取一个，故满足条件的两个元素的集合有 11 个，所以选择 B.

说明：能力题需要在熟练掌握数学知识和技能的基础上，有效合理地分析解决. 本题为学习能力题的范例，要我们通过阅读、理解、迁移、学习，将过去没有学过的数学知识进行"限时"学习，并将它们作为进一步运算、推理和分析问题的起点. 能力题立意新颖，形式灵活，数学背景广泛，涉及到的数学知识相对而言不会很复杂.

【例 13】 (1) $A=\{x\mid a_1\cdot x=b_1, a_1\cdot b_1\neq 0\}$，$B=\{x\mid a_2\cdot x=b_2, a_2\cdot b_2\neq 0\}$，证明：$A=B$ 的充要条件是 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$；

(2) 试对两个一元二次方程的解集写出类似的结果，并加以证明；

(3) 试对两个一元二次不等式的解集写出类似的结果，并加以证明.

解：(1) 证明"充分性"：由 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ 及 a_1，a_2 都是非零实数得 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$，又集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{b_1}{a_1}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{b_2}{a_2}\right\}$，则可知 $A=B$；

证明"必要性"：集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{b_1}{a_1}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{b_2}{a_2}\right\}$，由 $A=B$ 得 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$，又 a_2，b_2 都是非零实数，于是 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

∴ 综上可知原命题成立.

(2) 命题：若系数 a_1，b_1，c_1 和 a_2，b_2，c_2 都是非零实数，设方程 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ 在复数范围内的解的集合分别是 A 和 B，求证："$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$"是"$A=$