

JIEGOU GONGCHENG ZHONG DE ZHENDONG LILUN JIQI YINGYONG

结构工程中的 振动理论及其应用

武秀丽 著

中国铁道出版社

号 620 宅登藏(京)

介 简 容 内

结构工程中的振动理论及其应用

本书共分五章,主要介绍结构工程中的振动理论及其应用。第一章介绍结构工程中的振动理论,第二章介绍结构工程中的振动实验,第三章介绍结构工程中的振动计算,第四章介绍结构工程中的振动控制,第五章介绍结构工程中的振动监测。本书可作为高等院校土木工程专业的教材,也可供从事结构工程工作的工程技术人员参考。

武秀丽 著

江苏工业学院图书馆
藏书章

★京其区分館蔵書中爲工機結

第 一 册 第 九 卷

中国铁道出版社

2002年·北京

2250
106W

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书对弹性体的振动进行了较为广泛而深入的研究,对弹性支承的各种边界条件的梁、板、壳的动力响应,空心板材的固有频率进行了求解,得到了许多实际工程很有价值的结论,并结合工程实际的需要,计算了相当数量的算例。其内容与工程应用联系比较密切,其结论可为在航空、航天、仪表元件、土木建筑和海洋工程等领域所采用的梁、板、壳类的结构设计提供一定的理论基础。当然,不论当前的研究进展如何,再加上弹性体的振动问题本身就是很复杂的问题,尚有许多工作有待于继续研究。本书适合作为力学专业本科生、研究生教材,也可供力学、土木工程及相关专业科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构工程中的振动理论及其应用/武秀丽著. - 北京:
中国铁道出版社,2002.5
ISBN 7-113-04645-2

I. 结… II. 武… III. 弹性体—动 IV. 0326

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 026342 号

书 名:结构工程中的振动理论及其应用

作 者:武秀丽 著

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑:李小军

编辑部电话:市电(010)63583214 路电(021)73133

封面设计:冯龙彬

印 刷:中国铁道出版社印刷厂

开 本:880×1230 1/32 印张:4.25 字数:123 千

版 本:2002年5月第1版 2002年5月第1次印刷

印 数:1~1 000 册

书 号:ISBN 7-113-04645-2/TU·699

定 价:20.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

发行部电话:市电(010)63545969 路电(021)73169

作者的话

为便于工程实际中直接应用,本书对弹性体(梁、板、壳)的振动问题进行了以下研究:

1. 利用传递矩阵法,对于多点弹簧支持的连续等跨梁的横向自由振动问题进行了求解,得到了固有频率与固有振型;利用模态迭加法求得了上述梁在运动荷载作用下的动态响应。

2. 针对数学上难度较大的固支矩形板,提出了一种行之有效的迭加法,并利用该迭加法对固支矩形板(弹性地基上)的横向自由振动问题进行了求解,得到了三角级数形式的解,并且仍采用模态迭加法,对三种动荷载作用时上述矩形板的动态响应进行了求解。

3. 在球壳的振动研究方面做了较多的工作。分别针对无矩球壳和有矩球壳进行了研究,利用 Laplace 变换法,得到了单层完整球壳、多层完整球壳以及弹性地基上球壳在径向及切向动载作用下的动态响应;并提出了在径向、切向荷载作用下由单层完整球壳的动态响应直接求解多层球壳动态响应的比拟法,提出了组合材料常数的概念。在对弹性支持(弹性地基)球壳的动态响应与多层完整球壳的动态响应进行了比较以后,也得出了工程中有意义的结论,并对大量算例进行了计算。

4. 针对无限大弹性体中含球壳的动态响应问题做了大量的理论推导及实际计算。

5. 用扩展 Dirac 函数表示空心板材在刚度以及质量密度上由于空洞而引起的非连续变化,从而变不连续函数的求解问题为连续函数的求解问题,继而用 Galerkin 法对其固有频率进行了求解,得到了适应于任意大小、任意分布空洞的空心板材的固有频率计算公式。

本书是作者近年的研究成果,其中有的项目得到铁道部的资助,在此表示感谢。本书及其研究成果能够对土木工程科研人员的研究工作给予帮助是作者的最大愿望。

书中错误在所难免,欢迎读者批评指正。

武秀丽

2002.6

第 1 章 绪 论	1
1 概述	1
2 研究现状及主要内容	1
3 发展和应用	4
第 2 章 弹簧支持连续等跨梁的横向振动	5
1 引 言	5
2 弹簧支持连续等跨梁的横向自由振动	5
3 弹簧支持连续等跨梁的动态响应	16
4 结论与讨论	26
第 3 章 对称载荷作用下弹性地基上矩形薄板的横向弯曲振动	27
1 引 言	27
2 本文中所采用迭加法的基本思路	27
3 弹性地基上矩形薄板的横向自由振动	28
4 弹性地基上矩形薄板的强迫振动	37
5 讨 论	44
第 4 章 球壳的无矩振动	45
1 引 言	45
2 单层完整球壳的动态响应	45
3 双层完整球壳的动态响应	52
4 多层完整球壳的动态响应	56
5 弹性支持单层球壳的动态响应	57
6 结论与算例	62
第 5 章 轴对称载荷下球壳的振动	70
1 引 言	70
2 单层完整球壳的动态响应	70
3 双层完整球壳的动态响应	75

4 多层完整球壳的动态响应·····	79
5 弹性支持单层球壳的动态响应·····	81
6 结论与算例·····	85
第 6 章 无限大弹性体内含球壳的动态响应·····	89
1 引 言·····	89
2 无限大弹性体含球形空腔·····	89
3 无限大弹性体含无力矩球壳·····	93
4 无限大弹性体含有力矩球壳·····	102
5 结论与算例·····	106
第 7 章 空心板材固有频率的求解及板材的优化设计·····	109
1 引 言·····	109
2 理论分析·····	110
3 计算结果与结论·····	112
4 优化设计·····	113
5 结论与讨论·····	115
结 束 语·····	116
附 录·····	119
附录一 弹性地基上矩形板的横向弯曲挠度·····	119
附录二 诸 R 与诸 A 间对等关系的证明·····	121
附录三 关于代数方程 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的根·····	122
附录四 $s_1, s_2, s_3 < 0$ 的证明·····	123
附录五 $s_1, \sigma_1 < 0$ 的证明·····	124
参考文献·····	125

第1章 绪论

1 概 述

振动现象极其普遍地存在于各项工程及日常生活中。人们所熟知的地震而引起的建筑物的破坏,地下管道受路面载荷(如运动着的汽车、火车)作用的影响等,都是振动现象的具体实例,可以说,振动是无处不在的。当然,有时人们可以利用振动作一些有用的事情,但振动对人类的危害也是比较多的,如对运输行业来说,汽车、火车等是人们必需的交通工具,它们必须经常通过一些人流稠密区、建筑物林立区和风景区,其周围就有可能是居民楼、精密仪器室等对振动比较敏感的地区,而其运行引起的振动导致建筑物的破坏会比静力荷载时大许多倍,许多精密仪器为了防振也不得不做一些减振措施,振动对人们的生活和工作都带来了比较大的危害,由此所引起的投诉事件经常发生。正是由于振动的普遍性和危害性,引起了人们的极大关注,许多专家学者们都在进行有关振动和防振、减振方面的研究。

现代工业的发展,如航空、航天、仪表元件、土木建筑和海洋工程等领域广泛采用梁、板、壳这类弹性构件,使得对于这类弹性体构件的振动分析始终受到广大工程研究人员的重视,经过一代又一代力学工作者的努力工作以及不断探索,弹性体的振动问题已逐渐发展成为力学学科中一个比较重要的分支。

2 研究现状及主要内容

关于弹性体振动研究的历史可以追溯到18世纪,早在1735年就由Daniel Bernouli提出并推导了弯曲梁的横向振动方程。并由Euler在1744年求得了简支、固支和自由情况下的解。两个多世纪以来,由于在工程界,特别是高科技领域以及人们日常生活密切相关的工程(如房屋建筑中就要考虑风载、地震等动载荷的影响)中,由振动而引起的结构物的破坏引起了人们极大的关注,许多专家学者进行这方面的研究,研究成果

不断出现。对于数学上难以解决的困难,人们则致力于去寻找比较精确的近似解,许多数学处理方法如有限元法、边界元法等数值方法的出现和发展,借助于电子计算机的高速度和大空间,使得研究工作取得了突飞猛进的发展,在弹性体的振动分析方面硕果累累。

从现有的资料来看,关于弹性体结构振动问题已经进行了大量的探讨与研究。关于弹性体结构物在弹性支持或弹性地基上的振动问题也有一定的研究,但一般所涉及的均是较基本的问题,如:固有频率的问题等等。而对某些工程实际中经常会遇到的动力响应问题,如列车通过轨道时所对应的弹性支持或弹性地基上的梁在匀速移动载荷作用下的振动问题;飞机跑道可简化模型为弹性地基上的板,而飞机着陆就相当于受冲击载荷作用下的弹性地基上的薄板的动态响应问题等,则较少被研究过。

梁在弹性地基(或弹性支持)上的振动问题,S. Timoshenko[3]曾就其自由振动情况进行了研究,并得出了结论:弹性支持的存在影响梁的固有频率和固有振型,而弹性地基的存在却只影响其固有频率。[4]对承受集中载荷、同时承受集中载荷及均布载荷的弹性地基梁的动态响应进行了分析,利用 Galerkin 法推导出了梁的强迫振动的非线性控制方程。[5]、[6]也都对弹性地基梁的动态响应问题进行了讨论。从以上的文献可以看出:在梁的研究方面,均是对 Winkler 弹性地基梁进行振动分析,在实际工程中还会遇到弹性支持的情况。针对这些问题,本书在第二章对于多点弹簧支持的梁的自由振动与强迫振动分别进行了求解,得到了这些情况下的固有频率、固有振型以及动态挠度。

关于薄板的振动研究,文献很多。最初是公路路面板内的应力分析引起人们对于弹性地基板的振动问题的重视,以后逐渐扩展到各个领域,如:高速公路和机场跑道的混凝土路面、建筑物的地基,水工结构以及地下结构的计算等都与弹性地基板的解有关。[3]对于简支矩形板的自由振动进行了分析。[8]对于四边简支矩形板、一对边简支,另一对边固支的矩形板以及相邻两边固支,另外相邻两边简支的矩形板的振动问题给出了以三角级数形式表示的解,并且比较详细地介绍了求解薄板振动问题的各种数值解法,且用数值解法具体实现了对四边固支矩形板振动问题的求解。[9]对简支、固支、自由边界可能组合出现的 21 种边界条件下矩形板的自由振动进行了分析。对于一对边简支所出现的 6 种情况给出

了精确的固有频率,而对其他 15 种情况只给出了利用 Ritz 法所能得到的近似解。[13]研究了各种运动载荷作用下对边简支矩形薄板的强迫振动问题。[10]用能量法对弹性地基上自由边矩形板的振动问题进行了研究,得到了固有频率的近似值。[7]对固定边矩形板的自由振动进行了求解,采用力法与三角级数的联合使用,确定了用于计算固定边矩形板的自由振动的基本频率。

从以上的资料以及其他大量文献可以看出,无论载荷情况如何,地基情况又如何,都未能给出固支矩形板振动问题的精确解,主要原因是:求解四边固支矩形板,无论是静力问题,还是动力问题,在数学处理问题上都存在一定的困难。但是,在许多工程问题中又常常遇到四边固支矩形板的振动问题,因而人们便寻找许多近似求解这类问题的数值解法。本书采用与 Timoshenko[2]中的叠加法类似,但较之简单的叠加法,对于均布载荷作用下 Winkler 地基模型的矩形薄板在—对边固支、—对边简支,四边固支等情况下的横向静力弯曲问题进行了求解,并将结果列于附录一中,从理论上给出了四边固支矩形板在弹性地基上横向弯曲问题的级数解,进而又利用叠加法在第 3 章对弹性地基上四边固支矩形板的自由振动及强迫振动进行了求解,首次得到了用三角级数形式表示的问题的精确解,所得到的结果可供工程实际直接应用。

对于球壳振动也和板的振动一样,人们作了大量的工作,但是,由于问题的复杂性和多样性,至今对球壳的振动研究仍是许多力学工作者的研究目标。特别是近年来在弹性薄壳的自由振动方面取得的巨大成就,使得人们可以和处理梁、板等问题一样,利用模态分析法(也叫振型叠加法)对球壳的强迫振动问题进行求解。[41]就是利用已知的自由振动特性,求解相应球壳的瞬时振动的。[33]则利用振型叠加法和 Laplace 变换法对于承受集中载荷及 Heaviside 载荷的浸在水中的球壳的瞬时振动进行了分析。在这方面,书中在第 4 章、第 5 章用 Laplace 变换法对无矩球壳及对称载荷作用下的球壳的动态响应问题进行了研究,求得了单层完整球壳及多层完整球壳在无约束情况下的动态响应以及弹性支持球壳的动态响应,并对于球壳问题的直接发展,即:无限大弹性体内含球壳的动态问题在第 6 章进行了求解。

3 发展和应用(主要内容)

从以上的文献可以看出:在梁的研究方面,多数研究课题均是对 Winkler 弹性地基梁进行振动分析,在实际工程中还会遇到弹性支持的情况,针对这些问题,本书在第 2 章对于多点弹簧支持的梁的自由振动与强迫振动分别进行了求解,得到了这些情况下的固有频率、固有振型以及动态挠度。

在板的研究方面,无论载荷情况如何,地基情况又如何,都未能给出固支矩形板振动问题的精确解,主要原因是:求解四边固支矩形板,无论是静力问题,还是动力问题,在数学处理上都存在一定的困难。但是,在许多工程问题中又常常遇到四边固支矩形板的振动问题,因而人们便寻找许多近似解法求解这类问题的数值解法。书中采用与 Timoshenko[2] 中的叠加法类似,但较之简单的叠加法,对于均布载荷作用下 Winkler 地基模型的矩形薄板在一对边固支、一对边简支,四边固支等情况下的横向静力弯曲问题进行了求解,并将结果列于附录一中,从理论上给出了四边固支矩形板在弹性地基上横向弯曲问题的级数解,进而又利用叠加法在第 3 章对弹性地基上四边固支矩形板的自由振动及强迫振动进行了求解,首次得到了用三角级数形式表示的问题的精确解。

在球壳的研究方面,书中在第 4 章、第 5 章用 Laplace 变换法对无矩球壳及对称载荷作用下的球壳的动态响应问题进行了研究,求得了单层完整球壳及多层完整球壳在无约束情况下的动态响应以及弹性支持球壳的动态响应,并对于球壳问题的直接发展,即:无限大弹性体内含球壳的动态问题在第 6 章进行了求解。

第 7 章用扩展 Dirac 函数来表示空心板材在刚度以及质量密度上由于空洞而引起的非连续变化,从而变不连续函数的求解问题为连续函数的求解问题,继而用 Galerkin 法对其固有频率进行了求解,得到了适应于任意大小、任意分布空洞的空心板材的固有频率计算公式。计算结果显示:空心板材的固有频率不仅与板材的几何尺寸有关,而且还与各空洞的位置即分布方式有关,除此之外还与混凝土的 Poisson 比有关。这些结论为空心板材的优化设计提供了可靠的理论依据。

第2章 弹簧支持连续等跨梁的横向振动

1 引言

本章内容分为两部分。一部分是利用传递矩阵法对弹簧支持的连续等跨梁在冲击载荷作用下的横向自由振动问题进行了求解,且以单跨、双跨和四跨梁为例进行了具体计算,得到了固有频率及固有振型。另外还对两种极限状态——自由状态和简支状态进行了讨论,并与已有的计算结果进行比较,完全吻合。第二部分则对弹簧支持连续等跨梁的动态响应问题利用模态迭加法进行了求解。在第一部分已求得的固有频率与固有模态的基础上,得到了弹簧支持连续等跨梁在运动载荷作用下的动态挠度。另外,本文还在第二部分对弹簧支持梁的振型函数的正交性进行了证明。

在本章的推导中,各个弹簧的弹簧系数可以是相同的,也可以是不相同的。所推得的公式均是对一般情况而言的,但在算例中,取各弹簧系数是相同的。

2 弹簧支持连续等跨梁的横向自由振动

2.1 基本理论

2.1.1 基本公式

首先假定:振动发生于梁(如图2.1)的一个主平面内,转动惯量和横向剪切的影响可忽略不计。

梁的振动方程由[3]给出:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (2.2.1)$$

式中 E ——材料杨氏模量;

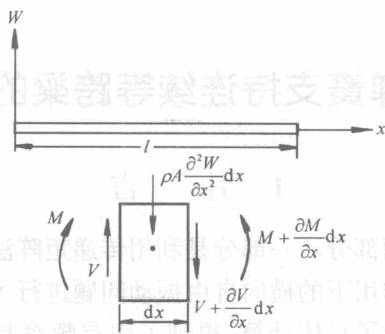


图 2.1 弯曲梁

I ——惯性矩, EI 为梁的弯曲刚度;

ρ ——梁的质量密度;

A ——横截面积;

$a = EI/\rho A$ 。

利用分离变量法, 设:

$$W_i(x, t) = X_i(x) T_i(t), \quad (2.2.2)$$

在自由振动问题中, $W_i(x, t)$ 必为时间的简谐函数, 因而有:

$$T_i(t) = G_i \sin p_i t + H_i \cos p_i t. \quad (2.2.3)$$

将(2.2.2)(2.2.3)代入(2.2.1)则得到:

$$\begin{aligned} X_i(x) = & A_i \sin \lambda_i x + B_i \cos \lambda_i x \\ & + C_i \operatorname{sh} \lambda_i x + D_i \operatorname{ch} \lambda_i x. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

其中有关系:

$$p_i^2 = \lambda_i^4 a^2. \quad (2.2.5)$$

对于多跨梁而言, 每一跨上有一组 A_i, B_i, C_i, D_i 表示出该跨段的 $X_i(x)$, 这些系数的确定是根据梁的边界条件及连续条件。(2.2.3)中 G_i, H_i 的确定是根据初始条件。

2.1.1.2 传递矩阵法

传递矩阵法是工程中用来求解固有频率和主振型的方法之一。由于此方法概念清晰, 表达紧凑、严谨, 尤其适用于等跨连续梁, 是一个很成熟的方法。所以本文选用传递矩阵法来求解梁的自由振动问题。

传递矩阵法的主要思路是：

对于等跨连续梁，有下述转移方程的存在：

$$\begin{pmatrix} W \\ \theta \\ M \\ Q \end{pmatrix}_I = A(x') \begin{pmatrix} W \\ \theta \\ M \\ Q \end{pmatrix}_R \quad (2.2.6)$$

式中， i 为第 i 个支点处， I 为第 I 跨段， R 为支点右边， W 为振动位移， θ 为动转角， M 为动弯矩， Q 为动剪力， $A(x')$ 为传递矩阵， x' 为以第 I 跨段左支点为原点的相对坐标 ($x' = x - x_i$)。不难看出，(2.2.6) 中 W, θ, M, Q 均是 x', t 的函数。

2.2 具体求解

基于上述基本理论，我们将对单跨、双跨及四跨梁在弹簧支持上的横向自由振动问题进行求解。

2.2.1 单跨梁

如图 2.2，梁是均匀的各向同性体，梁的横截面是棱柱形，两端弹簧支持的弹性系数分别是 k_1, k_2 。在 $t=0$ 时将作用在 $x=x_1$ 处的载荷 P 突然卸去，以使梁发生自由振动。

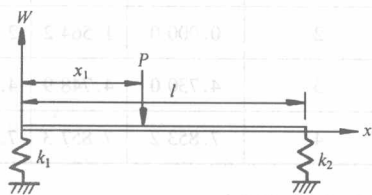


图 2.2 单跨梁

将问题的边界条件：

$$x=0, -EIX_i'' = k_1 X_i, X_i'' = 0; \quad (2.2.7a)$$

$$x=l, EIX_i'' = k_2 X_i, X_i'' = 0. \quad (2.2.7b)$$

代入(2.2.4)及其导函数，便得到：

$$(\sin \lambda_i l) A_i + (\cos \lambda_i l - \operatorname{ch} \lambda_i l) B_i - (\operatorname{sh} \lambda_i l) C_i = 0; \quad (2.2.8a)$$

$$E I \lambda_i^3 A_i - 2 k_1 B_i - E I \lambda_i^3 C_i = 0; \quad (2.2.8b)$$

$$(k_2 \sin \lambda_i l + E I \lambda_i^3 \cos \lambda_i l) A_i + (k_2 \cos \lambda_i l - E I \lambda_i^3 \sin \lambda_i l + k_2 \operatorname{ch} \lambda_i l - E I \lambda_i^3 \operatorname{sh} \lambda_i l) B_i + (k_2 \operatorname{sh} \lambda_i l - E I \lambda_i^3 \operatorname{ch} \lambda_i l) C_i = 0. \quad (2.2.8c)$$

若要求得非零解，只有令 A_i, B_i, C_i 的系数行列式为零，这样便得

到:

$$(EI\lambda_i^3)^2(1 - \operatorname{ch} \lambda_i l \cos \lambda_i l) + EI\lambda_i^3(k_1 + k_2)(\operatorname{sh} \lambda_i l \cos \lambda_i l - \sin \lambda_i l \operatorname{ch} \lambda_i l) + 2k_1 k_2 \operatorname{sh} \lambda_i l \sin \lambda_i l = 0. \quad (2.2.9)$$

给定了 k_1, k_2 的值,便可以由上式得到 $\lambda_i l$ 的值。当 $k_1 = k_2 = k$ 时,令 $d = kl^3/EI$,便可得到:

$$(\lambda_i l)^6(1 - \operatorname{ch} \lambda_i l \cos \lambda_i l) + 2d(\lambda_i l)^3(\operatorname{sh} \lambda_i l \cos \lambda_i l - \sin \lambda_i l \operatorname{ch} \lambda_i l) + 2d^2 \operatorname{sh} \lambda_i l \sin \lambda_i l = 0. \quad (2.2.10)$$

通过上机计算得到梁的固有频率 $\lambda_i l$ 的值见表 2.1。

表 2.1 单跨梁的固有频率

$\lambda_i l$ i	d 1.0×10^{-10}	1.0	4.0	10.0	100.0	10 000.0	1.0×10^{10}
1	0.000 0	1.184 3	1.654 5	2.032 3	2.876 8	3.138 5	3.141 6
2	0.000 0	1.564 2	2.208 1	2.766 6	4.663 8	6.258 4	6.283 2
3	4.730 0	4.748 9	4.804 8	4 913 4	6.076 2	9.339 9	9.424 8
4	7.853 2	7.857 3	7.869 8	7.894 7	8.275 4	12.359	12.566

由(2.2.8)得到:

$$A'_i = \frac{A_i}{C_i} = \frac{\operatorname{sh} \lambda_i l + \frac{(\lambda_i l)^3}{2d}(\cos \lambda_i l - \operatorname{ch} \lambda_i l)}{\sin \lambda_i l + \frac{(\lambda_i l)^3}{2d}(\cos \lambda_i l - \operatorname{ch} \lambda_i l)} \quad (2.2.11a)$$

$$B'_i = \frac{B_i}{C_i} = \frac{D_i}{C_i} = \frac{(\lambda_i l)^3}{2d} \frac{(\operatorname{sh} \lambda_i l - \sin \lambda_i l)}{\sin \lambda_i l + \frac{(\lambda_i l)^3}{2d}(\cos \lambda_i l - \operatorname{ch} \lambda_i l)} \quad (2.2.11b)$$

由(2.2.11)求得 A'_i, B'_i 的值,令 $C'_i = 1$,便可得到固有振型,我们将前几阶振型绘于图 2.3。

这样,便有:

$$W_i = C_i[A'_i \sin \lambda_i x + B'_i(\cos \lambda_i x + \operatorname{ch} \lambda_i x) + \operatorname{sh} \lambda_i x]$$

$$(G_i \sin p_i t + H_i \cos p_i t)。$$

$$(2.2.12)$$

下面代入初始条件确定 G_i, H_i 。本问题的初始条件为:

$$1^\circ \quad W(x, 0) = 0, \text{ 因而 } G_i = 0;$$

2° $W(x, 0) = f(x), f(x)$ 是静载 P 作用下梁的挠度曲线。

经过求解, 得到:

$$f(x) = \begin{cases} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & \text{当 } 0 \leq x \leq x_1; \\ A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' & \text{当 } x_1 \leq x \leq l; \end{cases} \quad (2.2.13a)$$

$$(2.2.13b)$$

利用边界及连续条件, 求得:

$$A = \frac{P}{6EI} \left(1 - \frac{x_1}{l} \right), B = 0,$$

$$C = \frac{P}{k_1 l} + \frac{Px_1}{6EI} \left(3x_1 - 2l - \frac{x_1^2}{l^2} \right) - \frac{Px_1}{l^2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right),$$

$$D = -\frac{P}{k_1} \left(1 - \frac{x_1}{l} \right), A' = -\frac{Px_1}{6EI}, B' = \frac{Px_1}{2EI}, D' = -\frac{P}{k_1} \left(1 - \frac{x_1}{l} \right) + \frac{Px_1^3}{6EI},$$

$$C' = \frac{P}{k_1 l} - \frac{Px_1}{6EI} (2l^2 + x_1^2) - \frac{Px_1}{l^2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)。$$

当 $k_1 = k_2 = k, x' = 1/2$ 时, 则有:

$$A = -A' = \frac{P}{12EI}, B = 0, C = \frac{1}{3} C' = -\frac{Pl^2}{16EI},$$

$$D = -\frac{P}{2k}, B' = \frac{12}{l} D' = \frac{Pl}{4EI}$$

因而

$$f(x) = \begin{cases} \frac{P}{12EI} x^3 - \frac{Pl^2}{16EI} x - \frac{P}{2k} & \text{当 } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{P}{12EI} x^3 + \frac{Pl}{4EI} x^2 - \frac{3Pl^2}{16EI} x + \frac{Pl^2}{48EI} & \text{当 } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \quad (2.2.14a)$$

$$(2.2.14b)$$

这样, 由 2°, 取 $F_i = C_i H_i$, 便有:

$$\sum_i F_i [A'_i \sin \lambda_i x + B'_i (\cos \lambda_i x + \operatorname{ch} \lambda_i x) + \operatorname{sh} \lambda_i x] = f(x)。$$

$$(2.2.15)$$

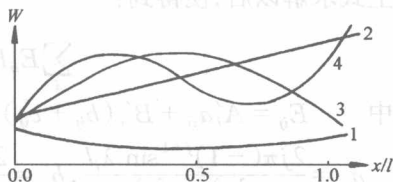


图 2.3 $d=10$ 时单跨梁的振型曲线

对上式求解以后,便得到:

$$\sum_i E_{ij} F_i = P_j. \quad (2.2.16)$$

其中 $E_{ij} = A'_i a_{ij} + B'_i (b_{ij} + c_{ij}) + d_{ij}$

$$a_{ij} = \frac{2j\pi(-1)^{j+1} \sin \lambda_i l}{j^2 \pi^2 - \lambda_i^2 l^2}, b_{ij} = \frac{2j\pi[1 + (-1)^{j+1} \cos \lambda_i l]}{j^2 \pi^2 - \lambda_i^2 l^2},$$

$$c_{ij} = \frac{2j\pi[1 + (-1)^{j+1} \operatorname{ch} \lambda_i l]}{j^2 \pi^2 + \lambda_i^2 l^2}, d_{ij} = \frac{2j\pi(-1)^{j+1} \operatorname{sh} \lambda_i l}{j^2 \pi^2 + \lambda_i^2 l^2},$$

$$P_j = \frac{P}{j\pi} \left[\frac{(-1)^j}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right] - \frac{2Pl^3}{EIj^4 \pi^4} \sin \frac{j\pi}{2}.$$

当 $k_1 = k_2 = k$ 时

$$P_j = \begin{cases} -\frac{2P}{j\pi k} - (-1)^{\frac{j-1}{2}} \frac{2Pl^3}{EIj^4 \pi^4} & \text{当 } j=1,3,5,\dots \\ 0 & \text{当 } j=2,4,6,\dots \end{cases}$$

对(2.2.16)进行计算,便可得到 F_i 的值,再代入(2.2.12),得到:

$$W = \sum_i F_i \cos p_i t [A'_i \sin \lambda_i x + B'_i (\cos \lambda_i x + \operatorname{ch} \lambda_i x) + \operatorname{sh} \lambda_i x] \quad (2.2.17)$$

以上我们求得了图 2.2 所示问题的一般解。作为特例,我们观察以下两种极限情况:

1° 当 $k \rightarrow 0$ 时,这时,实际上是自由边界问题,此时将 $d = 0$ 代入(2.2.10),得到:

$$\operatorname{ch} \lambda_i l \cos \lambda_i l = 1. \quad (2.2.18)$$

此结果与 Timoshenko[3]中的结果完全吻合。

2° 当 $k \rightarrow \infty$ 时,这时,实际上是简支边界问题,将 $d \rightarrow \infty$ 代入,(2.2.10)退化为:

$$\sin \lambda_i l \operatorname{sh} \lambda_i l = 0, \quad (2.2.19)$$

固有频率为: $\lambda_i l = i\pi (i = 1, 2, 3, \dots)$ 。可以看出,此时与表 2.1 中 $d = 1.0 \times 10^{10}$ 时 $\lambda_i l$ 的结果一致,并且均与 Timoshenko[3]中相应问题的结果吻合。

2.2.2 双跨梁

如图 2.4 所示的双跨梁,两端弹簧及中间弹簧的弹性系数分别是

k_1, k_3 和 k_2 。

1. 第一跨

将坐标原点取在 1 点, 用与求解单跨梁时相同的方法, 设

$$W_{Ii}(x, t) = X_{Ii}(x) T_i(t); \quad (2.2.20)$$

$$X_{Ii}(x) = A_{Ii} \sin \lambda_i x + B_{Ii} \cos \lambda_i x + C_{Ii} \operatorname{sh} \lambda_i x + D_{Ii} \operatorname{ch} \lambda_i x. \quad (2.2.21)$$

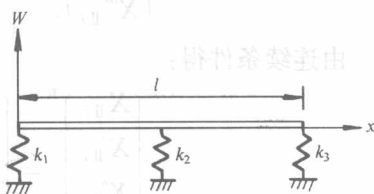


图 2.4 双跨梁

将边界条件代入, 并利用传递矩阵

法, 得到:

$$\begin{pmatrix} X_{Ii} \\ X'_{Ii} \\ X''_{Ii} \\ X'''_{Ii} \end{pmatrix}_2^L = \frac{1}{2} A \left(\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} X_{Ii} \\ X'_{Ii} \\ X''_{Ii} \\ X'''_{Ii} \end{pmatrix}_1^R, \quad (2.2.22)$$

传递矩阵

$$A \left(\frac{l}{2} \right) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2/\lambda_i & g_3/\lambda_i^2 & g_4/\lambda_i^3 \\ \lambda_i g_4 & g_1 & g_2/\lambda_i & g_3/\lambda_i^2 \\ \lambda_i^2 g_3 & \lambda_i g_4 & g_1 & g_2/\lambda_i \\ \lambda_i^3 g_2 & \lambda_i^2 g_3 & \lambda_i g_4 & g_1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{4 \times 4},$$

其中

$$g_1 = \operatorname{ch} \frac{\lambda_i l}{2} + \cos \frac{\lambda_i l}{2}, \quad g_2 = \operatorname{sh} \frac{\lambda_i l}{2} + \sin \frac{\lambda_i l}{2}, \\ g_3 = \operatorname{ch} \frac{\lambda_i l}{2} - \cos \frac{\lambda_i l}{2}, \quad g_4 = \operatorname{sh} \frac{\lambda_i l}{2} - \sin \frac{\lambda_i l}{2}.$$

2. 第二跨

将坐标原点取在 2 点, 同第一跨一样 ($x' = x - l/2$), 有:

$$X_{IIi}(x) = A_{IIi} \sin \lambda_i x' + B_{IIi} \cos \lambda_i x' + C_{IIi} \operatorname{sh} \lambda_i x' + D_{IIi} \operatorname{ch} \lambda_i x', \quad (2.2.23)$$