大專用書

# 可微胚與劇變論

蕭欣忠 呂素齡 合譯



國立編譯館出版

大 專 用 書

# 可微胚與劇變論

蕭欣忠 呂素齡 合譯





國 立 編 譯 館 出 版

中華民國七十二年十月一日台初版

# 可微胚與劇變論



定價：精裝新台幣壹佰陸拾元
平裝新台幣壹佰叁拾元

譯者：蕭欣忠
呂素齡

出版者：國立編譯館

印行者：國立編譯館

館址：台北市舟山路二四七號

電話：三二一六一七一

朱泙漫學屠龍於支離益，

殫千金之家，

三年技成而無所用其巧。

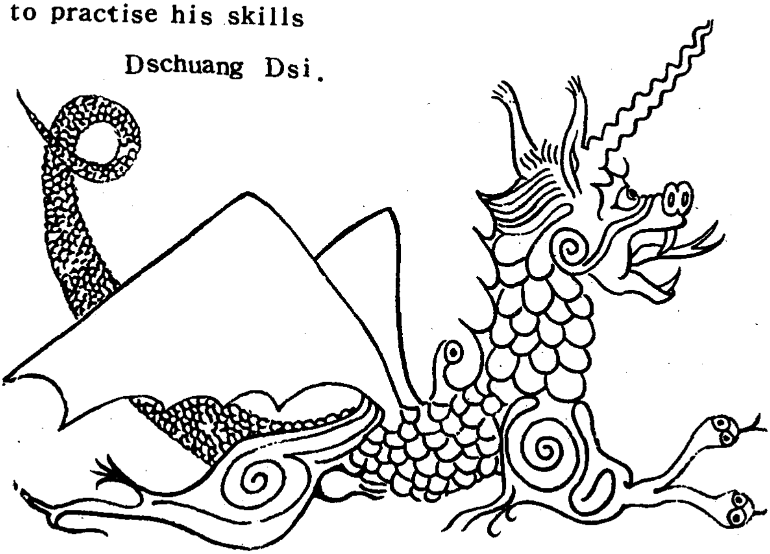
—莊子列禦寇—

因此之故，他開始教導人們屠龍的秘方。

—董禮內——

There once lived a man
who learned how to slay dragons
and gave all he possessed
to mastering the art.
After three years
he was fully prepared but,
alas, he found no opportunity
to practise his skills

Dschuang Dsi.



As a result he began

to teach how to slay dragons.

Réné Thom.

# 譯者序言

我們計劃編譯一套有關劇變論的叢書，以便使用自己的語言把這一個被譽爲當代數學中最重要，也最具發展潛力的傑出數學理論與應用介紹出來，並使之在中國科學界廣爲流傳。

我們已經推出第一本孫道詩（P.T. Saunders）的「劇變論入門」建立劇變論的基本觀念並展示其廣泛的可應用性。我們也已經推出第二本紀曼（E.C. Zeeman）的「基本劇變之分類」，把董氏分類定理的完整數學論證，以一個最簡單扼要的方法介紹出來。現在所推出的第三本書是從另外一位數學家的眼光來重新組織並介紹這一套劇變論分類定理的數學論證。布樂客（Th.Bröcker）以一個德國人所固有的更細膩的手法分成十六個單元來處理這些數學理論。由於他並不標榜最簡單最扼要的講法，所以他使用了前面三章仔細建立與劇變論具有密切淵源的隱函數定理，沙特定理與平滑函數的豐富存在性定理等等。當然這些東西都只在紀曼的講義中一筆帶過而已。另外像第七、八、十二等章也都是附加的實例或預備知識。而使得這本書讀起來會比紀曼的書容易一些。把這兩本書配合起來互相參考比較將是一件很有趣又有意義的事。

接下去已經譯好的第四本書是布拉特（C.P Bruter）所寫的法文書：「拓樸與知覺第一册：劇變論的哲學基礎與數學基礎」。作者十分用心來寫這本書，目的在於使得任何不曾受過正規數學訓練的人都能按步就班地逐漸進入情況，而充分理解所有牽涉到劇變論的數學概念。還有第五本書是薄士郇與史都華所合寫的「劇變論及其應用」，我們開始使用大量的篇幅來介紹劇變論在船體穩定性，流體的幾

何結構，光學與散射理論，彈性結構，熱力學，雷射物理學，生物學，環境生態學以及社會學等等許多方面的應用。不僅如此更選出紀樓夢的書：「爲一般科學家以及工程學家所寫的劇變論」來做爲本譯叢第六册。從一個不是純粹數學家的眼光來看這些劇變論以及其廣泛的可運用性。

接下去計劃中的第七本書是布拉特的「拓樸與知覺，第二册，把劇變論的語言重新專注到董禮內所最先預定的理論生物學的建造之上。事實上布拉特寫他這套書時就是按照董禮內的藍圖，把劇變論的觀點實際放進神經生理學，行爲反應科學，語言科學以及一般生物學之中。我想我們第八本以後的翻譯計劃會直接參考讀者們的反應與需要來擬定，因此我們十分樂意聽到您寶貴的意見與指教。

最後感謝國立編譯館對我們編譯計劃的充分贊助，細心的審核與指正。

譯者：蕭欣忠、呂素齡等

淡江大學、數學研究所

# 作者序言

1972 夏季，我在自由堡（ Freiburg ）大學講授一系列有關平滑映射之局部理論的課程。這些講義構成了本書前面十三章的主體。至於接下去的三章則是在另外一次暑期班中所編寫而成的講義。我的許多學生們幫助我從原稿中刪除許多不妥當或錯誤的地方。而藍勒（L. Lander) 却把它加以英譯，改正一些地方並加入第十七章，就是有關古典基本劇變論裏所討論到的各種基本劇變模型。這個古典劇變論正是我們所以著手寫這本書的原始動機。

在本書裏我們並沒有提出任何新的結果或新的方法。我們這本書的主要目的是使得那些學過分析又對代數的最基本知識有些認識的學生能夠比較容易學會有關平滑映射的一些最晚近的研究理論，因此幫助他們瞭解有關劇變論的奧秘。

在下面所要談論處理的東西，簡單說來是這樣的：

考慮一個平滑映射；或即無窮次可微分的映射：

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k ,$$

取： $f^{-1}(0) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \}$

這點集可以解釋成一個非線性方程組的解。一般而言，關於這個點集我們能講些什麼呢？首先我們想到了斐特尼的一個定理以及沙特定理，分別記述於第 2.1 節以及第 3.3 節 。在這些定理裏面我們特別注意到了一件事；我們只能夠對於「一般性」的映射（ generic map ），談論他們的 $f^{-1}(0)$ 所具有的有趣構造，而無法對於任意映射得出什麼有意義的結果。

有一類特別重要的一般性映射就叫做穩定平滑映射。我們知道：

一個平滑映射 f 如果在任意微小的擾動：

$$\delta : R^n \longrightarrow R^k$$

之下，恒存在兩個可逆的平滑映射 $h_1$，$h_2$ 使得下圖可交換：

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"] & \mathbf{R}^k \arrow[d, "h_2"] \\ \mathbf{R}^n \arrow[r, "f+\delta"] & \mathbf{R}^k \end{tikzcd}$$

則稱 f 爲一個穩定的（stable）映射。這種穩定平滑映射之所以特別重要乃在於他們最適合於用來描述自然界中的形相，因爲在自然界中的任何事物與形相總是一直處於微小的擾動之中，因此必須具有穩定性才有可能留存下來。我們立即可以提出下列各種問題，是否幾乎所有的（almost all）映射都能具有穩定性？而穩定性的觀念又應該如何加以解釋？另外在微積分裏頭對於給定的一個可微胚：

$$f : (\mathbf{R}, 0) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0),$$

我們知道只要 f 在原點的泰勒展式非爲零，那麼就一定可以找到一個坐標轉換，使得在新坐標之下，f 可寫成原來泰勒展式中的第一個非零項。把這問題改成考慮高維的

$$f : (\mathbf{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0),$$

這時要在什麼樣的情況之下才能保證對於一個可微胚 f 一定可以找到一個適當的坐標轉換，使得 f 在新坐標之下可以寫成其原來泰勒展式中的有限部分？

這幾個問題將逐漸引出更多的問題，是本書所要仔細加以考慮的。我們盼望讀者於熟悉這些問題之後能從其中得窺董禮內教授的一些最深刻的思想，並能進而加入我們的行列，共同來澄清並瞭解董禮內的其他更豐富的思想寶藏。

# 目　　錄

# 第一章　秩爲常數之胚

參考文獻：

J. Dieudonné: Foundations of modern analysis. Academic Press (1966)。

## 1.1　映射與胚

設 $A$ 爲 $\boldsymbol{R}^n$ 中任意子集，考慮一個從 $A$ 到 $\boldsymbol{R}^k$ 的映射：

$$f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}^k$$

如果存在一個開子集 $U \subset \boldsymbol{R}^n$ 以及定義於 $U$ 上面的映射：

$$F : U \longrightarrow \boldsymbol{R}^k ,$$

滿足下列條件：

(1) $A \subset U$；　　(2) $F|A = f$；

(3) $F$ 在 $U$ 上任意高次之偏導式皆存在而且連續；則稱 $f$ 爲 $A$ 上之平滑映射或無窮次可微分映射。下面所要討論的映射大抵都是平滑映射。而且事實上我們主要想處理的是一個映射在每點之鄰域的局部性質。以後提到平滑映射或可微映射都表示同樣的東西。

任意固定 $A \subset \boldsymbol{R}^n$，$V \subset \boldsymbol{R}^k$，考慮從 $A$ 到 $V$ 的平滑映射。任取一點 $x \in A$，以及任意一個 $\boldsymbol{R}^n$ 中包含 $x$ 的開子集 $U$，則以 ( $U$，$f$ ) 表示一個映射：

$$f : U \cap A \longrightarrow V$$

容許 $U$，$f$ 任意變動，而以 $\mathfrak{F}$ 代表所有序對 ( pair) ( $U$，$f$ ) 的集合。

上面所考慮的 $\mathfrak{F}$ 中所出現的都是些平滑映射。其實我們完全同樣

也可以考慮要求所有的映射都是連續的映射，或者都是解析的（ analytic ）映射等等。

在$\mathfrak{F}$中引進如下的等價關係：任取$\mathfrak{F}$中之（$U_1, f_1$），（$U_2$，$f_2$），而定義（$U_1$，$f_1$）～（$U_2$，$f_2$）當且唯當：

存在開子集$U \subset \boldsymbol{R}^n$滿足如下的條件：

(1) $x \in U$； (2) $U \subset U_1 \cap U_2$； (3) $f_1 | U = f_2 | U$。

顯然這是一個等價關係，而其等價類（ equivalence class ）就稱爲在$x$點之胚（ a germ at $x$ ）。

特別（$U$，$f$）所屬之等價類常以

$$\tilde{f} : (A, x) \longrightarrow V$$

來表示。稱爲$A$上之映射$f$在$x$點之胚。

如果$\mathfrak{F}$中所考慮的映射都是連續映射，則所定義的胚就叫做連續胚。如果$\mathfrak{F}$中所考慮的映射都是平滑映射或即可微映射，則所定義的胚就叫做可微胚。如果$\mathfrak{F}$中所考慮的映射都是解析映射，則所定義的胚就叫做解析胚等等。事實上由於以後大抵都只考慮平滑映射，因此我們所考慮的胚都是可微胚。爲簡便起見，都簡稱爲胚。

注意當我們提到胚時，一定要指明到底是在那一點的胚。另方面要記得一個胚並不是一個映射，而是這映射所決定的等價類。但在實際使用之時，如果我們一直都考慮在某一固定點之胚，例如考慮在$\boldsymbol{R}^n$原點0之胚，則常常只單單提胚而不再提這一固定之點。另外有時我們故意混用符號，常常以同樣的符號$f$來表示映射$f$所決定的胚，而並不特別記之爲$\tilde{f}$。

任給$\boldsymbol{R}^n$中的子集，可以考慮此子集的特徵函數，其值或爲1或爲0，按一點是否落在此子集之中而決定。因此我們可以考慮這種特徵函數在某點之胚，而稱之爲$\boldsymbol{R}^n$中子集合之胚。

在胚之間我們也能引進合成的運算如下：
假設給定兩個映射 $f$ ，$g$ 爲：

$$R^n \xrightarrow{f} R^m \xrightarrow{g} R^k$$

而若 $f(x)=y$ ，則可考慮兩個胚 $\tilde{f}$ 及 $\tilde{g}$ ：

$$\tilde{f}:(R^n, x)\longrightarrow R^m; \quad \tilde{g}:(R^m, y)\longrightarrow R^k$$

並定義他們的合成 $\tilde{g}\circ\tilde{f}$ 爲：

$$\tilde{g}\circ\tilde{f}=\widetilde{g\circ f}:(R^n, x)\longrightarrow R^k$$

詳細說來，如果 $(U, f)$ 爲 $\tilde{f}$ 之代表，$(V, g)$ 爲 $\tilde{g}$ 之代表，則

$$f\,|\,f^{-1}(V):f^{-1}(V)\longrightarrow R^m$$

亦爲 $\tilde{f}$ 之代表。因此通常的合成映射 $g\circ f$ 就定義在 $f^{-1}(V)\subset U$ 之上。而就把 $\tilde{g}\circ\tilde{f}$ 定義爲由 $(f^{-1}(V), g\circ f)$ 所決定的等價類。顯然這定義與 $U$ , $V$ 之選取無關。

任意給定一個可微胚：

$$\tilde{f}:(R^n, x)\longrightarrow R^k$$

設 $f$ 爲 $\tilde{f}$ 的一個代表，則可以考慮 $f$ 在 $x$ 點的賈氏矩陣，就是把 $f$ 的所有一次偏導數寫成一個 $k\times n$ 的矩陣，而得出一個線性映射：

$$Df(x): R^n \longrightarrow R^k$$

由於隨便 $\tilde{f}$ 的兩個代表在 $x$ 點之某鄰域完全相等，因此他們在 $x$ 點的所有偏導數必定都相等，因此這個賈氏矩陣 $Df(x)$ 完全由 $\tilde{f}$ 所決定。

對於上述胚之間的合成運算而言，在 $x$ 點之胚 $\tilde{f}$ 具有逆胚 $\tilde{f}^{-1}$ 當且唯當 $\tilde{f}$ 之代表 $f$ 在 $x$ 點之充分小鄰域具有局部逆映射 $f^{-1}$ 。如果 $\tilde{f}$ 爲可微胚，則此充要條件更可換成如下的：

1.2 反函數定理：

可微胚 $\tilde{f}:(\boldsymbol{R}^n, x)\longrightarrow(\boldsymbol{R}^n, y)$ 具有逆胚：$\tilde{f}^{-1}:(\boldsymbol{R}^n, y)\longrightarrow(\boldsymbol{R}^n, x)$，當且唯當 $\tilde{f}$ 之賈氏矩陣 $Df(x)$ 爲非奇異（non-singular），此即 $det(Df(x))\neq 0$。

設 $U\subset\boldsymbol{R}^n$，考慮平滑映射 $f:U\longrightarrow\boldsymbol{R}^k$。則可考慮

$$Df:U\longrightarrow\boldsymbol{R}^{kn}:x\longrightarrow Df(x),$$

把 $U$ 中任意點 $x$ 指定到 $f$ 在此點的賈氏矩陣 $Df(x)$。因爲 $f$ 爲平滑映射，顯然 $Df$ 亦爲平滑映射。我們把 $Df(x)$ 這個 $k\times n$ 矩陣的秩（rank）稱爲 $f$ 在 $x$ 點的秩，以 $Rk_x f$ 表之。因此若 $Rk_x f\geq s$，則 $Df(x)$ 中存在一個（$s\times s$）的子矩陣，其行列式值不爲零。由於 $Df$ 以及行列式皆爲連續映射，因此這個 $s\times s$ 的子矩陣之行列式值在 $x$ 點附近皆不爲零。可見 $f$ 之秩在 $x$ 點附近恒大於或等於 $s$。換言之，$f$ 在 $x$ 點附近的秩數一定不小於 $f$ 在 $x$ 點之秩，因此函數：

$$Rkf:U\longrightarrow Z,\quad y\longrightarrow Rk_y f$$

是一個下半連續的（lower semi-continuous）函數。而 $Rkf$ 在 $x$ 點的胚自然就是一個下半連續胚：

$$\widetilde{Rkf}:(\boldsymbol{R}^n, x)\longrightarrow Z。$$

從反函數定理能證得下列重要的隱函定理或秩定理：

1.3 秩定理（或隱函數定理）：

假設 $\tilde{f}:(\boldsymbol{R}^n, x)\longrightarrow(\boldsymbol{R}^m, y)$ 是個秩爲常數的可微胚，意即 $\widetilde{Rkf}$ 爲常數函數之胚，則存在可逆胚：

$\tilde{\phi}:(\boldsymbol{R}^n, x)\longrightarrow(\boldsymbol{R}^n, 0)$ 以及 $\tilde{\psi}:(\boldsymbol{R}^m, y)\rightarrow$

$(\boldsymbol{R}^m, 0)$，使得可微胚 $\tilde{\psi}\circ\tilde{f}\circ\tilde{\phi}^{-1}:(\boldsymbol{R}^n, 0)\to(\boldsymbol{R}^m, 0)$ 具有如下簡單形狀的代表。對於任意 $(x_1, \cdots\cdots x_n)\in\boldsymbol{R}^n$，我們有：

$$\tilde{\psi}\circ\tilde{f}\circ\tilde{\phi}^{-1}(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_k, 0\cdots 0)\cdots(*)$$

其中 $k = Rk_x f$。

如果使用通常可微映射的講法而不使用可微胚的講法，則此定理說明如果可微映射 $f: U_1 \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ 定義於 $x$ 點之鄰域 $U_1$，而且在一個更小的鄰域 $U_2 \subset U_1$ 之上 $f$ 之秩爲常數，則可以找得到一個更小的鄰域 $U_3$，以及 $\boldsymbol{R}^m$，$\boldsymbol{R}^n$ 上適當的坐標系統，使得在 $U_3$ 上 $f$ 具有定理中(*)式簡單的形狀。

證明：不妨假設 $x = 0$，$y = 0$。設 $f$ 爲 $\tilde{f}$ 的代表而 $Rkf$ 爲常數。因此 $Df$ 中有一個 $k\times k$ 的子矩陣其行列式值不爲零。更換坐標之足碼我們不妨假設 $Df$ 中左上角之 $k\times k$ 子矩陣具有此性質。因此

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)1\le i, j\le k$$ 在原點附近皆不爲零。

取 $\tilde{\phi}:(\boldsymbol{R}^n, 0)\to(\boldsymbol{R}^n, 0):(x_1, \cdots, x_n)\to(f_1(x), \cdots\cdots, f_k(x), x_{k+1}, \cdots\cdots, x_n)$ 則有：

$$D_\phi = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} & 0 \\ \hline * & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\,k \\ \\ \}\,n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\quad}_{k} & \underbrace{\qquad\qquad}_{n-k} \end{array} & \end{array}$$

因此 $\det(D\phi)=\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq k}\neq 0$。可見 $\tilde{\phi}$ 爲可逆胚。現在由下面的圖示：

$$\begin{tikzcd}
(\boldsymbol{R}^n,0) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & (\boldsymbol{R}^m,0) \\
& (\boldsymbol{R}^n,0) \arrow[u, "g=f\circ\phi^{-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(x_1\cdots\cdots x_n) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "\phi"'] & (f_1,\cdots,f_m) \\
(f_1,\cdots f_k,x_{k+1},\cdots x_n) \arrow[ur, mapsto, "g"'] \arrow[d, equal] & \\
(z_1\cdots\cdots z_n) &
\end{tikzcd}$$

考慮可微胚 $\tilde{g}=\tilde{f}\circ\tilde{\phi}^{-1}$。它可以藉著下面的平滑映射來代表：

$$z=(z_1\cdots z_n)\overset{g}{\longmapsto}(z_1,\cdots,z_k,g_{k+1}(z),\cdots,g_m(z)),$$

這時有：

$$Dg=\begin{array}{c}\overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{k}\ \overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{n-k}\\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & * \\ \hline 0 & A(z)\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\}\,k\\ \}\,n-k\end{array}$$

其中：

$$A(z)=\left(\frac{\partial g_j}{\partial z_i}\right)_{k+1\leq j\leq m,\ k+1\leq i\leq n}$$

但是在原點附近應有 $Rk\,g=Rk(Dg)=k$，可見在原點之充分小鄰

域矩陣$A(z)$必須恒爲零。換言之，所有$A(z)$中之項皆需爲零。因此得到條件：

$$\text{(I)}\qquad \frac{\partial g_j}{\partial x_i}=0 \quad \forall \quad k+1\le j\le m\,,\ k+1\le i\le n$$

定義可微胚 $\tilde{\psi}:(\boldsymbol{R}^m,0)\longrightarrow(\boldsymbol{R}^m,0)$ 如下：

$\tilde{\psi}(y_1\cdots\cdots y_m)\mapsto(y_1,\cdots,y_k,y_{k+1}-g_{k+1}(y_1\cdots y_k,0\cdots 0),\cdots,y_m-g_m(y_1\cdots y_k\,0\cdots 0))$ 則由(I)式之條件立即可計算$D\psi$並證明$\det(D\psi)=1$，由此$\tilde{\psi}$是個可逆胚。而$\tilde{\psi}\circ\tilde{g}$之代表爲如下之映射：

$$\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_k\\ z_{k+1}\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\overset{g}{\longmapsto}\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_k\\ g_{k+1}(z)\\ \vdots\\ g_m(z)\end{pmatrix}\overset{\psi}{\longrightarrow}\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_k\\ g_{k+1}(z)-g_{k+1}(z_1\cdots z_k,0\cdots 0)\\ \vdots\\ g_m(z)-g_m(z_1\cdots z_k,0\cdots 0)\end{pmatrix}$$

但是(I)式之條件表明在原點附近之鄰域我們有：

$$g_{k+j}(z_1\cdots z_k\ z_{k+1}\cdots z_n)=g_{k+j}(z_1\cdots z_k\ 0\cdots\cdots 0)$$

可見：

$$\psi\circ g(z_1\cdots\cdots z_n)=(z_1\cdots\cdots z_k\,,\,0\cdots\cdots 0)\,。$$ ※

## 1.4 應用：

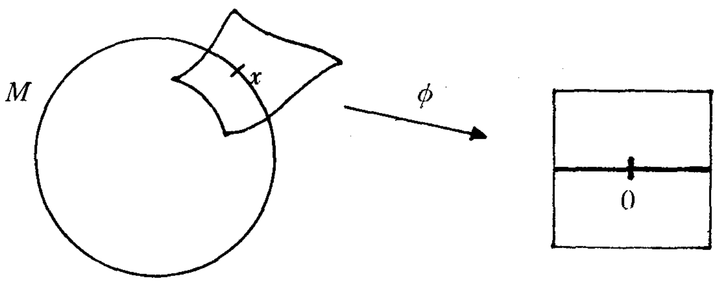
設$U\subset\boldsymbol{R}^n$ 爲開子集而 $f:U\longrightarrow\boldsymbol{R}^k$ 爲平滑映射。如果$Rk_xf=k$

$\forall x\in U$，則稱 $f$ 爲淹射（ submersion ），如果 $Rk_x f=n$，$\forall x\in U$，則稱 $f$ 爲潛射（ immersion ）。由上定理一個淹射必有代表形狀爲（ $x_1\cdots\cdots x_n$ ） $\mapsto$（ $x_1\cdots\cdots x_k$ ）。而一個潛射必有代表形狀爲 （ $x_1\cdots\cdots x_n$ ） $\mapsto$（ $x_1\cdots\cdots x_n$ ，$0\cdots\cdots 0$ ）。

我們總是可以選取適當的坐標系統而把淹射或潛射寫成這麼簡單的形狀。注意這時儘管我們沒有假設其秩爲常數，但是 $k$ 或 $n$ 已是最大的可能數值，因此由 $Rk\,f$ 之下半連續性得知此時之秩必定爲常數。

## 1.5 定義：

$M\subset \boldsymbol{R}^n$ 如果滿足下列條件：對於任意 $x\in M$，總存在一個可逆胚：




$\tilde{\phi}$：（$\boldsymbol{R}^n$，$x$）$\to$（$\boldsymbol{R}^n$，0），使得 $\tilde{\phi}$（$M$，$x$）＝（$\boldsymbol{R}^m$，0 ），其中（ $\boldsymbol{R}^m$，0）爲（ $\boldsymbol{R}^n$ ，0 ）中某（ $n-m$ ）個坐標皆爲零而得之子空間。則稱 $M$ 爲 $\boldsymbol{R}^n$ 中一個維數爲 $m\leq n$ 之子流型（ submanifold ）。

## 1.6 實例：

在上圖中我們取 $M=S^n=\{x\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid |x|=1\}$ 爲 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的單位球面，它顯然符合上述 $n$ 維子流型之定義條件，而爲 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中