高等学校数学系列教材

小波分析

樊启斌 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校数学系列教材

小波分析

樊启斌 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

小波分析/樊启斌编著.—武汉:武汉大学出版社,2008.10
高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-06584-0

Ⅰ.小… Ⅱ.樊… Ⅲ.小波分析—高等学校—教材 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 158022 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:詹锦玲

出版发行:武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉中科兴业印务有限公司
开本:720×1000　1/16　印张:24.5　字数:438 千字　插页:1
版次:2008 年 10 月第 1 版　2008 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-06584-0/O·396　定价:34.00 元

前　　言

本书是为应用数学、信息与计算科学、应用物理、信号与图像处理、计算机软件及其应用等专业的高年级本科生、硕士研究生学习“小波分析”而编写的，它源于编者多年来在武汉大学讲授小波分析时所使用的讲义，在这次正式出版之前再次进行了认真的修订.

本书系统地阐述了小波分析的基础理论及其典型应用，全书共九章，大体可分为四个部分：

(1) 预备知识. 第 1 章是全书所需要的预备知识，主要包括赋范线性空间、线性算子、Hilbert 空间、Riesz 基与标准正交基、正交投影算子、Fourier 变换、Fourier 级数、Gibbs 现象等基本概念，同时也不加证明地罗列了一些重要结论，并提供了丰富的例子. 熟悉泛函分析与 Fourier 分析的读者当然可以跳过这一章.

(2) 基本内容. 这部分包括第 2、3、4 章与第 6 章的第 1、2 节，系统阐述了小波分析基础、多分辨率分析、尺度函数与小波，以及紧支正交小波的基本概念、理论和方法，介绍了信号的多尺度逼近和小波变换的 Mallat 快速算法，给出了 Haar 小波、Marr 小波、线性样条小波、Shannon 小波、Franklin 小波、Meyer 小波、Battle-Lemarié 小波族、Daubechies 小波、Coiflet 小波等典型例子.

(3) 提高部分. 这部分包括第 5 章、第 6 章的第 3～5 节、第 7 章，主要论述几种要求比正交性条件更宽泛的小波，本书统称为非正交小波，包括二进小波、双正交小波、半正交小波、小波框架等；论述提升格式的频域表示与多相位结构、双正交小波的提升构造、整数小波变换、正交小波包、多重多分辨率分析与正交多小波、预处理与平衡多小波等.

(4) 典型应用. 第 8 章介绍了小波分析的几种主要应用，包括连续小波变换的应用举例，信号的奇异性检测、小波阈值去噪、Besov 空间小波图像去噪、嵌入式图像压缩编码等. 第 9 章是小波在科学计算中的应用，主要是以 BCR 快速算法为例介绍算子的稀疏逼近与偏微分方程的小波数值解法.

本书的主要特点可概括为“一个强调、二个适度、三种方法”.

(1) 小波分析是数学与应用数学领域近三十年来迅速发展的一个新分支，在理论和应用方面都取得了令人瞩目的成就. 因此，本书在阐述小波的基本概念、基本理论与基本方法时始终强调其数学思想与物理（或工程）背景，力图使读者不仅懂得如何做而且知道为什么这样做.

(2) 适度地阐述小波基本理论和适度地介绍小波典型应用是编写本书的另一个指导思想. 本书（第 2～7 章）只能说是覆盖了小波的基本理论，至于更多更深刻的理论当然尚有待于读者将来通过进一步学习与研究来掌握. 迄今，小波已广泛应用于数值分析、算子理论、信号处理、图像压缩、模式识别、量子物理、故障诊断等众多领域，本书（第 8、9 章）仅仅介绍了其中很少的几个方面，既很典型也很基本，不同学科背景的读者想必都能以此为切入点开展更深入的应用研究或者用于解决实际问题.

(3) 本书的另一个特点是重点突出了三种典型方法：① 时频转化. 小波分析是在 Fourier 分析的基础上发展起来的，函数或信号的许多时域上的性质转化为频域上的特征来研究则更容易或更本质化. ② 周期化方法. 把无穷区间上的积分处理成一个周期函数在有限区间例如 $[0,2\pi]$ 上的积分，使之容易与 Fourier 级数联系起来. 这种方法也体现了 Fourier 分析的特点. ③ 奇偶拆项法. 在讨论与小波滤波器有关的问题时往往使用这一方法. 可以说，只要掌握了这三种方法，就获得了打开小波理论之门的钥匙，就可以顺利地踏上愉快的小波之旅.

需要特别指出的是，本书中有些命题尤其是在频域上的等式，本应该是“几乎处处”成立的，考虑到非数学专业的读者一般不具备实分析知识，我们略去了“几乎处处”使之成为了恒等式. 从经验来看，这对从数学理论上严谨理解上述的相应结论基本不受什么影响. 恕不在正文中就此一一说明了.

本书是武汉大学“十一五”规划教材.

本书在编写过程中查阅和参考了国内外关于小波的大量书籍与期刊杂志及网上资料，在此谨向所有相关文献的专家学者一并表示衷心的感谢.

限于编者的水平，教材中错漏不当之处在所难免，恳请读者批评指正.

编 者

2008 年 7 月 15 日于珞珈山麓

目　录

第一章　预 备 知 识

本章是小波分析(Wavelet Analysis) 的理论基础，主要罗列泛函分析与 Fourier 分析的有关基本概念、基本理论和基本方法，这些知识是学习本书后续各章节的基础知识.

1.1　赋范线性空间

赋范线性空间的理论尤其是 Banach 空间的理论，以及定义在这类空间上的线性算子理论，是泛函分析中最基本也是最完善的理论，为研究现代数学与物理中遇到的大量线性问题或非线性问题提供了有效的工具和方法.

1.1.1　赋范线性空间与 Banach 空间

定义 1.1　设 X 是一个非空集合，K 是复(或实) 数域，在 X 的元素之间定义了加法运算和数乘运算，并且满足以下 8 条运算规律：$\forall x,y,z \in X$ 及 $\forall \lambda,\mu \in K$，有

(a)　$x+y=y+x$;

(b)　$(x+y)+z=x+(y+z)$;

(c)　存在零元素 θ，$x+\theta=x$;

(d)　存在 x 的负元素 $-x$，$x+(-x)=\theta$;

(e)　$1\cdot x=x$;

(f)　$(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$;

(g)　$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

(h)　$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

则称集合 X 为**复(或实) 线性空间**.

线性空间的元素又称为**向量**，因此线性空间又称为**向量空间**.

例 1.1　所有 $m\times n$ 实矩阵全体，按通常的矩阵加法和数乘运算构成一个实线性空间，记为 $M_{m\times n}(\mathbf{R})$. 当 $m=n$ 时，记为 $M_n(\mathbf{R})$.

例 1.2 区间$[a,b]$上连续函数全体，按通常的函数加法和数乘运算构成一个实线性空间，记为$C[a,b]$.

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是线性空间X中的元素，由$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性组合的全体构成的集合

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j \,\middle|\, \lambda_j \in K,\ j=1,2,\cdots,n\right\}$$

称为由$x_1,x_2,\cdots,x_n$ **生成的线性子空间**，记为$\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

例如，三维向量空间$\mathbf{R}^3$中，令$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，则$\mathrm{span}\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$就是$\mathbf{R}^3$，而$\mathrm{span}\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$就是$xOy$平面上的向量全体.

设X,Y都是数域K上的线性空间，则

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$$

也是数域K上的线性空间，称之为X与Y的**乘积空间**. 特别当$X=Y$时，

$$X\times X=X^2=\{(x,y)\mid x,y\in X\}.$$

如$\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$为实数全体，而$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$是二维实向量全体，$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n个}$是$n$维实向量全体.

定义 1.2 设X是一个线性空间，Y是一个复(或实)数集，f是从X到Y的一个映射，即$f\colon X\to Y$，则称f为一个**泛函**.

例 1.3 设X表示线性空间$C[a,b]$，在X中取定一个$y(t)$，定义映射

$$f(x(t))=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,\quad \forall x(t)\in X, \tag{1.1}$$

则f就是由X到$\mathbf{R}$的一个泛函.

例 1.4 设X表示线性空间$M_n(\mathbf{R})$，定义映射

$$f(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}),\quad \forall \boldsymbol{A}\in X, \tag{1.2}$$

其中$\det(\boldsymbol{A})$表示$\boldsymbol{A}$的行列式，则f是由X到实数域$\mathbf{R}$的一个泛函.

定义 1.3 设K是复(或实)数域，X是K上的一个线性空间，f是X上的一个泛函，记为$f(x)=\|x\|$，如果$\|\cdot\|$满足下列三个条件(称为范数公理)：$\forall x,y\in X$及$\forall\lambda\in K$，有

(1) $\|x\|\geqslant 0$，且$\|x\|=0$当且仅当$x=\theta$;

(2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$;

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,

则称这个泛函$f=\|\cdot\|$为X上的一个**范数**. 定义了范数的线性空间称为**赋范线性空间**.

范数是数的绝对值概念的一种推广. 数的绝对值显然满足范数公理，所

以绝对值也可以看做一种范数.

例 1.5 对于 n 维实向量全体 $\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，定义范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 按这个范数 $\|\cdot\|_2$ 构成一个赋范线性空间.

例 1.6 在线性空间 $C[a,b]$ 中，定义范数

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t,\quad \forall f(t)\in C[a,b], \tag{1.4}$$

则 $C[a,b]$ 按这个范数 $\|\cdot\|_1$ 构成一个赋范线性空间.

如果在 $C[a,b]$ 上定义另外一种范数

$$\|f\|_\infty=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|,$$

那么 $C[a,b]$ 按这一范数 $\|\cdot\|_\infty$ 构成另外一个赋范线性空间.

例 1.7 考虑区间$[a,b]$上 p 方 Lebesgue 可积函数全体

$$\left\{f(t)\,\middle|\,\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t<+\infty\right\}, \tag{1.5}$$

把几乎处处相等的函数视为同一个函数，记为 $L^p[a,b]$，在其上定义范数

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.6}$$

则 $L^p[a,b]$ 构成一个赋范线性空间.

在$(-\infty,+\infty)$上的 p 方 Lebesgue 可积函数全体记为 $L^p(\mathbf{R})$，在其上定义范数

$$\|f\|_p=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.7}$$

则 $L^p(\mathbf{R})$ 构成一个赋范线性空间. 特别，当 $p=2$ 时，$L^2(\mathbf{R})$ 是小波分析中使用最多的一种赋范线性空间.

在不必区分 $L^p[a,b]$ 还是 $L^p(\mathbf{R})$ 时，就统一用 L^p 表示.

定理 1.1 赋范线性空间 L^p 中的三个重要不等式：

(1) **Hölder 不等式** 设 $p>1$，$q>1$，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$f(t)\in L^p$，$g(t)\in L^q$，则 $f(t)g(t)\in L^1$，且有

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q. \tag{1.8}$$

(2) **Schwarz 不等式** 在 Hölder 不等式(1.8)中取 $p=q=2$，则有

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_2\|g\|_2. \tag{1.9}$$

(3) **Minkowski 不等式** 设 $p\geqslant1$，$f(t),g(t)\in L^p$，则 $f(t)+g(t)\in$

L^p，且

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.10}$$

例 1.8 记 $\boldsymbol{x}=\{x_k\}$ 是一个数列，对于 $p \geqslant 1$，记

$$l^p = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty \right\}, \tag{1.11}$$

在 l^p 上定义范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in l^p, \tag{1.12}$$

则 l^p 构成一个赋范线性空间，称为 **p 方可和序列空间**. 在 l^p 空间中，也有 Hölder 不等式、Schwarz 不等式以及 Minkowski 不等式.

需要指出的是，尽管 $L^p[a,b]$，$L^p(\mathbf{R})$ 与 l^p 这 3 个空间中范数的定义 (1.6)，(1.7) 及(1.12) 式是各不相同的，但我们采用了同一个记号 $\|\cdot\|_p$ 来表示这些范数，这在具体应用时根据上下文是完全能够分辨清楚的.

定义 1.4 设$\{x_n\}$是赋范线性空间 X 中的点列，如果存在一个 $x \in X$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$，则称**点列$\{x_n\}$依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于** x.

今后如无特别说明，对于赋范线性空间中的收敛都是指依范数收敛.

定义 1.5 设$\{x_n\}$是赋范线性空间中的点列，如果 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，使当 $m,n > N$ 时，$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$，则称$\{x_n\}$是一个**基本点列**，又称为 **Cauchy 点列**.

如果 X 中的每一个基本点列都收敛于 X 中的元素，则称 X 是**完备的**. 完备的赋范线性空间称为 **Banach 空间**.

例如，L^p 和 l^p 都是 Banach 空间.

又如，$C[a,b]$ 关于范数 $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t)|$ 是 Banach 空间，但关于范数 $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ 不是 Banach 空间.

例 1.9 证明：$C[0,1]$ 关于范数 $\|\cdot\|_1$ 不是 Banach 空间.

证 考虑如下函数列：

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1 - 2n\left(t - \dfrac{1}{2}\right), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

显然，$f_n(t)$ 是区间$[0,1]$上的连续函数($n \geqslant 1$)，且

$$\|f_n - f_m\|_1^2 \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0, \quad \text{当 } m,n \to +\infty \text{ 时},$$

所以$\{f_n(t),\ n \geqslant 1\}$是$C[0,1]$中的一个 Cauchy 点列.

容易证明，$\forall t \in [0,1]$，函数列$f_n(t)$收敛于函数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

但$f(t) \notin C[0,1]$. 这就表明，$\{f_n(t),\ n \geqslant 1\}$在$C[0,1]$中不收敛，因此$C[0,1]$不是 Banach 空间.

我们知道，对于n维向量空间$\mathbf{R}^n$，存在n个线性无关的向量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，使得$\mathbf{R}^n$中的任一向量$\boldsymbol{x}$可以唯一地表示为这$n$个向量的线性组合，即这$n$个线性无关的向量构成$\mathbf{R}^n$的一个基，$\mathbf{R}^n$等于由这个基生成的子空间，即

$$\mathbf{R}^n = \mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\},$$

$\mathbf{R}^n$中的基不是唯一的，其中任何n个线性无关的向量都可以作为基. 现在把基和线性无关的概念推广到无限维空间.

定义 1.6 设$E = \{\varphi_k,\ k \geqslant 1\}$是 Banach 空间$X$中的一个点列，如果$\forall x \in X$，存在唯一的数列$\{c_k\} \in l^2$，使得在依范数收敛的意义下

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k, \tag{1.13}$$

则称E是X的一个 **Schauder 基**，其中c_k称为x关于这个 Schauder 基的**第k个坐标**. 进一步，若$\forall x \in X$，级数(1.13)无条件收敛(即与项的排列次序无关)，则称E是X的一个**无条件基**.

无限维的Banach空间不一定存在无条件基，即使存在无条件基$\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{N}\}$，$\{\varphi_k\}$的生成子空间$\mathrm{span}\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{N}\}$也不一定就是这个Banach空间. 这与有限维空间是很不相同的，因为在无限维空间中还涉及收敛点列的极限点.

一个集合S加上它的所有的极限点后得到的集合，称为S的**闭包**，记为$\overline{S}$. 点列$\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{N}\}$的所有的线性组合构成的集合的闭包记为

$$\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k,\ k \in \mathbf{N}\}.$$

定义 1.7 设$E = \{\varphi_k,\ k \geqslant 1\}$是 Banach 空间$X$中的一个点列.

(1) 若E的任一有限子集是线性无关的，则称E是**线性无关的**.

(2) 若$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k$收敛于 0 蕴含$c_k = 0\ (\forall k \in \mathbf{N})$，则称$E$是$\omega$- **无关的**.

(3) 若 $\forall k \in \mathbf{N}$, $\varphi_k \notin \overline{\text{span}}\{\varphi_n, n \in \mathbf{N}, n \neq k\}$，则称 E 是**极小的**.

定理1.2 设 $E=\{\varphi_k, k \geqslant 1\}$ 是 Banach 空间 X 中的一个点列.

(1) 若 E 是 X 的 Schauder 基，则 E 是 X 中的极小点列，且

$$\overline{\text{span}}\{\varphi_k, k \in \mathbf{N}\} = X.$$

(2) 若 E 是 X 中的极小点列，则 E 是 X 的一个 ω- 无关点列.

(3) 若 E 是 X 中的 ω- 无关点列，则 E 在 X 中是线性无关的.

1.1.2 线性算子与线性泛函

定义 1.8 设 X,Y 是实数或复数域 K 上的赋范线性空间，$T: X \to Y$ 是一个映射.

(1) 若 $\forall x_1, x_2 \in X$ 及 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$，有

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2),$$

则称 T 是一个**线性算子**. 若 T 的值域 $\text{Im}(T) \subseteq K$，则称 T 是 X 上的**线性泛函**.

(2) 若存在正数 M，使得

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|, \quad \forall x \in X,$$

则称 T 是**有界算子**. 若 T 又是线性算子，则称 T 是**有界线性算子**.

(3) 若 $\forall x_n, x \in X$，当 $x_n \to x$ 时，有 $Tx_n \to Tx$，则称 T 是**连续算子**.

(4) 若 T 的值域 $\text{Im}(T) = Y$，且 T 是一一映射，则称 T 是**可逆算子**.

(5) 若对于 X 中的任一有界点列 $\{x_n\}$，点列 $\{Tx_n\}$ 包含一个收敛子点列，则称 T 是**紧算子或全连续算子**.

顺便指出，对于线性算子，只需 X,Y 是线性空间即可.

例 1.10 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$，矩阵 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}(\mathbf{R})$，则线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 的一个线性算子.

例 1.11 设 $k \in \mathbf{Z}^+$，区间$[a,b]$上具有 k 阶连续导数的实函数全体按通常的函数加法和数乘运算构成一个实线性空间，记为 $C^k[a,b]$. 定义映射

$$(\mathrm{D}f)(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = g(t), \quad \forall f(t) \in C^k[a,b],$$

则 $g(t) \in C^{k-1}[a,b]$，D是由 $C^k[a,b]$ 到 $C^{k-1}[a,b]$ 的一个线性算子. 我们把这一线性算子称为**微分算子**.

例 1.12 在赋范线性空间 $C[a,b]$ 上定义映射

$$(T_1 x)(t) = \int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t \in [a,b],$$