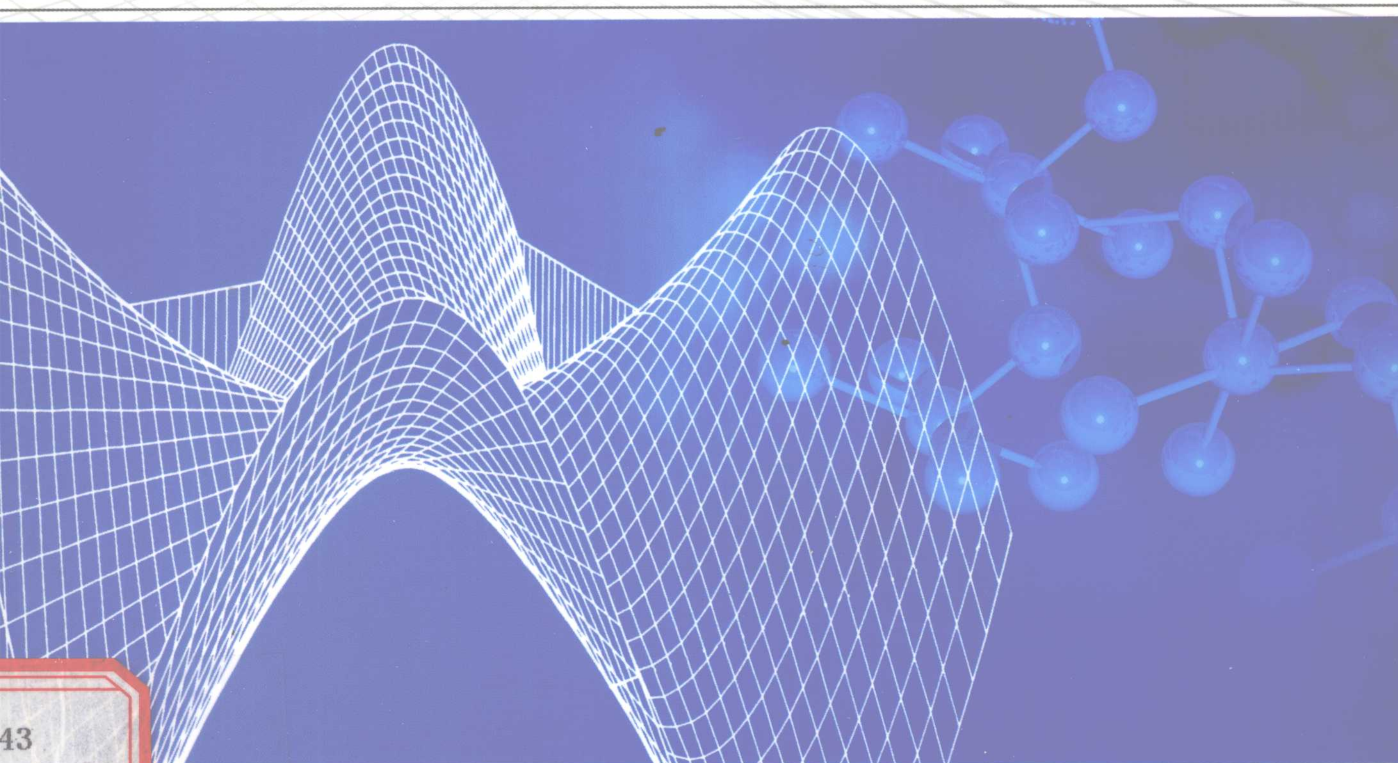
教育科学"十五"国家规划课题研究成果

医科高等数学

主编　张选群



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

医科高等数学

主　编　张选群

编　者　（以姓氏笔画为序）

马建忠（中国医科大学）

王　颖（吉林大学）

李　海（四川大学）

张选群（武汉大学）

何穗智（中山大学）

景荣荣（浙江大学）

高等教育出版社

内容提要

本书主要内容包括:一元函数微积分、多元函数微积分、微分方程基础、概率论基础、线性代数基础。全书大量运用新颖浅显的医学数学模型启发学生的抽象思维能力;在兼顾我国医学教育的现实条件下系统地、科学地向学生传授高等数学的基本理论与解决问题的基本技能,对医学各专业学生进行必要的理科素质教育。全书共90学时,适合高等学校医学专业教学使用。如果将书中的重积分、线性代数基础等部分仅作为学习参考内容而不在课堂上讲授的话,教学时数则为54~72学时。本书可供高等学校临床医学、基础医学、预防医学、口腔医学及药学专业的本科生及本硕连读生使用。

图书在版编目（CIP）数据

医科高等数学 / 张选群主编. —北京: 高等教育出版社, 2005.6

ISBN 7-04-016617-8

Ⅰ.医... Ⅱ.张... Ⅲ.医用数学: 高等数学-医学院校-教材 Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第038989号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 田 军　　封面设计 张 楠　　责任绘图 黄建英

版式设计 张 岚　　责任校对 俞声佳　　责任印制 孔 源

出版发行 高等教育出版社

社　　址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100011

总　　机 010-58581000

购书热线 010-58581118

免费咨询 800-810-0598

网　　址 http://www.hep.edu.cn

http://www.hep.com.cn

网上订购 http://www.landraco.com

http://www.landraco.com.cn

经　　销 北京蓝色畅想图书发行有限公司

印　　刷 北京市南方印刷厂

开　　本 850×1168 1/16

印　　张 17

字　　数 420 000

版　　次 2005年6月第1版

印　　次 2005年6月第1次印刷

定　　价 18.60元

物料号 16617-00

前 言

本书是自“教育部关于加强高等学校本科教学工作提高教学质量的若干意见”发布以来，经过全国范围内的问卷调查，组织各地区专家研究讨论，历时两年精心编写的一部供我国医学、药学类专业教学使用的“医科高等数学”统编教材。

本书的编写严格按照高等学校非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的医科数学教学基本要求，对医学、药学类专业学生强化理科素质教育，培养他们的抽象思维能力与计量分析技能，不仅能提高医学、药学类专业的科研分析与数据处理的水平，也会进一步推动我国医学教育体系的改革与完善。本书在内容上采用了许多新颖而浅显的医学数学模型，在医学与数学的交缘上、数学的基本理论在医学科研与临床实践的应用上都有较大的改进与突破。

我国的医学教育，其基础课程教学正处在一个两难的境地：一方面我国医学的发展要求提高学生数理化方面的基础素质；另一方面，繁重的医学专业教学使学校无法拓展医科数理化课程的教学时数。本书结合我国医学教育的特点，适当地将医科数学的教学时数定位在 90 学时，这既考虑到时代背景与医学教育现代化的需要，又与我国目前的医学教育状况相去不远，是推陈出新的结合点。书中一元函数微积分、多元函数微积分等内容约占 40 学时左右；讲授微分方程 8 ~ 12 学时；讲授概率论基础 24 学时；介绍线性代数基础可用 16 学时。各校在使用本教材时，还可根据自身情况灵活取舍。例如：将多元函数微积分中的重积分部分、线性代数的全部章节作为学生的学习参考内容而不在课堂上讲授，教学时数则可安排为 54 ~ 72 学时。

医科数学在讲授同样的数学概念、原理以及公式的推导过程中，会采用不同于理、工科数学的模式与方法，例如：在介绍极限理论、可积性、微分方程等内容时，简洁而不失严谨。本书实际上是结合我国医学教育的特点展现医科数学的系统性与科学性。

我们真诚地希望使用本教材的单位与师生加强与我们的合作与联系，帮助我们提高编写水平，共同为本书的后续内容——辅导教材、电子教案献策献力，一齐为建设医科高等数学精品课程而努力！

编　者

2005 年 4 月

目 录

第一章 函数、极限和连续

函数是事物间质与量相互联系、相互制约规律的数学抽象，也是表达变量间复杂关系的基本数学形式. 极限则动态地刻画了变量的运动和演进的变化趋势，是深入地研究函数的重要方法. 本章所介绍的函数、极限、连续等内容是一元函数的基础理论，是学习微积分的重要基础.

第一节 函　　数

一、函数的概念

事物的发展和变化，本质上是量的演变. 在所考虑的问题或过程中，一个量始终保持同一数值，例如圆周率 π，这样的量就称为**常量**(**constant**). 如果在研究范围内，一个量可以有不同的量值，这样的量就称为**变量**(**variable**). 儿童服药的剂量可能决定于儿童的体重，如果治疗时间较短，该儿童体重可视为常量；若此疗程长达数年，其体重就是一个变量. 因此，一般可以把常量看作特殊的变量.

例 1－1　设 d 是某药物的成人剂量，c 是该药物的未成年人剂量，a 是未成年人的年龄，则有下面两个计算公式：

Young's rule
$$c=\frac{ad}{a+12},$$

Cowling rule
$$c=\frac{(a+1)d}{24}.$$

两个公式分别适用于不同的场合. 对给定的药物和不同年龄的未成年人，d 是常量，a 和 c 是变量，并且 c 是随 a 的不同而取不同值的变量.

定义 1－1　设 x 和 y 是同一过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一允许的取值，按照一定的规律，变量 y 总有一个确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**(**function**). 变量 x 称为**自变量**(**independent variable**)，变量 y 称为**因变量**(**dependent variable**)，记为
$$y=f(x),\quad x\in D.$$
D 是自变量 x 的所有允许值的集合，称为函数的**定义域**(**domain**). 而因变量 y 的所有对应值的集合则称为函数的**值域**(**range**)，记为 R.

此定义中，变量 x 和 y 都可以不是数量，而是其他非数量的元素. 例如，在很多非处方药的使用说明中，只是把所有人简单地分为幼儿、少儿和成人几个年龄组，每个年龄组有一个固定的剂量. 因此，可以选择三个不同的字母或数字，比如用 1、2、3 来表示这三个年龄组. 此时，数字 1、2、3 并不是数量，它们只是三个年龄组的代名词而已. 本章基本上不涉及这类情形，总是假定函数的自变量和因变量都是数量，函数的定义域和值域都是数集.

例 1－2 临床处置中常常要考虑病人的身体表面积 A. 而体表面积一般不易测量，通过身高 H 和体重 W 来估计体表 A 的一个经验式（**DuBois formula**）如下：

$$A = cH^bW^a$$

其中 a、b、c 皆为正的常数. 为计算的简便计，文献中有取 $A=0.1H^{\frac{1}{4}}W^{\frac{3}{4}}$ 的. 在这里，作为自变量的元素 x 可以看作 $H-W$ 平面上某一区域内的点. 这样，这个函数实际上是一个有两个自变量（H，W）的二元函数. 多个自变量的函数将在第四章里讨论，这一章只讨论一个自变量的函数. 因此，如果只用体重 W 来估计体表 A，根据 Feldman 和 Clark 关于幼儿所收集到的实测数据可有经验式（**Clark formula**）：

$$A = 0.1026W^{0.688} \quad (A\text{ 的单位为 m}^2, W\text{ 的单位为 kg}).$$

一元函数的定义域通常用区间（或开或闭）来表示. 如果 $x_0 \in D$，函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义，与 x_0 对应的因变量值 y_0 称为函数值，记为 $y_0=f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$，即 $y_0=y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$. 这几种记号常被交替使用.

在函数定义中，变量间的对应关系用符号 f 表示. 同时，f 还可以表示因变量 y 或者因变量的一个特定值. 在科学文献里，通过上下文可以了解作者的具体含义. 两个函数相等的充分必要条件是：两个函数的定义域相同且变量对应法则相同. 此时，两个函数的值域也必然是相同的. 在实际问题里，函数的定义域由该问题的实际意义确定.

函数的表达方式通常有公式法、图像法和表格法，甚至可以用一段文字来表述.

例 1－3 2003 年中国非典型肺炎（SARS）流行时，感染人数随时间而变化的规律通过实际观测的数据表示，我们用最引人关注的时间段里公布的全国疫情报告中的 8 组数据来反映新增病例数 N 与时间 t 的关系，见表 1－1.

表 1－1 2003 年全国 SARS 流行高峰期新增病例报告

报告日期（月・日）	4・28	5・1	5・4	5・7	5・9	5・12	5・15	5・17
标示时间（t_i）	1	4	7	10	12	15	18	20
新增例数（N_i）	203	187	163	159	118	75	52	28

如果将表 1－1 中的数据（t_i，N_i）以散点的形式标记在 $t-N$ 坐标平面上，然后用光滑的曲线连接这些点，则此曲线 $N=N(t)$ 也表示这个时间段全国新增病例数 N 与时间 t 的关系，见图 1－1. 当然，还可以用解析式来表示 $N=N(t)$. 由于影响新增病例数 N 的因素很多，绝非一个时间自变量 t 所能完全确定的，故 $N=N(t)$ 这类解析式只能近似地模拟全国新增病例数 N 与时间 t 的关系. 例如用下式

$$N(t) = \alpha + \beta t^{\gamma}$$

来拟合这一函数关系，式中 α、β、γ 均为常数，并在流行病学研究中具有参数意义. 当 $\alpha=205$，$\beta=-2.11$，$\gamma=1.48$ 时，上述模型对这一时间段新增病例数 N 与时间 t 的关系拟合精度相当高，即模型的计算值与实际观测值误差相当小.

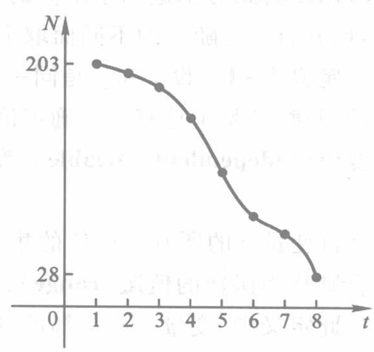


图 1－1

我们通过例 1－3，将函数的三种表示方法都一一演示了，这三种表达方式各有特点，且可相

互转化.

一些函数对其定义域内的不同值,不能用一个统一的解析式表示,而是需要两个或多个不同的解析表达式,这类函数就称为**分段函数**(**piecewise function**).历史上最著名的 **Dirichlet** 函数就是一个分段函数:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数};\\ 1, & x\text{ 是有理数}.\end{cases}$$

例 1-4 未成年人服药剂量的 Cowling 公式为 $c=\dfrac{(a+1)d}{24}$. 根据此公式,到多大年龄时,该剂量达到成人剂量?显然,令 $c=d$ 可解出 $a=23$. 故 Cowling 公式实际为

$$f(a)=\begin{cases}\dfrac{(a+1)d}{24}, & a<23;\\ d, & 23\leqslant a.\end{cases}$$

这是一个分段函数,见图 1-2.

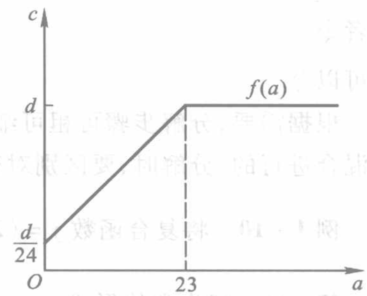


图 1-2

例 1-5 设 $f(x)$ 定义为:当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=|x|/x$, $x=0$ 时 $f(x)=0$. 则

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

二、复合函数

例 1-6 设一种阔叶乔木成材后的侧枝数目 B 是此树高度 h 的函数:$B(h)=4h-8$,其中 h 以英尺*为单位. 而平均每一树枝上的树叶数量 L 又是树枝数目 B 的函数:$L=B^2-B$. 由此可知,平均一棵乔木的树叶数总量 s 即是 B 的函数,通过 B 也是此树高度 h 的函数,即

$$s=BL=B(B^2-B)=16(4h^3-25h^2+52h-36).$$

定义 1-2 设在定义域 U 上变量 y 是变量 u 的函数:$y=f(u)$. 在定义域 D 上变量 u 是变量 x 的函数:$u=\varphi(x)$. 如果对变量 x 的某些值,变量 u 的对应值恰在 U 中因而能够确定变量 y 的值,则称 y 是 x 的**复合函数**(**compound function**),记为

$$y=f[\varphi(x)].$$

变量 u 称为复合函数的中间变量. 复合函数的概念可以推广到多个函数的情形,此时复合函数是通过多个中间变量的传递而构成的.

例 1-7 设 $y=\sqrt{u}$, $u=\arctan v$, $v=\lg(x-1)$,求 y 关于 x 的复合函数.

解:这里,变量传递顺序是规定好了的,u 是 y 的中间变量,v 是 u 的中间变量,故依次代入可得 $y=\sqrt{\arctan \lg(x-1)}$,其定义域为 $x\in[2,+\infty)$.

例 1-8 设 $f(x)=x^2$、$g(x)=\sin x$,试求 $f[g(x)]$、$f[f(x)]$、$g[f(x)]$、$g[g(x)]$.

解:$f[g(x)]=\sin^2 x$, $f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$, $g[f(x)]=\sin x^2$, $g[g(x)]=\sin(\sin x)$.

* 1 英尺 = 0.304 8 米

可见,复合顺序是关键.若经过变量代入后,复合函数的定义域为空集,则此复合函数无意义,或说它们不能复合.例如,$y=\arcsin u$, $u=1+\sqrt{1+x^2}$,则 $y=\arcsin(1+\sqrt{1+x^2})$.因 $1+\sqrt{1+x^2}>1$, $y=\arcsin(1+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域为空集,故此复合函数无意义.但是,若 $y=1+\sqrt{1+u^2}$, $u=\arcsin x$,则复合函数 $y=1+\sqrt{1+(\arcsin x)^2}$ 有意义.

例 1-9 试把复合函数 $y=\sqrt{\arctan \lg(x-1)}$ 分解为简单函数.

解:令 $y=\sqrt{u}$, $u=\arctan \lg(x-1)$;

或者令 $y=\sqrt{\arctan u}$, $u=\lg(x-1)$;

也可以令 $y=\sqrt{u}$, $u=\arctan v$, $v=\lg(x-1)$.

根据需要,分解步骤可粗可细,但顺序是不能任意改变的.函数的复合运算与四则运算可能是混合进行的,分解时,要区别对待.

例 1-10 将复合函数 $y=(2x+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt{\arctan x^2+\dfrac{\sin(x-3)}{x-3}}$ 分解为简单函数.

解:先分解为和的形式 $y=u^{\frac{2}{3}}+\sqrt{v}$, $u=(2x+1)$;v 再分解为两项(其中一项还是商的形式)之和,即 $v=\arctan w+\dfrac{r}{s}$.这里:$w=x^2$, $r=\sin(x-3)$, $s=x-3$.当然,$r=\sin(x-3)$ 仍是复合函数,如果需要还可进一步分解.

复合函数的分解运算还有两种较抽象的形式,即:已知 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi(x)$ 求 $f(x)$ 或者已知 $f[\varphi(x)]$ 和 $f(x)$ 求 $\varphi(x)$.求解这类问题可能要进行一些代数变换运算.

例 1-11 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4x-\sqrt{1+x^2}$, $x\neq0$.求 $f(x)$ 的表达式.

解:令 $u=\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $x=\dfrac{1}{u}$,代入 $f[\varphi(x)]$ 有 $f(u)=\dfrac{4}{u}-\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}$.由此可知

$$f(x)=\frac{4}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\quad(x\neq0).$$

例 1-12 已知 $f(x)=\lg(1+x)$ 且 $f[\varphi(x)]=x$,求中间变量 $\varphi(x)$.

解:把 $\varphi(x)$ 代入 $f(x)$,则得 $f[\varphi(x)]=\lg[1+\varphi(x)]=x$,所以 $1+\varphi(x)=10^x$.于是可得:

$$\varphi(x)=10^x-1.$$

在中学阶段研究得比较深入的基本初等函数有以下六类:

(1) 常数函数 $y=c$(c 是常数);

(2) 幂函数 $y=x^a$(a 为任意实数);

(3) 指数函数 $y=a^x$($a>0$, $a\neq1$);

(4) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0$, $a\neq1$);

(5) 三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$;

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$ 等.

由**基本初等函数**(**basic elementary function**)经过有限次四则运算和函数复合运算所得到的仅用一个解析式表达的函数,称为**初等函数**(**elementary function**).按照这个定义,分段函数不是初等函数,但在不同段内的表达式,通常由初等函数表示.

三、函数的几种简单性质

1. 函数的有界性

设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义.若存在正数 M,对于所有的 $x\in(a,b)$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**有界(bounded)**.如果不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**无界(unbounded)**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 内无界,在 $[1,+\infty)$ 上有界.

2. 函数的单调性

对区间 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,如果总有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递增的;当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递减的.单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数(monotone function)**.单调递增函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐上升的曲线;单调递减函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐下降的曲线.

$y=2^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增;$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减,在 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

3. 函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 对其定义域内的每一个 x,都有 $f(-x)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数(even function)**;如果函数 $y=f(x)$ 对其定义域内的每一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数(odd function)**.奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

偶次幂的幂函数,包括常数函数,都是偶函数;奇次幂的幂函数则是奇函数.x^3 是奇函数,$\sin x$ 也是奇函数,其乘积 $y=x^3\sin x$ 是偶函数.而函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0;\\ x+1, & x>0.\end{cases}\quad 和 \quad g(x)=\begin{cases}1-x, & x<0;\\ x+1, & x>0.\end{cases}$$

则分别是奇函数(图 1-3)和偶函数(图 1-4).

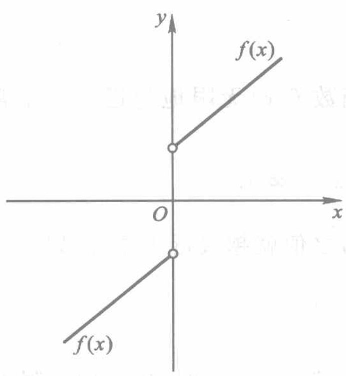


图 1-3

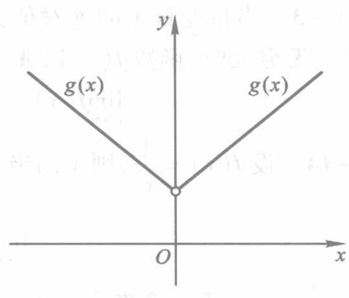


图 1-4

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$,若存在一个正的常数 T,使得在定义域内恒成立 $f(x)=f(x+T)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数(periodic function)**;正数 T 称为这个函数的周期.满足此关系的最小正数称为这个函数的最小正周期.注意,不是所有周期函数都有最小正周期.三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 以 2π 为周

期. 许多生物节律近似地以 12 小时或 24 小时为周期. 心电图曲线也可以看作周期函数.

例 1-13 对于任意一个实数 x,取不超过 x 的最大整数值,称为对 x 取整,记作$[x]$. 例如:$[0.36]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[-\pi]=-4$ 等等. 函数 $y=[x]$称为取整函数. 而函数 $y=x-[x]$定义在$(-\infty,+\infty)$内,是 x 的非负小数部分,这个函数以$[0,1)$为值域,以 $T=1$ 为周期.

思考与讨论

1. 常数 1 与函数 $y=1$ 有何区别与联系?常量函数 $y=c$ 的图像是否为坐标平面上确定的一个点或一条水平直线?函数的图像可否为一条闭曲线?
2. 两个函数相等的条件是什么?若两个函数是相同的,是否必有相同的解析表达式?
3. 是否任意两个函数 $u=f(x)$和 $v=h(x)$,都能构成复合函数?
4. 是否每一个函数都具备函数的四个特性(单调性、有界性、对称性和周期性)?

第二节 极 限

设 $y=f(x)$. 按定义,自变量 x 在其定义域内取定一个值时,因变量 y 也取定一个值与之对应,这是两个变量间的静态关系. 另一方面,当自变量 x 从一个值变化到另一个值时,自变量 x 经历一个不断变化的过程. 在此过程中,因变量 y 相应的变化趋势和终极状态如何,反映了两个变量间的动态关联,而这正是**极限(limit)**概念所要描述和解决的问题.

一、极限的概念

对于函数 $y=f(x)$,自变量 x 的变动方式有两种:一种是自变量 x 的绝对值无限制地增大(记为 $x\to\infty$);另一种是自变量 x 的值无限地趋近于某一定值 x_0(记为 $x\to x_0$,或 $|x-x_0|\to 0$). 换一种叙述方式,一个变量 x 无限趋近于一个定值 x_0,无非是说,两者之差 $|x-x_0|$ 迟早可以小于任何一个无论多么小但预先固定了的正数.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 1-3 当自变量 x 的绝对值无限地增大时,若函数 $f(x)$无限地趋近于一个常数 A,则称:当 x 趋于无穷大时,函数 $f(x)$以 A 为极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

例 1-14 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$,则 x 的绝对值越大,函数 $f(x)$之值就越接近于零. 所以

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

如果当 $|x|\to\infty$ 时,函数 $f(x)$不趋近于任何一个常数,则称 $x\to\infty$ 时,$f(x)$的极限不存在. 例如,函数 $y=\sin x$ 和 $y=x^2$ 当 $x\to\infty$ 时,极限都不存在. 对于 $y=\sin x$,在 $x\to\infty$ 的过程中,函数值始终在 -1 和 $+1$ 间来回波动,并不趋于任何定值. 而在 $x\to\infty$ 的过程中,函数 $y=x^2$ 之值是无限增加的,不会永远处于任何定值的附近. 不过,“函数值趋于无穷大”是一种可以预期其发展态势的过程,故在形式上还是可以记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x^2=\infty.$$

例 1－15　设 $f(x)=\arctan x$. 则：$x\to-\infty$ 时 $f(x)\to-\dfrac{\pi}{2}$，$x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\dfrac{\pi}{2}$，故

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\quad 且\quad \lim_{x\to+\infty}\arctan x=+\frac{\pi}{2}.$$

类似地可记

$$\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty\quad 和\quad \lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty.$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 1－4（极限的描述性定义）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义（但在点 x_0 处却可以没有定义），当自变量 x 以任意方式无限地趋近于定点 x_0 时，若函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个常数 A，则称：当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad 或者\quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

例 1－16　设 $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$，$x\neq3$. 欲判断 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ 存在与否，则先在定点 $x_0=3$ 附近进行一些计算，结果列于表 1－2. 由此可以看出，$x\to3$ 时 $f(x)\to5$，$\lim\limits_{x\to3}f(x)$ 存在且等于 5，即

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5.$$

表 1－2　当 $x\to3$ 时 $f(x)$ 的变化趋势

自变量 x	分子 x^2-x-6	分母 $x-3$	分式 $\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$
3.100 000 000 0	0.510 000 000 0	0.100 000 000 0	5.100 000 000 0
3.010 000 000 0	0.050 100 000 0	0.010 000 000 0	5.010 000 000 0
3.001 000 000 0	0.005 001 000 0	0.001 000 000 0	5.001 000 000 0
3.000 100 000 0	0.000 500 010 0	0.000 100 000 0	5.000 100 000 0
3.000 010 000 0	0.000 050 001 0	0.000 010 000 0	5.000 010 000 0
2.000 000 000	−4.000 000 000	−1.000 000 000	4.000 000 000
2.900 000 000	−0.490 000 000	−0.100 000 000	4.900 000 000
2.990 000 000	−0.049 900 000	−0.010 000 000	4.990 000 000
2.999 000 000	−0.004 999 000	−0.001 000 000	4.999 000 000
2.999 900 000	−0.000 499 990	−0.000 100 000	4.999 900 000
2.999 990 000	−0.000 049 999	−0.000 010 000	4.999 990 000

定义 1－5（极限的分析性定义）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义（但在点 x_0 处可以没有定义），如果对于预先任意给定的无论多么小的正数 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 $\delta>0$，对满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，函数 $f(x)$ 的对应值都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称：当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或者 } f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

例 1－17 设 $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}, x\neq 3$. 试证明：$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

证：对应于定义 1－5，这里有：$x_0=3$ 和 $A=5$. 函数 $f(x)$ 在点 $x_0=3$ 处无定义，但在附近是有定义的. 设 $\varepsilon>0$ 是任意取定的充分小的正数，不妨取 $0<\delta<\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|=|x-3|<\delta$ 时，

$$|f(x)-A| = \left|\frac{x^2-x-6}{x-3}-5\right| = \left|\frac{(x-3)^2}{x-3}\right| = |x-3| < \delta < \varepsilon.$$

所以
$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3} = 5.$$

极限的描述性定义和解析性定义是完全等价的. 根据教育部非数学专业数学教学指导委员会制定的医科数学教学大纲，本章（书）采用描述性定义，并满足大纲规定的基本要求.

如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 不趋近于任何一个常数，则称 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在. 例如，函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 的过程中，函数值在 -1 和 $+1$ 间无限次地波动，并不趋于任何定值，故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在. 在 $x\to 0$ 的过程中，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 之绝对值是无限增加的，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ 也不存在. 但形式上还是记为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$. 如果更细致地分析则可以看到，若自变量 x 从大于零的地方趋近于零，$y=\dfrac{1}{x}$ 将趋于正无穷大；若自变量 x 从小于零的地方趋近于零，$y=\dfrac{1}{x}$ 将以负无穷大为其极限. 故有

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty \quad \text{和} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty.$$

符号 $x\to x_0^-$ 表示自变量 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0；$x\to x_0^+$ 表示自变量 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0. 如果在这样的极限过程中，函数的极限存在，就称为**单侧极限（左极限或右极限）**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = A \quad \text{或者} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = A.$$

故当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的**极限存在的充分必要条件是函数在 x_0 处的左、右极限皆存在且相等.** 若至少有一个单侧极限不存在或两个单侧极限不相等，则在此处函数的极限不存在.

例 1－18 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0; \\ x+1, & x>0.\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0; \\ x+1, & x>0.\end{cases}$ 判断当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限是否存在.

解：若 x 从大于零的方向趋近于零，则函数 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=x+1$；反之，$f(x)=x-1$.

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x-1 = -1 \quad \text{且} \quad f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x+1 = 1.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在. 然而，对于函数 $g(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0; \\ x+1, & x>0.\end{cases}$ 由

$$g(0^-) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1-\lim_{x\to 0} x = 1 \quad \text{且} \quad g(0^+) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0} x+1 = 1.$$

知 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 存在且等于 1. 实际上，$g(x)=|f(x)|$.

例 1－19　判断函数 $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ 当 $x\to 0$ 时的极限存在与否.

解：因为 $x\to 0$ 包括 $x\to 0^-$ 和 $x\to 0^+$ 两种方式，故应分别计算 $x\to 0$ 时的左、右极限.

当 $x\to 0^-$ 时，$\frac{1}{x}\to -\infty$，则 $2^{\frac{1}{x}}\to 0$；当 $x\to 0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to +\infty$，则 $2^{\frac{1}{x}}\to +\infty$. 由此知：$x\to 0$ 时，$f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ 的极限不存在.

3. 数列的极限

若函数 $f(n)$ 的定义域是正整数集，当 n 从小到大取值，全体对应函数值的排列

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$$

称为**数列（sequence of numbers）**. 通常用 a_n 表示 $f(n)$，且称 a_n 为数列的第 n 项，亦称**通项（general term）**，并用 $\{a_n\}$ 记此数列.

例 1－20　假设一对成年兔子一生中有两个生育周期，每个生育周期里可生出一对小兔子. 新出生的小兔生长一个生育周期后，也开始每个生育周期生一对小兔子，并且也是生育两个周期后死亡，如此繁殖下去. 如果以 $f(n)$ 表示此兔群的数量（以对为计数单位），则有 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f(2)=3$，$f(3)=5$，$f(4)=8$，$\cdots$，通项间有关系 $f(n+1)=f(n)+f(n-1)$. 这个数列以意大利数学家 **Fibonacci** 的名字而著名.

当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的极限可类比函数 $f(x)$ 当自变量 $x\to+\infty$ 时的情形. 由此，对数列 $\{a_n\}$，当 $n\to\infty$ 时，若 a_n 无限地趋近于一个常数 A，则称：n 趋于无穷大时，$\{a_n\}$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$. 否则，称 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

例 1－21　判断 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$、$b_n=\frac{n}{n+1}$、$c_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ 的极限是否存在.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$，　$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

由于 $\{c_n\}=\{0,1,0,1,\cdots\}$，可知 c_n 的极限不存在. 至于前述 Fibonacci 数列，容易看出 $f(n)$ 是趋于无穷大的.

4. 极限存在性判别准则

准则 1（夹逼准则）　若在同一极限过程中，三个函数 $f_1(x)$、$f(x)$、$f_2(x)$ 之间有关系

$$f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x),$$

且 $\lim f_1(x)=A=\lim f_2(x)$，则 $\lim f(x)=A$.

例 1－22　用夹逼准则求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin^2 x^2}{x^2}$.

解：由 $0\xleftarrow{x\to\infty}\frac{1}{x}<\frac{x+\sin^2 x^2}{x^2}<\frac{x+x}{x^2}=\frac{2}{x}\xrightarrow{x\to\infty}0$ 知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin^2 x^2}{x^2}=0$.

准则 2（单调有界准则）　单调有界数列一定有极限.

即对 $\{a_n\}$，若有 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots a_n\geqslant\cdots$（递减）或 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots a_n\leqslant\cdots$（递增），且对一切 n 都有 $|a_n|\leqslant M$（有界），则 $\{a_n\}$ 的极限必存在.

对函数极限，准则 2 也是有效的. 例如，$|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 且当 $x\to\pm\infty$ 时，$\arctan x$ 是单调的. 所以 $x\to\pm\infty$ 时，$\arctan x$ 的极限存在，$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\frac{\pi}{2}$.

二、无穷小量及其性质

1. 无穷小量和无穷大量

定义 1－6 如果 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时 $f(x)$ 为**无穷小量（infinitesimal）**，简称为无穷小.

定义 1－7 如果 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x) \to \infty$，则称 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时 $f(x)$ 为**无穷大量（infinity）**，简称为无穷大.

无论是无穷大量还是无穷小量，并非直接等于无穷大或零. 相反地，无穷大量和无穷小量都是变量，都是与自变量 x 特定的极限过程联系的. 例如，$\frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时是无穷小，当 $x \to 0$ 时是无穷大；而当 $x \to 1$ 时，$\frac{1}{x} \to 1$，$\frac{1}{x}$ 既非无穷大亦非无穷小. 此外，任何很小的常数（零除外）或任何很大的常数，都不是无穷小量或无穷大量. 常数的极限总是等于自己，故**零是惟一的可作为无穷小的常数.**

2. 无穷小定理及其性质

本节讨论的极限性质和运算法则对 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 都是成立的，所以对于同一极限过程，极限记号“lim”的下面不标明 x 的变化过程. 对于自变量 x 的同一极限过程，当函数 $f(x)$ 为无穷大时，$\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若函数 $f(x)$ 为无穷小且 $f(x) \neq 0$ 时，$\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

定理 1－1 $\lim f(x) = A \Leftrightarrow \lim\,[f(x) - A] = 0$.

即：函数 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件为：$f(x) - A$ 是无穷小. 因此，可把 $\lim f(x) = A$ 表示为

$$f(x) = A + \alpha \quad [\text{其中} \lim \alpha(x) = 0].$$

例 1－23 已知 $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$，验证 $f(x) = 5 + \alpha$，且 $\lim\limits_{x\to 3}\alpha = 0$.

解： 极限过程为 $x \to 3$，$A = 5$. 如果取 $\alpha(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$，易见 $\lim\limits_{x\to 3}\alpha(x) = 0$. 则

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5 + \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = A + \alpha(x).$$

性质 1 有限多个无穷小的代数和或乘积还是无穷小.

即：若 $\lim \alpha_i = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$，则，$\lim \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$，$\lim \prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

性质 2 有界变量或常数与无穷小的乘积是无穷小.

即：若 $|f(x)| \leq M$、$\lim \alpha(x) = 0$，则 $\lim \alpha(x) f(x) = 0$.

例 1－24 说明当 $x \to 1$ 时，$\frac{x+1}{x} \to 2$.

解： 因 $\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2 = \frac{1-x}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \to 0$（当 $x \to 1$ 时），由定理 1－1 有 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x} = 2$.

例 1－25 欲求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$，先得 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$，由无穷大与无穷小的关系，$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \infty$.