顾正明 编著

立体几何方法

LITI JIHE FANGFA

上海科技教育出版社

立体几何方法

顾正明　编著

上海科技教育出版社

(沪)新登字116号

立体几何方法

顾正明 编著

上海科技教育出版社出版发行
(上海冠生园路393号)
各地新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 11.625 字数 230,000
1993年8月第1版 1993年8月第1次印刷
印数 1—3,400

ISBN 7-5428-0707-2

O·6

定价：5.90元

前　言

立体几何难教难学是中学师生的共识，其原因是要学生完成形象思维从二维空间到三维空间的飞跃，克服在学习平面几何时所引起的定向思维。要解决这一难点的一个有效方法，即是把问题分类，找出一套解题方法，在解题实践中克服难点。

本书是以解题方法为主线，在分类论述的同时，也考虑到教材的系统性，这样编排的目的是：

(1) 由于教材中的“直线与平面”一章是整个立体几何的基础，因此有必要用较多篇幅来论述，以求讲透讲深。

(2) 就问题进行分类的编排形式能起到按图索骥的功效。例如，问题若是证明直线与平面垂直，即可在本书第一章§2 直线与平面位置关系的判定一节中的直线垂直平面的判定中找出五种证明方法，以获解答。

(3) 本书的《知识提要》是把教材中的有关内容进行归纳；《方法提要》是解决问题的几个主要方法、途径的归纳；《例题》是就《方法提要》中所述内容，逐一说明方法的具体应用与技巧，以求理解透彻、灵活运用；《练习》是供读者选择运用，巩固所述方法、探索由此而启发的新方法。

由于编者水平有限，方法的归纳会有挂一漏万之弊，还请各位读者指正。

本书由崇安俊老师审阅，龚国骧老师绘图，费明捷、沈璞老师对习题作了解答，在此一并致谢。

编　者

目　录

第一章　直线、平面位置关系的判定

§1　直线与直线位置关系的判定

空间两直线的位置关系

1. 从两直线是否共面角度分析，有

(1) 两直线在同一平面内——两直线相交 / 两直线平行

(2) 两直线不能在同一平面内——两直线异面

2. 从两直线是否平行角度分析，有

(1) 两直线平行

(2) 两直线不平行——两直线相交 / 两直线异面

3. 从两直线是否相交(即有否公共点)角度分析，有

(1) 两直线相交

(2) 两直线不相交——两直线平行 / 两直线异面

总之，空间两直线有且仅有三种位置关系：相交、平行、异面。

一、异面直线的判定

【知识提要】

1. 异面直线的定义：不同在任何一个平面内的两条直线称为异面直线。

2. 异面直线的性质：既不相交又不平行.

【方法提要】

异面直线的判定方法：

1. 证明如果这两条直线在同一平面内，那末就会推出矛盾（即反证法）.

2. 证明这两条直线既不平行，又不相交.

【例题剖析】

例1 如图 1.1.1，直线 a 和平面 α 交于点 A，直线 b 在平面 α 内，且点 A 不在直线 b 上. 求证：a 和 b 是异面直线.

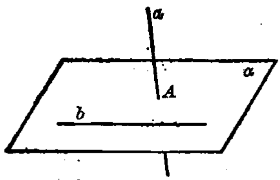

图 1.1.1

[证明] 用反证法. 设直线 a 和 b 在同一平面 β 内，由于 A 在直线 a 上，所以平面 β 过直线 b 和点 A.

因为点 A 不在直线 b 上，过直线 b 和点 A 只能有一个平面，又平面 α 也过直线 b 和点 A，所以平面 α 和 β 重合. 于是，a 也在平面 α 内.

这与已知 a 与平面 α 相交（只有一个公共点）矛盾，

$\therefore$ a 和 b 是异面直线.

[说明] (1) 本例是两条异面直线的常用直观图的理论根据之一.

(2) 反证法的基本步骤是：

① 反设：即假设结论的“反面”成立；

② 归谬：即从反设与题设出发，进行正确推理，推出与题设或公理、或定理、或定义、或所设前提相矛盾；

③ 结论：即推翻反设，得出“正面”结论成立.

(3) 运用本例结论，可以迅速统计空间图形中异面直线

的数量.

例 2 如图 1.1.2, 正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,

(1) 与对角线 AC_1 成异面直线的棱有____条;

(2) 与棱 AB 成异面直线的棱有____条;

(3) 互成异面直线的棱有____对.

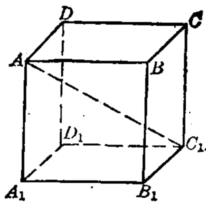

图 1.1.2

[解] (1) 与对角线 AC_1 相交的棱有 AB、AA_1、AD、C_1B_1、C_1C、C_1D_1, 因为没有与 AC_1 平行的棱, 所以其余 6 条棱都与 AC_1 成异面直线.

(2) 与棱 AB 成异面直线的棱有 A_1D_1、B_1C_1 与 DD_1、CC_1 共 4 条.

(3) 由第(2)题结论得: 与每一条棱成异面直线的棱有 4 条, 但由于 a 与 b 和 b 与 a 只能算一对异面直线, 所以应有 $\frac{12\times 4}{2}=24$ 对异面直线.

[说明] 统计异面直线的数量与判定(即证明)异面直线不同. 这里只需运用例 1 的结论直接从与棱 AB 所在平面 $ABCD$ 相交的 4 条棱 AA_1、BB_1、CC_1、DD_1 中找出 2 条 CC_1、DD_1(与 AB 不相交), 再从与棱 AB 另一所在平面 ABB_1A_1 相交的 4 条棱 AD、BC、B_1C_1、A_1D_1 中找出另两条 B_1C_1、A_1D_1(与 AB 不相交)即可. 如第(2)题解法.

也可以运用排除法思想排除与棱 AB 相交的 4 条棱, 与棱 AB 平行的 3 条棱, 以及 AB 自身一条. 这样, 剩下 4 条就与 AB 既不相交又不平行, 即是所求异面直线了.

例 3 已知 A、B、C、D 是空间四点, AB、CD 是异面直线.

求证: AD 与 BC、AC 与 BD 各是异面直线.

[证明] 用反证法. 设 AD 与 BC 不是异面直线, 则 AD 与 BC 在同一平面内, 即 A、D、B、C 四点在同一平面内. 所以直线 AB 和 CD 在同一平面内. 这与题设 AB 与 CD 是异面直线矛盾. 因此 AD 和 BC 是异面直线.

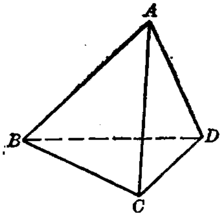

图 1.1.3

同理可得, AC 与 BD 亦是异面直线.

[说明] 本例也可改成"在成异面直线的两直线 a、b 上各取两点 A、$B\in a$, 和 C、$D\in b$, 则 AD 与 BC 和 AC 与 BD 分别成异面直线".

例 4 已知直线 a 与 b 是异面直线, 直线 $c\parallel a$, 且 c 与 b 不相交. 求证: c 与 b 是异面直线.

[分析] 用反证法. 从假设 c 与 b 共面出发, 分析已知条件中的三句话, 容易选定"c 与 b 不相交"这句话作为突破口, 从而推出 $c\parallel b$, 引出矛盾来.

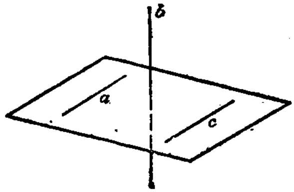

图 1.1.4

[证明] 设 c 与 b 共面, $\because c$ 与 b 不相交, $\therefore c\parallel b$. 又 $\because c\parallel a$, $\therefore a\parallel b$. 即 a、b 共面, 这与题设 a 与 b 是异面直线相矛盾, 所以 c 与 b 是异面直线.

[说明] 本例结论表明成异面直线的两直线在各自的平行移动中, 只要保持没有公共点这一本质属性, 两直线仍将是异面直线.

例 5 如图 1.1.5, 直线 b 在平面 β 内, 直线 a 与 b 不平行, 且 a 与 β 没有公共点. 求证: a 与 b 是异面直线.

［分析］ 因为 a 与 b 不平行，所以欲证 a、b 是异面直线，只要证得 a 与 b 不相交即可．

［证明］ 因为直线 b 在平面 β 内，又直线 a 与平面 β 没有公共点，所以直线 b 与 a 也没有公共点．再因为直线 a 与 b 不平行，所以 a 与 b 是异面直线．

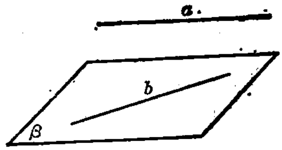

图 1.1.5

［说明］ (1) 本例已知条件中直线 a 与平面 β 没有公共点，即表明直线 a // 平面 β．

(2) 本例提供了空间作图中画出两异面直线的又一常用画法．

例 6 选择题(仅有一个选择支正确)

空间三条直线 a、b、c 中，如果 a 与 b 是异面直线，b 与 c 也是异面直线，那末 a 与 c 的位置关系不是(　　)．

(*A*) 异面直线；　(*B*) 平行直线；　(*C*) 相交直线；

(*D*) 以上都不是．

［解］ 利用例 4 结论，如图 1.1.6 (1)，可排除(*B*)；

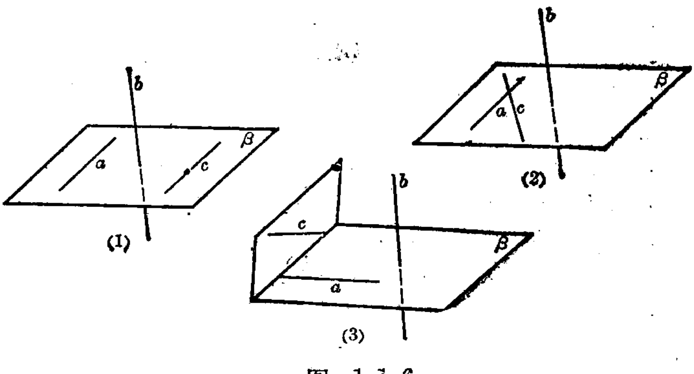

图 1.1.6

如图 1.1.6(2)，可排除(C)；

利用例 1、例 5 的结论，如图 1.1.6(3)，可排除(A)。

事实上，如图 1.1.6(1)、(2)、(3)，a 与 c 的位置关系可以是平行直线、相交直线，也可以是异面直线。即应选(D)。

[说明] (1) 如果 a 与 b 是异面直线，b 与 c 是异面直线，则 a 与 c 不一定是异面直线。换句话说，异面直线没有"传递性"，这一点与平行直线不同。

(2) 本例采用的选择题解法是排除法。它是常用的选择题解法之一。

(3) 若用 A 表示"A 成立"，$\overline{A}$ 表示"A 不成立"，则"以上都不是"可表示成 $D=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$，"不是以上都不是"可表示成 $\overline{D}=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}}=A\cup B\cup C$，即或是 A 或是 B 或是 C 成立。读者可利用"文氏图"帮助理解"不是'都不是'"的含义。

练 习 1.1

一、是非题(判断下列命题的真假，若真则说明理由，若假则举一反例)

1. 分别在两个平面内的直线是异面直线。
2. 若 $a\cap b=\phi$，则 a、b 是异面直线。
3. a、b 均与平面 α 相交，且不平行，则 a、b 是异面直线。
4. 空间三条直线 a、b、c，其中 a、b 是异面直线，$c\parallel a$，则 c、b 必是异面直线。
5. 和异面直线都相交的两条直线，必是异面直线。
6. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是边 AB、CD 上的点(不是端点)，则 EF 与 AC 是异面直线。

二、选择题(有且仅有一个答案正确)

1. 一条直线和两条异面直线中的一条平行，则它和另一条的位置关系是 (　　)

(A) 平行；　(B) 相交；　(C) 异面；　(D) 相交或异面。

2. 若空间两条直线互相垂直，则它们　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) 一定相交；　　(B) 是异面直线；　　(C) 是共面直线；

(D) 一定不平行.

3. 设 a、b、c 是空间三条直线，$a /\!/ b$，c 与 a 相交，则 c 与 b 的位置关系一定是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) 共面直线；　　(B) 相交直线；　　(C) 异面直线；

(D) 位置关系不确定.

4. 长方体的一条对角线与长方体的棱可组成多少对异面直线　　　（　　）

(A) 2 对；　　(B) 3 对；　　(C) 6 对；　　(D) 12 对.

5. 如图1.1.7，在空间四边形 $ABCD$ 中，G、$E \in BC$，H、$F \in AD$，图中共有几对异面直线　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) 5 对；　　(B) 6 对；

(C) 8 对；　　(D) 9 对.

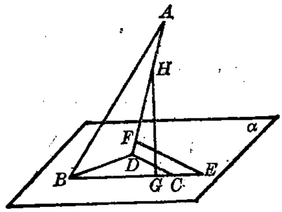

图 1.1.7

6. 两条直线异面，是两条直线不平行的　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) 充分非必要条件；

(B) 必要非充分条件；　　(C) 充要条件；

(D) 既非充分又非必要条件.

三、填空题

1. 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，

(1) 与 AC 成异面直线的棱有______条；

(2) 若 E 是 BC 的中点，则与 AE 成异面直线的棱有______条.

2. 两直线没有公共点，则它们的位置关系是________________.

四、试证：在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，AB_1 与 BC_1 成异面直线.

五、两个相交平面 α 和 β，过它们交线上两个点 A 和 B，在平面 α 内作直线 AC，在平面 β 内作直线 BD，且 AC、BD 都不与交线重合，求证：AC 和 BD 是异面直线.

六、如图1.1.8，平面 α 与 β 相交于 c，$a \subset \alpha$，$b \subset \beta$，$a \cap c = A$，$b /\!/ c$.

求证：a、b 是异面直线.

七、求证和两条异面直线都相交，且交点相异的两条直线是异面直线(参见图 1.1.9).

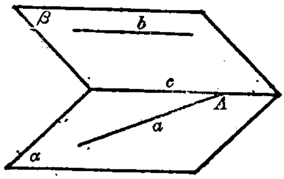

图 1.1.8

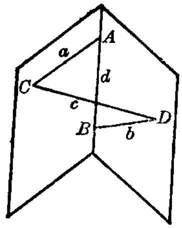

图 1.1.9

八、三个平面两两相交，在它们的三条交线中，有没有两条是异面直线？为什么？

九、已知两条异面直线 a、b，以及 a、b 外一点 c，过点 c 和直线 a、b 分别作两个平面 α 和 β，α 与 β 的交线为 PQ，那么直线 a、b 和 PQ 的位置关系怎样？

二、平行直线的判定

【知识提要】

1．公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

2．直线和平面平行的性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

3．直线和平面垂直的性质定理：如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

4．两个平面平行的性质定理：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

【方法提要】

判定两直线平行的方法：

1．证明这两条直线上分别有两条线段是一个平行四边

形的对边.

2．证明这两条直线分别与第三条直线平行.

3．证明这两条直线在同一平面内，并且其中一条平行另一条直线所在的某个平面.

4．证明这两条直线分别垂直于同一平面.

5．证明这两条直线分别是两个平行平面与第三个平面的交线.

【例题剖析】

例1 如图1.2.1，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AE=A_1E_1$，$CF=C_1F_1$，求证：$EF\parallel E_1F_1$.

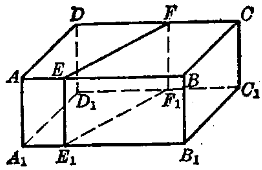

图 1.2.1

[证一] $\because$ $AE\underline{\parallel}A_1E_1$，$\therefore$ AA_1E_1E 是平行四边形，于是，$AA_1\underline{\parallel}EE_1$. 同理，$CC_1\underline{\parallel}FF_1$. 又在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\underline{\parallel}CC_1$，所以 $EE_1\underline{\parallel}FF_1$，于是，$EE_1F_1F$ 也是平行四边形. 所以 $EF\parallel E_1F_1$.

[说明] 证一是判定两直线平行的方法中，第1法与第2法的综合运用. 其中关键是找出 EF 与 E_1F_1，为对边的平行四边形.

[证二] 由 $AE\underline{\parallel}A_1E_1$ 知 AA_1E_1E 是平行四边形，故得 $EE_1\parallel AA_1$. 同理，$FF_1\parallel CC_1$. 又 $\because AA_1\parallel CC_1$，$\therefore EE_1\parallel FF_1$，$\therefore EF$ 与 E_1F_1 在同一平面内，再有平面 $ABCD\parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，从而得 $EF\parallel E_1F_1$.

[说明] 证二是第2法与第5法的综合运用. 其中关键是证明 EF、E_1F_1 在同一平面内.

例2 如图1.2.2，平面四边形 $EFGH$ 的四个顶点分别在空间四边形 $ABCD$ 的四边上，如果 $EH\parallel FG$，求证：EH

$/\!/ BD, FG /\!/ BD$.

［证明］ $\because EH /\!/ FG$，FG 在平面 BCD 内，$\therefore EH /\!/$ 平面 BCD. 又 $\because EH$ 在平面 ABD 内，$\therefore EH /\!/ BD$. 于是，$FG /\!/ BD$.

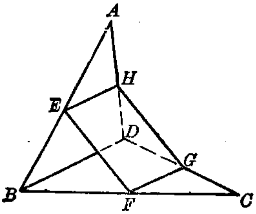

图 1.2.2

［说明］ (1) 欲证直线 EH 与直线 BD 平行，只须转化为证明直线 EH 与平面 BCD 平行，进而再利用直线 $EH /\!/ FG$ 这一已知条件证得. 这种线线平行与线面平行的互相转化是立体几何证明中常用的思想方法.

(2) 本题可改写成："如果两个相交平面(这里是平面 ABD 与平面 CBD)分别通过两条平行的直线(这里是 $EH /\!/ FG$)，那么这两个平面的交线(这里是 BD)一定平行这两条直线".

(3) 根据说明(2)可知："三个平面两两相交得三条交线 a、b、c(如图 1.2.3)，如果其中有两条平行，那么这三条交线互相平行".

例 3 如果一条直线和两个相交的平面分别平行，那么这条直线就和两相交平面的交线平行.

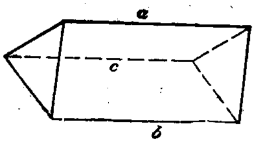

图 1.2.3

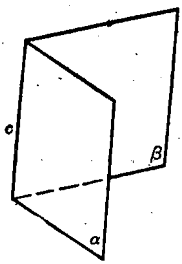

图 1.2.4

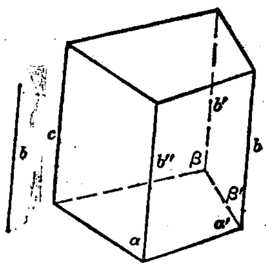

图 1.2.5

［分析］ 如图 1.2.4，本题即为：已知直线 $b \parallel$ 平面 α，$b \parallel$ 平面 β，α 与 β 相交于直线 c，求证：$b \parallel c$.

欲证 $b // c$，就不得不添辅助平面：过 b 作平面 β' 交平面 β 于 b'，再过 b 作辅助平面 α' 交平面 α 于 b''（如图 1.2.5）.

$\because b \parallel \beta$，$\therefore b \parallel b'$. 同理，$\because b \parallel \alpha$，得 $b \parallel b''$，从而 $b' \parallel b''$，故 $b' \parallel \alpha$. 又 $\because c$ 与 b' 共面，$\therefore b' \parallel c$. 最后得，$b \parallel c$.

［证明］ 略.

［说明］ 像平面几何证题一样，立体几何证题时也要添置辅助元素（直线或平面）.

这里要注意，不能在 β 内直接添辅助直线 b'，使 $b' \parallel b$. 因为 b' 既要与 b 平行，又要在平面 β 内，这样的添置方法是不行的. 现通过过 b 作辅助平面 β' 交平面 β 于 b'，利用 $b \parallel \beta$，从而推得 $b \parallel b'$，就实现了在 β 内作 $b' \parallel b$ 的目标. 这一点请读者仔细领会.

例 4 如图 1.2.6，已知直线 $AB \parallel CD$，AB 和 CD 确定的平面不垂直于平面 α. A_1B_1 和 C_1D_1 分别是 AB 和 CD 在平面 α 内的射影. 求证：$A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

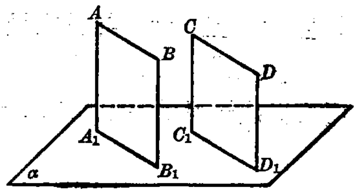

图 1.2.6

［证明］ $\because A_1$、C_1 分别是 A、C 在平面 α 内的射影. $\therefore AA_1 \perp \alpha$，$CC_1 \perp \alpha$. $\therefore AA_1 \parallel CC_1$.

又 $\because AB \parallel CD$，$\therefore$ 平面 $AA_1B_1B \parallel$ 平面 CC_1D_1D.

再由 A_1B_1 与 C_1D_1 是平面 AA_1B_1B 与平面 CC_1D_1D 分别和 α 的交线知 $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

［说明］ (1) 本例证法是判定两直线平行的方法中第 4 法与第 5 法的综合运用.