

研究生教学用书

工程结构 数值分析方法

*Numerical Analysis
Methods on Engineering Structure*

夏永旭 主编



人民交通出版社
China Communications Press

内 容 提 要

本书是一本关于工程结构中近似分析方法的专著。全书共分为十章,分别介绍了应用于工程结构分析计算中的变分法、差分法、积分变换法、加权残值法、杂交方法、边界单元法、摄动方法、半解析半数值法等。书中不仅详细地介绍了各种数值方法的基本原理和技巧,而且提供了每一方法的应用实例,并有一些最新的研究成果。

本书可用于道路、桥梁、隧道、岩土、工民建及其他相关专业的研究生的“工程结构数值分析”课程的教材,也可用作相关专业工程技术人员和高年级本科生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程结构数值分析方法 / 夏永旭主编. —北京:人民交通出版社,2008.9

21世纪交通版研究生教学用书

ISBN 978-7-114-07283-3

I.工… II.夏… III.工程结构—数值计算—研究生—
教学参考资料 IV.TU311.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第104967号

研究生教学用书

书 名:工程结构数值分析方法

著 者:夏永旭

责任编辑:曲乐 王文华

出版发行:人民交通出版社

地 址:(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址:<http://www.ccpres.com.cn>

销售电话:(010)59757969,59757973

总 经 销:北京中交盛世书刊有限公司

经 销:各地新华书店

印 刷:北京凯通印刷厂

开 本:787×960 1/16

印 张:14.75

字 数:248千

版 次:2008年10月 第1版

印 次:2008年10月 第1次印刷

书 号:ISBN 978-7-114-07283-3

印 数:0001—3000册

定 价:27.00元

(如有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换)

总 序

当今世界,科学技术突飞猛进,全球经济一体化趋势进一步加强,科技对于经济增长的作用日益显著,教育在国家经济与社会发展中所处的地位日益重要。进入新世纪,面对国际国内经济与社会发展所出现的新特点,我国的高等教育迎来了良好的发展机遇,同时也面临着巨大的挑战,高等教育的发展处在一个前所未有的重要时期。其一,加入WTO,中国经济已融入到世界经济的发展进程之中,国家间的竞争更趋激烈,竞争的焦点已更多地体现在高素质人才的竞争上,因此,高等教育所面临的是全球化条件下的综合竞争。其二,我国正处在由计划经济向社会主义市场经济过渡的重要历史时期,这一时期,我国经济结构调整将进一步深化,对外开放将进一步扩大,改革与实践必将提出许多过去不曾遇到的新问题,高等教育面临加速改革以适应国民经济进一步发展的需要。面对这样的形势与要求,党中央国务院提出扩大高等教育规模,着力提高高等教育的水平与质量。这是为中华民族自立于世界民族之林而采取的极其重大的战略步骤,同时也是为国家未来的发展提供基础性的保证。

为适应高等教育改革与发展的需要,早在1998年7月,教育部就对高等学校本科专业目录进行了第四次全面修订。在新的专业目录中,土木工程专业扩大了涵盖面,原先的公路与城市道路工程、桥梁工程、隧道与地下工程等专业均纳入土木工程专业。本科专业目录的调整是为满足培养“宽口径”复合型人才的要求,对原有相关专业本科教学产生了积极的影响。这一调整是着眼于培养21世纪社会主义现代化建设人才的需要而进行的,面对新的变化,要求我们对人才的培养规格、培养模式、课程体系和内容都应作出适时调整,以适应要求。

根据形势的变化与高等教育所提出的新的要求,同时,也考虑到近些年来公路交通大发展所引发的需求,人民交通出版社通过对“八五”、“九五”期间的路桥及交通工程专业高校教材体系的分析,提出了组织编写一套面向21世纪的具有鲜明交通特色的高等学校教材的设想。这一设想,得到了原路桥教学指导委员会几乎所有成员学校的广泛响应与支持。2000年6月,由人民交通出版社发起组织全国面向交通办学的12所高校的专家学者组成面向21世纪交通版高等学校教材(公

路类)编审委员会,并召开第一次会议,会议决定着手组织编写土木工程专业具有交通特色的道路专业方向、桥梁专业方向以及交通工程专业教材。会议经过充分研讨,确定了包括基本知识技能培养层次、知识技能拓宽与提高层次以及教学辅助层次在内的约 130 种教材,范围涵盖本科与研究生用教材。会后,人民交通出版社开始了细致的教材编写组织工作,经过自由申报及专家推荐的方式,近 20 所高校的百余名教授承担约 130 种教材的主编工作。2001 年 6 月,教材编委会召开第二次会议,全面审定了各门教材主编院校提交的教学大纲,之后,编写工作全面展开。

面向 21 世纪交通版高等学校教材编写工作是在本科专业目录调整及交通大发展的背景下展开的。教材编写的基本思路是:(1)顺应高等教育改革的形势,专业基础课教学内容实现与土木工程专业打通,同时保留原专业的主干课程,既顺应向土木工程专业过渡的需要,又保持服务公路交通的特色,适应宽口径复合型人才培养的需要。(2)注重学生基本素质、基本能力的培养,将教材区分为二个主层次与一个辅助层次,即基本知识技能培养层次与知识技能拓宽与提高层次,辅助层次为教学参考用书。工作的着力点放在基本知识技能培养层次教材的编写上。(3)目前,中国的经济发展存在地区间的不平衡,各高校之间的发展也不平衡,因此,教材的编写要充分考虑各校人才培养规格及教学需求多样性的要求,尽可能为各校教学的开展提供一个多层次、系统而全面的教材供给平台。(4)教材的编写在总结“八五”、“九五”工作经验的基础上,注意体现原创性内容,把握好技术与教学需要的关系,努力体现教育面向现代化、面向世界、面向未来的要求,着力提高学生的创新思维能力,使所编教材达到先进性与实用性兼备。(5)配合现代化教学手段的发展,积极配套相应的教学辅件,便利教学。

教材建设是教学改革的重要环节之一,全面做好教材建设工作,是提高教学质量的重要保证。本套教材是由人民交通出版社组织,由原全国高等学校路桥与交通工程教学指导委员会成员学校相互协作编写的一套具有交通出版社品牌的教材,教材力求反映交通科技发展的先进水平,力求符合高等教育的基本规律。各门教材的主编均通过自由申报与专家推荐相结合的方式确定,他们都是各校相关学科的骨干,在长期的教学与科研实践中积累了丰富的经验。由他们担纲主编,能够充分体现教材的先进性与实用性。本套教材预计在二年内完全出齐,随后,将根据情况的变化而适时更新。相信这批教材的出版,对于土木工程框架下道路工程、桥梁工程专业方向与交通工程专业教材的建设将起到有力的促进作用,同时,也使各校在教材选用方面具有更大的空间。需要指出的是,该批教材中研究生教材占有较大比例,研究生教材多具有较高的理论水平,因此,该套教材不仅对在校学生,同时对于在职学习人员及工程技术人员也具有很好的参考价值。

21 世纪初叶,是我国社会经济发展的重要时期,同时也是我国公路交通从紧张和制约状况实现全面改善的关键时期,公路基础设施的建设仍是今后一项重要而艰巨的任务,希望通过各相关院校及所有参编人员的共同努力,尽快使全套面向 21 世纪交通版高等学校教材(公路类)尽早面世,为我国交通事业的发展做出贡献。

21 世纪交通版
高等学校教材(公路类)编审委员会
人民交通出版社
2001 年 12 月

前言

PREFACE

在自然科学和工程应用研究中,理论研究、实验模拟和数值分析是三种不同的方法。这三种方法互相依赖、相辅相成,既可以完全独立用于某一问题的研究,又可以同时求解共同的问题。但就每一方法而言,实验模拟展示了问题的物理本质,理论研究是对其物理本质的诠释和抽象,数值分析则是对问题发展过程及最终结果的数量描述。然而,由于问题的多样性和复杂性,能够用实验方法和理论分析完全求解的问题很少。所以,大量的自然科学和工程技术问题不得不采用数值方法去近似求解。

本书是根据作者二十多年来,对土木工程中的道路、桥梁、隧道、岩土、工民建,以及力学和汽车专业研究生的结构计算课程的教学实践,并结合作者的一些科研工作编写而成,目的在于使学习者能够开阔视野,扩展思路,增长知识,提高技能。

关于数值近似分析方法中的有限单元法,因为已有不少的专著和教材,所以本书不予介绍。本书共分为十章,重点介绍了应用于工程结构分析计算中的变分法、差分法、积分变换法、加权残值法、杂交方法、边界单元法、摄动方法、半解析半数值法等。书中不仅详细地介绍了各种数值方法的基本原理和技巧,而且提供了每一方法的应用实例,并有一些最新的研究成果。虽然也有些方法比较传统,但在解决某些特殊的问题时仍然很方便。

本书除第五章由周宗宪编写外,其余均由夏永旭编写。书中的插图由杨涛绘制。

本书可用于道路、桥梁、隧道、岩土、工民建及其他相关专业研究生的“工程结构数值分析”课程的教材,也可用作相关专业的工程技术人员和高年级本科生的参考书。

夏永旭

2008年3月31日



CONTENTS

08	8.1
33	4.4
53
75	1.2
76	3.2
88	6.2
93	1.3
79	2.2
104	3.2
105	1.2
106	1.3
107	9
113	11
114	12
130	12
131	13
134	21
139	27
180	28
140	28
144	29
146	33
147	35
148	43
152	45
153	46
163	50
169	53
180	54
190	54
191	58

4.3	温度场问题	60
4.4	应力函数的差分分解	62
	本章参考文献	65
第5章	积分变换法	66
5.1	傅立叶积分变换法	66
5.2	弦、梁问题的傅立叶积分变换解	72
5.3	薄膜、薄板问题的傅立叶积分变换解	76
5.4	汉克尔变换的原理及应用	82
5.5	无限大厚板的轴对称变形问题	92
5.6	梅林变换及其应用	97
	本章参考文献	104
第6章	边界单元法	105
6.1	基本概念	105
6.2	基本解	107
6.3	边界积分方程与边界元方法	113
6.4	平面问题	117
6.5	轴对称问题	126
6.6	弹性薄板问题	131
	本章参考文献	137
第7章	摄动方法	139
7.1	小参数摄动法的概念	139
7.2	小参数法的应用	140
7.3	载荷小参数摄动法	144
	本章参考文献	146
第8章	加权残值法	147
8.1	基本原理及方法	147
8.2	试函数和权函数的选择	152
8.3	离散型加权残值法	155
8.4	矩形薄板弯曲的最小二乘法	162
8.5	矩形薄板弯曲的伽辽金法	166
	本章参考文献	168
第9章	杂交加权残值法	169
9.1	配线法	169

9.2	分区加权残值法	171
9.3	康托洛维奇加权残值法	172
9.4	格林加权残值法	173
9.5	分步迭代加权残值法	175
9.6	变率配点法	177
9.7	矩形薄板大挠度弯曲的摄动加权残值法	180
9.8	数学规划加权残值法	184
	本章参考文献	188
第 10 章	半解析半数值法	190
10.1	基本概念及方法分类	190
10.2	有限棱柱、有限层及有限条法	191
10.3	无限元法及半无限元法	202
10.4	半无限边界单元法	207
10.5	有限元和边界元的耦合方法	215
	本章参考文献	218

第 1 章 绪 论

1.1 数值方法的概念

1.1.1 数值方法的概念

在自然科学和工程应用研究中,理论研究、实验模拟和数值分析是三种不同的方法。这三种方法紧密相关、互相依赖、相辅相成,既可以完全独立应用于某一问题的研究,又可以完全同时求解共同的问题。就每一方法而言,实验模拟展示了问题的物理本质,而理论研究是对问题物理本质的抽象和诠释,数值分析则是对问题发展过程及最终结果的数量描述。然而,由于物质世界的千变万化和实际问题的复杂性,能用实验方法完全模拟或采用理论方法解析求解的问题实在太少,因而不得不依赖于数值分析方法。例如由于人力、物力和时间、环境的限制,人们不可能对所有的工程材料在不同的环境下进行全部应力—应变测试,而是借助 CAT 技术进行数值仿真研究。又如自然科学和工程技术中的问题常常归结为定解问题,即在一定的空间边值条件或时间边值条件(初始条件)下求解一系列的微分或积分方程组。但目前关于微分方程精确解的研究,仅仅局限于少量的常微分方程,对于偏微分方程组、多元积分方程组和非线性微分方程,不得不借助于数值分析方法近似求解。

数值分析方法是以前述某种计算技术或计算方法为基础,借助于适当的计算工具,将实验模拟所提供的物理模型或者理论研究所

提供的数学模型转化为对其变化过程的数量描述和最终结果的数值表示。数值分析方法既可以按照不同的计算方法和技术分为矩阵分析法、线性代数法、数学规划法、有限差分法、变分法、直线法、谱方法、特征线法、质点网络法、有限基本解法、加权残值法、有限单元法和边界单元法等,又可以按照数值运算的程度分为半解析半数值法和纯数值方法。上面所提到的变分法和加权残值法就是典型的半解析半数值方法,而有限差方法、有限单元法是典型的纯数值方法。

1.1.2 数值方法的意义

数值方法的发展,不仅弥补了实验模拟、理论研究这两种方法的不足,形成了实验、理论、数值三者并存、互相依赖、互相补充的研究模式,而且更为重要的是,使得过去用实验模拟、理论研究这两种方法无法求解的问题得以实现。特别是现代大型电子计算机的快速发展,使得人们进行复杂的环境模拟和数学计算,不再是不可逾越的障碍。其中最显著的例子就是天气预报计算机模拟技术、CAT 仿真技术、大型海洋平台和空间站的结构力学计算等。另外,伴随着电子计算机应用技术,原有的一些数值方法,如矩阵运算、线性代数、数学规划、微分方法差分格式、微分方程稳定性理论等,也得到了进一步的发展和完善。特别值得称道的是,20 世纪 60 年代出现的有限单元法及后来的边界单元法,使过去不可能实现的一些大型复杂结构的动静力分析变成了常规的计算。

数值方法的功用,不单表现为对实验方法和理论方法的补充和所求问题解答的数字描述,而且还可以帮助人们选择实验方案,甚至提示设计新的实验,也可以启发我们寻求新的解析解或者改进对已有理论分析结果的认识。例如在研究新型桥梁或新型汽车的空气动力特性时,可以借助数值分析的方法在计算机上试算若干种设计方案,然后从中选取几种较好的做风洞试验,从而得到一个最佳的设计。又如运动的等离子体会产生 T 层现象,就是在用数值方法研究磁场中稠密等离子体的运动时发现的,后来以此设计了实验得到证实。数值方法对解析解研究的帮助有两个例子较为显著。一是对于非线性波动方程^[1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1-1)$$

的求解。在用解析分析时,只能求出反映单个孤立波的解。后来在用数值方法求解此问题时,发现方程中还有反映多个不同速度的孤立波的相互碰撞、追

赶和分散现象,由此进而找到了与之对应的解析解。二是在研究中心集中荷载作用下弹性薄圆板的大挠度弯曲时,对于 Von Karman 方程

$$\left. \begin{aligned} D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) - N_r \frac{dw}{dr} - \frac{p}{2\pi r} = 0 \\ r^2 \frac{d^2 N_r}{dr^2} + 3r \frac{dN_r}{dr} + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

应用修正迭代法计算机逐次求解的过程中,发现当迭代至第 27 次时,亦即当板的最大挠度 $w_{\max} \geq 3.6h$ (h 为板厚) 时,其解答出现了明显的分叉^[2]。这一数值结果明确地给出了方程(1-2)的适应范围,而这个结论在以往的解析分析中没有也无法得到。

1.1.3 数值方法中的误差、假象及错误

和世界上任何事物一样,数值方法也有其自己的先天不足和致命的缺点。先天不足主要表现在不能像解析方法那样有明晰的数学表达形式和很方便地进行演绎,并且对计算工具和计算语言有很强的依赖性。缺点除了要大量的程序编写和数据处理外,令人头疼的是计算过程中误差的消除和对计算结果中所出现的假象及错误的识别和修正。

数值计算的误差分为舍入误差和截断误差。计算机中的数字是有限位的,如 FORTRAN77 所提供的双精度数可达 16 位有限数(一般的计算只保留 6~8 位有效数字),但对一些位数较多的数或对于像 $\sqrt{2}$ 、 π 这样一些无理数,只好舍去尾数才能送进机器。在计算机的运算过程中,每一次的运算都存在舍入问题,因此会出现舍入误差。在整个运算过程中,运算的舍入误差有时会因相互抵消而无损于计算结果,但有时也会因大量的积累造成严重误差。例如用不稳定的差分格式进行计算就会导致舍入误差的大量积累。截断误差是由于采取不同的计算方法和计算技术时所产生的。例如以差分代替微分,以直线代替曲线,以等刚度代替变刚度,以线性方程组代替非线性方程组,以离散边界值代替连续边界条件,以及用不准确的物理参数计算等。对于这两种误差进行详细的分析并选择适当的计算方法和技术予以控制,是数值方法的一项主要任务。

数值计算结果中所产生的假象和错误,其表现为是计算的部分结果或全部结果与客观真实不尽相符,甚至完全相反。分析其原因可能是由于物理问题的数学模型不合理,也可能是由于所采用的数值方法或计算机的硬件或软件有问题。对于一般工程问题,只要所建立的数学模型合理,则其解存在、

唯一且稳定。如果数学模型不合理,就不能得到符合实际的计算结果。但是,数学模型的合理,并不能说明对原问题的模拟就很好。因为,在建立某工程实际问题的数学模型时,通常会对原问题进行抽象和忽略掉一些次要因素,以使问题简化。如果太抽象或忽略的因素太多,使模型过分简单,虽然此时数学提法恰当,但所得到的解却和原问题相差太远甚至相反。有时也会由于在建模过程中忽略或忽视了一些表面看来微不足道而实际起关键作用的一些因素,导致最终的计算结果完全失败。1995年我国长城公司为美国休斯公司发射的“亚太2号”卫星在与火箭分离后发生爆炸,其原因就是因为美方结构工程师忽视了卫星整流器罩在高速高温下会发生大变形这一事实,用线性模型进行变形和强度计算,导致最后卫星爆炸。另外,电子计算机的硬件和软件都不能保证绝对无误,如机器受到各种干扰而发生元件损坏,软件程序功能不周,程序编制误差等,这些都会造成计算结果的错误和假象。一些明显的计算错误和假象是很容易识别的。但是,对于一些不明显的计算错误和假象,只能用若干个有分析解或有可靠数据的典型题目,以及用典型的实验数据来检验数值方法的可靠与否及精确程度,并由此识别数值计算中所可能出现的假象和错误。

对于计算结果所出现的假象和错误,可以设法从三个方面去避免。首先,在建立问题的数学物理模型时,对构成问题的各种因素应逐一详细分析,区别主次,恰当抽象,简化时既要顾及到容易求解,又要考虑到模型不失真。对于物性参数、边界条件及一些看起来次要的因素要特别小心。如有条件,可将所建立的数学物理模型和已有相近或类似的模型进行对照分析,避免有大的失误。已有的经验告诉人们,恰当合理的建模要比计算过程和最终结果的分析重要得多。其次,要选择一个适当的数值计算方法。恰当的数值方法,不仅会使得一些原来不可解的问题得以求解,而且可以节约大量的人力、物力和时间。最后,还要保证有一个性能可靠的计算工具和准确无误的运算程序。

1.2 数值方法的发展及应用

1.2.1 数值方法的发展

数值分析方法最初源于对数学解析方程的求解。如求解一阶微分方程初值问题的欧拉方法、龙格库塔方法;求解偏微分方程组的差分法、变分法、直线法、特征线法、加权残值法;求解积分方程的线性代数方程组逼近法、待定系数

逼近法、积分核逼近法；求解代数方程的秦九韶法、二分法、迭代法、牛顿法、弦截法、穆勒法、林士谔-赵访熊法、下降法，以及求解函数积分的梯形法、辛卜森法、龙贝法、高斯法、勒贝陶法、拉盖尔法和埃尔米特法等。这些数值方法的共同特点是采用不同的数学技巧，对原来已有的解析方程近似求解。在应用的过程中，仅考虑方法本身的简便性、收敛速度、收敛域的大小等特性，无需再去考虑待解方程解的存在性、唯一性和稳定性，因为这些事先已经解决。上述这些最早的数值方法，不仅完成了对部分原解析方程的近似求解，而且更重要的是形成了以后数值方法发展的基础。

数值方法发展的直接动力是物理及工程实际问题的需要。17世纪欧拉、拉格朗日和伯努利等针对当时所提出的最速降线问题、等周问题和短程线问题这三大著名难题建立了变分方法。所谓变分方法就是以变分形式所表述的物理定律。即在所有满足一定约束条件的可能物质运动中，真实的运动状态应使某物理量取极值或驻值^[1]。根据此方法后来相继建立了光学中的费马原理、理论力学中的哈密顿原理、弹性力学中的最小势能原理和最小余能原理。特别是证明了由于泛函变分的欧拉方程完全等价于原物理问题的微分方程，从而启示人们可以方便地从求泛函的极值或驻值出发去得到物理问题的近似值，而无需再去求解微分方程。19世纪上半叶所导出的流体力学纳维-斯托克斯方程描述了黏性流体随时间而变化的非定常运动。由于方程中包含时间变量和高阶导数，因而求解十分困难。除了在无旋条件下，低速流动的速度势满足拉普拉斯方程或泊松方程，可以用复变函数或保角映射求得解析解外，更多的复杂问题只能依靠数值方法近似求解，如有限差分法、迭代法、时间相关法、有限基本法，以及20世纪50年代发展起来的逐次超松弛法、交替方向隐式法、人工黏性法等。

固体线弹性静力学的基本方程包括平衡方程、几何方程和物理方程，是一组包含15个方程的非齐次三元二阶偏微分方程组。近200多年来，不少数学家和力学家为求解各种不同的定解，作出了不懈的努力，取得了一些不朽的成果。较为著名的有拉梅压力圆筒(环)问题；齐尔西孔口问题；符拉芒半无限平面受集中力问题；密切尔半无限平面受分布荷载问题；开尔文无限空间(平面)受集中力问题；布希涅斯克半无限空间表面受垂直集中力问题；赛如提半无限空间表面受水平集中力问题；明德林半无限空间内任一点承受集中荷载问题；圣维南固体扭转问题；赫芝接触问题；拉甫空间轴对称问题；伽辽金空间任意问题等。然而，这些解答仅仅描述了弹性力学问题少量的一些特定边值问题的解答，对于更一般解，还是无法获得。1908年瑞士科学家里兹根据英国科

学家瑞利 1877 年在《声学原理》一书中所提出的瑞利原理,建立了求解弹性力学空间问题的近似方法瑞利-里兹变分法。该方法假定弹性体的位移 u, v, w 由一组包含三组特定系数 $A_i, B_i, C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的已知函数组成,即

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n A_i u_i(x, y, z) \\ v(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n B_i v_i(x, y, z) \\ w(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n C_i w_i(x, y, z) \end{aligned} \right\} (1-3)$$

式中, $u_i(x, y, z), v_i(x, y, z), w_i(x, y, z)$ 是满足问题位移边界条件的某一组已知函数序列。

将式(1-3)中的 u, v, w 代入弹性体的总势能泛函 π 中,然后利用最小势能原理的驻值条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial A_i} &= 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial B_i} &= 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial C_i} &= 0 \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-4)$$

可得关于待定系数 $A_i, B_i, C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的 $3n$ 个线性代数方程。有了位移,利用几何方程便可求得应变分量,利用物理方程可求得应力分量。由于瑞利-里兹法仅要求位移函数满足位移边界条件,无需满足力的边界条件,因而求解比较容易。当然,对于应力计算误差较大,特别当包含自由边时。瑞利-里兹法是求解弹性力学空间问题最早也最为著名的近似数值方法,至今仍得到广泛应用。求解弹性静力学问题近似解的另一方法是 1947 年美国普拉格和辛格提出的超圆法。超圆法实质上是一种函数空间状态法,其特点是将泛函分析的解析概念形象化,用它能具体地给出问题精确解的上下界。此外,用于天体力学中计算星球进动的摄动法也是为满足物理实际问题的一个产物。此类例子举不胜举。

各种数值方法的相互影响以及计算技术和计算工具的不断进步,是推动现代数值方法发展的主要原因。关于前者较为突出的例子是在古典数学变分法的基础上先后建立了费马原理和最小势能原理,并由意大利学者贝蒂和卡斯提安诺在 1872~1879 年间建立的功的互等定理和弹性力学最小余能原理;

里兹 1908 年建立的瑞利-里兹直接解法;俄国工程师布勃诺夫和伽辽金 1915 年提出的布勃诺夫-伽辽金法,他们所导出的变分方程为

$$\left. \begin{aligned} \iiint \left[\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial x} + \Delta^2 u \right) + X \right] u_m dx dy dz &= 0 \\ \iiint \left[\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial y} + \Delta^2 v \right) + Y \right] v_m dx dy dz &= 0 \\ \iiint \left[\frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial z} + \Delta^2 w \right) + Z \right] w_m dx dy dz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

位移函数的形式与瑞利-里兹法相同,但除了要求其满足位移边界条件外,还必须满足应力边界条件,因而求解效果更好。另外,还有前苏联康托洛维奇于 1933 年提出的康托洛维奇变分法;英国科学家赫林格(1914)、瑞斯纳(1950)分别独立提出的二类变量广义变分原理以及由我国学者胡海昌(1954)和日本人鹭津久一郎(1955)提出的胡-鹭三变量广义变分原理等。直线法最初是用于求解偏微分方程,其要点是:先将求解区域用一族直线分割为若干条带,然后保留偏微分方程中沿直线方向的连续偏导数,其他方向的偏导数则用差商或内插公式代替,从而将偏微分方程求解问题转化为沿一族直线的常微分方程组的边值问题。1963 年前苏联捷列宁就用此方法求解了钝头体的绕流问题。1951 年前苏联的多罗德尼琴在原来直线法的基础上提出了积分关系法,用于求解空气动力学问题。1960 年他又将积分关系法改进为广义积分关系法,成功地求解了绕流的边界层问题。直线法在固体弹性力学中应用的结果产生了大家所熟知的有限条法^[3],并由此后来发展成了有限层法、有限棱柱法等。固体力学中的加权残值法,是 20 世纪 80 年代在我国发展起来的一种半解析半数值求解方法。最初它仅用于求解纯数学的微分方程,到 20 世纪 70 年代才用于求解流体力学和热传导问题。我国学者徐次达于 1978 年将此方法用于固体力学计算中^[4]。至今,这一方法除了原来的 5 种基本方法以及它们相互配套产生的混合法外,已经发展到和其他数值方法的联合应用,派生出了一批杂交加权残值法^[5],如能量配点法、康托洛维奇配点法、半解析法、格林加权残值法、变率加权残值法、数学规划加权残值法、随机加权残值法等。摄动方法原来用于计算星体间的进动问题,1947 年我国力学家钱伟长将这一方法用于求解圆板的几何非线性问题。他用板的中心挠度和厚度之比作为摄动参数,成功地求解了圆板的大挠度问题,被国际上称为“钱氏摄动法”。1953 年我国另一位力学家郭永怀在研究激波与边界层的相互作用时,又把摄动法用于求超声速流动的远场解和近场解的对接中,形成 PLK 奇异摄动法。20