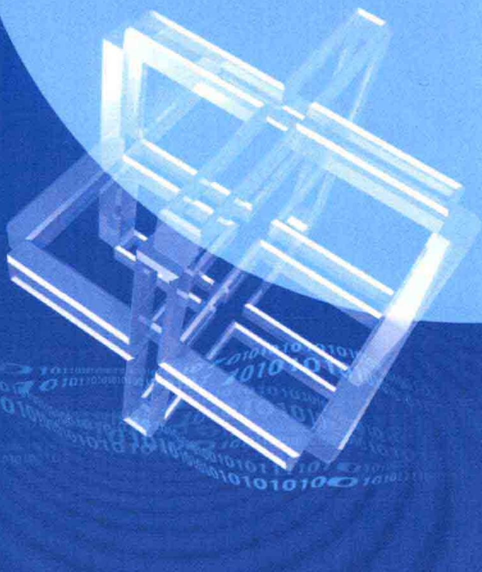
NIZHENDEMOHULILUN

拟阵的模糊理论

李尧龙 编著



陕西科学技术出版社

拟阵的模糊理论

李尧龙　编著

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

拟阵的模糊理论/李尧龙编著. —西安:陕西科学技术出版社,2008. 8

ISBN 978-7-5369-4505-0

I. 拟… Ⅱ. 李… Ⅲ. 拟阵—模糊集理论 Ⅳ. 0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 087762 号

出 版 者	陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号　邮编 710003 电话(029)87211894　传真(029)87218236 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社 电话(029)87212206　87260001
印　　刷	陕西丰源印务有限公司
规　　格	880mm×1230mm　32 开本
印　　张	7.25
字　　数	200 千字
版　　次	2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	18.00 元

前 言

20世纪30年代，Whitney在《关于线性相关的抽象特征》一文中首次提出了拟阵的公理系统，随后，Rado提出了有关拟阵理论的一些定理，Birkhoff，Maclane，Dilworth等人研究了拟阵的几何方面的问题以及拟阵与格论的关系等. 20世纪60年代，加拿大数学家Tutte发表了《关于拟阵的演讲》一文，并把拟阵与图论充分地结合起来，取得了一系列开创性的成果，才使得拟阵理论取得了长足的发展，Edmonds，Minty等人把图论的算法推广到拟阵理论之中，使得拟阵理论在组合优化、整数规划、网络流以及电网络等方面有了广泛的应用. Welsh研究了拟阵的结构、拟阵与格的关系以及拟阵的极值问题等，并于1976年出版了拟阵论的专著《Matroid Theory》[1]，标志着拟阵理论的成熟.

与其他数学分支相比，拟阵理论并不是一个历史悠久的数学分支，但由于实际的应用价值与数学工作者的不懈努力，拟阵理论已经有了相当丰富的内容. 特别是近30年来，拟阵理论得到了很大的发展，已经成为一个日益引人瞩目的生机勃勃的数学分支，拟阵理论为联系图论、线性代数、格论以及其他数学领域的许多基本数学思想提供了简单却非常有用的方法. 然而，随着科学技术的进步特别是电子计算机技术的发展与应用，原有的拟阵结构已经不能满足新的要求，拓广原有的拟阵结构也是势在必行. 另外，与不同学科相结合也是拟阵研究的一个

典型特征，如把拟阵理论与图论、代数学、格论、几何学等学科结合起来研究，这使得拟阵理论有了许多生长点，这样模糊拟阵[2-6]、广义拟阵[7,8]、偏序集拟阵[9,10]、有向拟阵理论[11]等则应运而生.

1988 年，Goetschel 和 Voxman 发表了《Fuzzy Matroids》[2]一文，首次提出了模糊拟阵的概念，开始了模糊拟阵理论的研究，并且在该文中得到了模糊拟阵的部分特征. 在之后的几年中，他们研究了模糊拟阵的性质与结构，给出了模糊拟阵的秩函数、支撑集、模糊拟阵的基与圈等一系列性质，并且把拟阵的 Greedy 算法推广到模糊拟阵之中，讨论了模糊拟阵的和、积、对偶以及其他一些运算等，从而初步建立起了模糊拟阵的理论框架[66-70,74,77,78]. Yuang-Cheh Hsueh 在《On fuzzification of Matroids》[12]一文中，提出了一种可行的拟阵模糊化的方法. Novak[72,73]则研究了模糊独立集系统，模糊预拟阵的性质及其与模糊拟阵的关系.

十几年来，我国学者在模糊拟阵的研究中也有许多出色的工作，除了台湾学者的文献［12］外，重庆大学的吴德垠与他的学生在文献［89－93］等中有许多创造性的工作. 然而，迄今为至，我国还没有一部介绍模糊拟阵理论的著作，所以本书也想尽力弥补这方面的缺失，本书系统地论述了拟阵的模糊理论的基本内容，其中包括作者在模糊拟阵理论方面的一部分研究成果.

全书共分十二章. 第一章至第五章介绍模糊拟阵理论的基本内容，包括模糊拟阵的秩函数、基与圈、支撑集、闭包算子及其应用等. 第六章论述一类模糊拟阵的闭包公理与拟阵的余塔，除了讨论闭奇异模糊拟阵与闭单点常态模糊拟阵的闭包公

理外，还从序的角度、范畴论的角度讨论了模糊拟阵与余塔的关系. 第七章与第八章介绍模糊拟阵的和、对偶与乘积以及子拟阵，讨论了模糊拟阵的结构. 第九章介绍了模糊拟阵的Greedy算法，使模糊拟阵与组合优化有了紧密的联系. 第十章与第十一章介绍模糊独立集系统与模糊预拟阵，这两章内容是模糊拟阵的拓广理论. 第十二章介绍 H 模糊拟阵，本章不仅提出了一种可行的拟阵模糊化的方法，而且还研究了模糊拟阵理论在无限集上的推广. 应当指出，本书并不是一部完善的著作，在模糊拟阵理论领域中许多研究成果和新近进展都没有被介绍进来，其中一部分只是作为参考文献列在书后，特别是本书所论述的理论有许多都正在发展中，所以希望本书能起到抛砖引玉的作用，期待有更好的著作出版.

本书的出版得到了渭南师范学院专项科研基金(08YKZ053)的资助，并得到陕西科学技术出版社的大力支持. 同时还要感谢我的导师赵彬教授、李生刚教授多年来对我的培养、帮助与鼓励，感谢我的师兄弟们，他们给了我成长过程中许多美好的时光.

由于本人水平有限，书中错误在所难免，敬请各位读者批评指正.

李尧龙

2008年6月于渭南师范学院

目　　录

第一章　预备知识

在本章中,我们仅提供一些本书其他章节讨论拟阵的模糊理论所需要的一些基本知识.第一节介绍集系统与偏序集中的一些基本概念和结论.第二节介绍图与有向图论中的基本结论和知识.第三节介绍模糊集与模糊集系统中的一些基本知识.本章的主要内容见[69,82,86,88,94].

§1.1　集系统与偏序集

定义 1.1.1　设 E 是一有限集,$I\subseteq 2^E$ 是 E 上一集簇,称序对 (E,I) 为 E 上的集系统或分明集系统.I 中的元素称为集系统 (E,I) 中的可行集.

定义 1.1.2　设 E 是一有限集,(E,I) 是 E 上一集系统,若 (E,I) 满足

(1) $\varnothing\in I$,

(2) $X\in I, Y\subseteq X\Rightarrow Y\in I$.

则称 (E,I) 为 E 上的独立集系统,I 中的元素称为 (E,I) 的独立集.

定义 1.1.3　设 E 是一有限集,(E,I) 是 E 上的独立集系统,$A\in I$.若对任意的 $B\in I$,$A\subseteq B$ 都有 $A=B$ 成立.则称 A 为 (E,I) 的一个基.(E,I) 中所有基的集合记为 $\mathscr{B}$.

定义 1.1.4　设 P 是集合,$\leqslant$ 是 P 上的二元关系,考虑以下性质:

(1)(自反性) $\forall a\in P, a\leqslant a$;

(2)(反对称性) $\forall a,b\in P, a\leqslant b, b\leqslant a\Rightarrow a=b$;

(3)(传递性) $\forall a,b,c\in P, a\leqslant b\Rightarrow a\leqslant c$;

(4)(全序性) $\forall a,b\in P$,或者 $a\leqslant b$,或者 $b\leqslant a$.

此处对于 $a,b\in P, a\leqslant b\Leftrightarrow(a,b)\in\leqslant$. 若 $(a,b)\notin\leqslant$,则记作 $a\nleqslant b$. 注意,$a\leqslant b$ 也记作 $b\geqslant a$.

若$\leqslant$满足传递性,则称$\leqslant$为 P 上的序,并称 $(P,\leqslant)$ 为序集;若$\leqslant$满足自反性与传递性,则称$\leqslant$为 P 上的预序(或拟序),并称 $(P,\leqslant)$ 为预序集(或拟序集);若$\leqslant$满足自反性,反对称性与传递性,则称$\leqslant$为 P 上的偏序,并称 $(P,\leqslant)$ 为偏序集;若$\leqslant$满足自反性,反对称性,传递性和全序性,则称$\leqslant$为 P 上的线性序或全序,并称 $(P,\leqslant)$ 为全序集或链.

一般地,对偏序集的许多概念,记号和结论也同样适用于序集和预序集,本书仅限于讨论偏序集的情形.

在不致引起混淆的情况下,$(P,\leqslant)$ 也简记为 P.

例 1.1.5　设 $P(X)$ 是集合 X 的幂集,若对于 $A,B\in P(X)$,定义:

$A\leqslant B\Leftrightarrow A\subseteq B$,

则 $(P(X),\leqslant)$ 是偏序集,但一般不是全序集.

例 1.1.6　设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集,则其对偶 $(P^{op},\leqslant_{op})$ 也是偏序集,其中 $P^{op}=P$,并且 $\forall a,b\in P^{op}$,有

$$a\leqslant_{op}b\Leftrightarrow b\leqslant a.$$

定义 1.1.7　设 $(P,\leqslant)$ 是偏序集,$a,b\in P$.

(Ⅰ)若 $\forall x\in P$,都有 $x\leqslant a$,则称 a 是 P 的最大元;

(Ⅱ)若 $\forall x\in P$,都有 $b\leqslant x$,则称 b 是 P 的最小元;

(Ⅲ)若 $\forall x\in P, a\leqslant x\Rightarrow a=x$,则称 a 是 P 的极大元;

(Ⅳ)若 $\forall x\in P, x\leqslant b\Rightarrow b=x$,则称 b 是 P 的极小元.

对于偏序集来说，最大元与最小元未必存在．若存在，则分别是惟一的极大元与极小元．任意有限偏序集必有极大元与极小元，但未必有最大元与最小元．对于全序集来讲，最大元与极大元，最小元与极小元分别是一致的．

定义 1.1.8　设$(P,\leqslant)$是偏序集，$S\subseteq P$．$u,v\in P$．

(Ⅰ)若$\forall x\in S$，有$x\leqslant u$，则称u是S的上界；

(Ⅱ)若$\forall x\in S$，有$v\leqslant x$，则称v是S的下界．

一般地，S的上界与下界未必存在．即使存在也未必惟一，并且未必属于S．

设$(P,\leqslant)$是偏序集，$S\subseteq P$．若存在$a\in P$使得

(Ⅰ)a是S的一个上界(即$\forall x\in S,x\leqslant a$)；

(Ⅱ)a是S的最小上界(即若$c\in P$是S的任意上界，则$a\leqslant c$)，则称a是S的上确界．此时a记为$\vee S$或$\sup S$，并称S有并．

对偶地，设$(P,\leqslant)$是偏序集．若存在$b\in P$使得

(Ⅰ)b是S的一个下界(即$\forall x\in S,b\leqslant x$)；

(Ⅱ)b是S的最大下界(即若$c\in P$是S的任意下界，则$c\leqslant b$)，则称b是S的下确界．此时b记为$\wedge S$或$\inf S$，并称S有交．

对于偏序集P中的任意子集S，其上确界或下确界未必存在．若$\vee S$或$\wedge S$存在，则由反对称性知必惟一，但S的上确界或下确界未必属于S．

若$S=\{a,b\}$，则记

$$\vee S=a\vee b,\quad \wedge S=a\wedge b.$$

若$S=\varnothing$，则P中的任一元都是它的上界，也都是它的下界，显然，$\varnothing$有没有上确界与下确界，分别取决于P有没有最小元与最大元．若P中存在最大元1与最小元0，则

$$\vee\varnothing=0,\qquad \wedge\varnothing=1.$$

今后要用到一个重要的集论工具，即 Zorn 引理，它与选择公理是等价的.

定理 1.1.9(Zorn **引理**) 设$(p,\leqslant)$是偏序集，若 P 的任意全序子集在 P 中都有上界，则 P 中必有极大元.

定义 1.1.10 设 P 是一个集合，R 是 P 上的一个二元关系，如果对于任意的 $x,y,z\in P$.

(1)(自反性)xRx，

(2)(对称性)$xRy\Rightarrow yRx$，

(3)(传递性)$xRy,yRz\Rightarrow xRz$.

则称 R 为 P 上的一个等价关系.

§1.2 图与有向图

定义 1.2.1 一个图 G 定义为一个有序对(V,E)，记为 $G=(V,E)$，其中

(Ⅰ)V 是一个集合，称为顶点集，其元素称为顶点，$|V|$表示顶点数.

(Ⅱ)E 是由 V 中的点组成的点对构成的集合，称为边集，其元素称为边.

(1)若 E 是由 V 中的点组成的无序点对构成的集合，则称图 G 为无向图(无向图简称图).

(2)若 E 是由 V 中的点组成的有序点对构成的集合，则称图 G 为有向图，G 中的边也称为有向边.

图 G 的顶点集也记为 $V(G)$，边集也记为 $E(G)$. 连接两个相同顶点的边的条数，称为边的重数.

定义 1.2.2 顶点集与边集都有限的图称为有限图，顶点集

与边集是空集的图称为空图.

定义 1.2.3　设 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个图，若存在双射 $f:V_1\to V_2$ 使得 $uv\in E_1$ 当且仅当 $f(u)f(v)\in E_2$，且 uv 的重数与 $f(u)f(v)$ 的重数相同，则称 G_1 与 G_2 同构，记为 $G_1\cong G_2$.

定义 1.2.4　设 G 和 H 是两个图，如果 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$. 且 H 中边的重数不超过 G 中对应边的重数，则称 H 是 G 的子图，记为 $H\subseteq G$.

当 $H\subseteq G$，但 $H\neq G$ 时，则记为 $H\subset G$，且称 H 为 G 的真子图.

定义 1.2.5　设 $G=(V,E)$ 是一个图，$V'\subseteq V$，以 V' 的顶点集，以两端点均在 V' 中的 G 的边的全体为边集所组成的子图，称为 G 的导出子图，记为 $G|_{V'}$.

定义 1.2.6　设 G 是一个无向图，图 G 的一条通道是指一个有限非空序列 $P=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$，它依次交替地为顶点和边，使得对于 $1\leqslant i\leqslant k$，e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i. 称 P 是一条 (v_0,v_k)-通道，顶点 v_0 和 v_k 分别称为 P 的起点和终点.

若 $v_0=v_k$，则称 P 是一个闭通道，否则称 P 为一个开通道.

若 P 的顶点 $v_0,v_1,\cdots,v_k$ 互不相同，则称 P 为 G 中连接 v_0 和 v_k 的路，简称 (v_0,v_k) 路.

命题 1.2.7　设 $G=(V,E)$ 是一个图，则

(Ⅰ) 设 $P_1=ue_1v_1e_1v_2\cdots v_{l-1}e_lv$ 和 $P_2=ve_{l+1}v_{l+1}e_{l+2}\cdots v_{k-1}e_kw$ 分别是 G 中连接 u 与 v 的路和连接 v 和 w 的路. 记

$$P=P_1\cup P_2=ue_1v_1e_2v_2\cdots v_{l-1}e_lve_{l+1}v_{l+1}\cdots v_{k-1}e_kw$$

则 P 是 G 中连接 u 和 w 的通道.

(Ⅱ) 设 $ue_1v_1e_2v_2\cdots v_{k-1}e_kv$ 是图 G 中连接 u 和 v 的通道，则在

此通道中必包含一条连接 u 和 v 的路.

定义 1.2.8 设 G 是一个图，$u,v\in V(G)$，若 G 中存在(u,v)路，则称 u 和 v 是连通的. 如果 G 中每一对顶点 u,v 都有一条(u,v)路，则称 G 是连通图. 否则称为非连通图.

§1.3 模糊集与模糊集系统

定义 1.3.1 设 X 是一集合，映射 $\mu: X\to[0,1]$称为 X 上的一个模糊集. $\forall x\in X$，$\mu(x)$称为点对模糊集 μ 的隶度 (degree of membership). X 上所有模糊集的集合记为 $F(X)$.

例 1.3.2 设 X 是一集合.

(a)**0** 模糊集 $0: X\to[0,1]$定义为 $\mathbf{0}(x)=0 \quad (\forall x\in X)$.

(b)**1** 模糊集 $1: X\to[0,1]$定义为 $\mathbf{1}(x)=1 \quad (\forall x\in X)$.

(c)常值 r 模糊集 $\mu_r: X\to[0,1]$定义为：$\forall r\in[0,1] \quad \mu_r(x)=r \quad (\forall x\in X)$.

特别地，**0** 模糊集与 **1** 模糊集也为常值模糊集.

(d)设 $\mu\in F(X)$是一模糊集，μ 的伪补(简称为补)μ^c 定义为

$$\mu^c(x)=1-\mu(x) \quad (\forall x\in X)$$

定义 1.3.3 设 $\mu,v\in F(X)$为 X 上的两个模糊集.

(1) $\forall x\in X$，若有 $\mu(x)=v(x)$，则称模糊集 μ,v 相等，记为$\mu=v$.

(2) $\forall x\in X$，若有 $\mu(x)\leqslant v(x)$，则称 μ 包含于 v，记为 $\mu\leqslant v$.

(3) $\forall x\in X$，若有(Ⅰ)$\mu\leqslant v$.(Ⅱ)存在 $x\in X$，使 $\mu(x)<v(x)$. 则称 μ 真包含于 v. 记为 $\mu<v$.

以下给出模糊集的并和交的定义：

定义 1.3.4 设 $\mu,v\in F(X)$，$\forall x\in X$，令

(1) $(\mu\wedge\upsilon)(X)=\mu(x)\wedge\upsilon(x)=\min\{\mu(x),\upsilon(x)\}$,

(2) $(\mu\vee\upsilon)(X)=\mu(x)\vee\upsilon(x)=\max\{\mu(x),\upsilon(x)\}$,

则 $\mu\wedge\upsilon,\mu\vee\upsilon\in F(X)$. 分别称为 μ 与 υ 的交, μ 与 υ 的并.

定义 1.3.5　设 $\mu\in F(X)$,其中 X 为一集合, $r\in[0,1]$, $A\subseteq X$. 令

(1) $\mathrm{supp}\mu=\{x\in X\mid\mu(x)>0\}$,称 $\mathrm{supp}\mu$ 为模糊集 μ 的承集.

(2) $R(\mu)=\{\mu(x)\mid x\in X\}$, $R^+(\mu)=\{\mu(x)\mid x\in\mathrm{supp}\mu\}$.

(3) $C_r(\mu)=\{x\in X\mid\mu(x)\geqslant r\}$,称 $C_r(\mu)$ 为模糊集 μ 的 r-截集.

(4) $m(\mu)=\min R^+(\mu)$, $M(\mu)=\max R^+(\mu)$.

(5)记　$$w(A,r)=\begin{cases}r, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

称 $w(A,r)$ 为 X 上承集为 A,高为 r 的初等模糊集.

(6) $|\mu|=\sum\limits_{x\in X}\mu(x)$,称为模糊集的基数或势.

例 1.3.6　设 $X=\{a,b,c,d,e\}$. 模糊集 $\mu:X\to[0,1]$ 为 $\mu(a)=0,\mu(b)=0.1,\mu(c)=0.5,\mu(d)=0.8,\mu(e)=1$. 则

$\mathrm{supp}\mu=\{b,c,d,e\}$,

$m(\mu)=0.1, M(\mu)=1$,

$R(\mu)=\{0,0.1,0.5,0.8,1\}$,

$R^+(\mu)=\{0.1,0.5,0.8,1\}$,

$|\mu|=0.1+0.5+0.8+1=2.4$.

关于模糊集与其 r-截集的关系,有以下结论成立:

定理 1.3.7　设 $\mu,\upsilon\in F(X)$,则以下结论成立.

(1) $C_0(\mu)=X$.

(2) $C_{r_1}(\mu)\subseteq C_{r_2}(\mu)$,其中 $0\leqslant r_2\leqslant r_1\leqslant 1$.

(3) $\mu\leqslant\upsilon\Rightarrow C_r(\mu)\subseteq C_r(\upsilon)$　$(\forall r\in(0,1])$.

(4)$C_r(\mu\wedge\upsilon)=C_r(\mu)\cap C_r(\upsilon)$.

(5)$C_r(\mu\vee\upsilon)=C_r(\mu)\cup C_r(\upsilon)$.

定义 1.3.8 设 $\mathscr{I}\subseteq F(E)$ 是 E 上一模糊集族，称序对 $(E,\mathscr{I})$ 为 E 上的一个模糊集系统.

命题 1.3.9 设 $(E,\mathscr{I})$ 为 E 上一模糊集系统，$\forall r\in(0,1]$，令

$$I_r=\{C_r(\mu)\mid\mu\in\mathscr{I}\}$$

则 (E,I_r) 为 E 上一分明集系统.

定义 1.3.10 设 $(E,\mathscr{I})$ 为 E 上的模糊集系统，$\forall r\in(0,1]$，令

$$I_r=\{C_r(\mu)\mid\mu\in\mathscr{I}\}$$

如命题 1.3.9 定义，则称集系统 (E,I_r) 为模糊集系统 $(E,\mathscr{I})$ 的、r-截系统，称 $\{(E,I_r)\}_{r\in(0,1]}$ 为模糊集系统 $(E,\mathscr{I})$ 的 r-截系统簇.